



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

Моделирование высокочастотных временных рядов

Аспирант: Зохир Косими
Научный рук.: Лукаш Е.Н.
Научный кон.: Гуцин А.А.

Ноябрь 2022



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

Структура презентации:

1. Актуальность выбранной проблемы
2. Дисперсия как важнейшая характеристика процесса
3. Реализованная вариация (RV) как оценка интегрированной дисперсии (IV)
4. Прыжки и состоятельность RV
5. Библиография



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

1. Актуальность выбранной проблемы

- Объектом предполагаемого исследования является финансовые высокочастотные временные ряды для сложных финансовых инструментов, в частности, опционов;
- Предметом анализа является “изменчивость” динамики процесса финансовых инструментов, где под изменчивостью понимается дисперсия, ее поведение;
- Цель данного исследования – анализ устойчивости такой оценки как RV (Realised Variance), измеряющей дисперсию в свете различной (конечно и бесконечной) активности прыжков;
- В силу природы рассматриваемой оценки RV и основополагающего процесса (X_t) прыжки рассматриваются как фактор, обуславливающий состоятельность RV ;



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

1. Актуальность выбранной проблемы

- Так как существуют определённые математические ограничения с описательной точки зрения дистрибутивных функций для диффузий (каковым и является наш процесс X_t), то прыжки представляются как один из инструментов для преодоления такого рода ограничения;
- В силу доступности все больших данных и развитие теории семимартингалов (X_t также является семимартингалом), прыжки приобретают все большую роль в финансовой математике в свете непараметрических методов.



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

2. Дисперсия как важнейшая характеристика процесса

- Именно *дисперсия* ($\text{Var}[X]$) включает в себя первый момент процесса, среднюю величину, и достаточна для вычисления третьего и четвёртого момента, коэффициентов, асимметрии и эксцесса → фундаментальна для описания динамики процесса;
- Роль анализа *дисперсии* центральна в рамках различных процедур риск менеджмента, прогнозирования и оценки сложных финансовых инструментов;
- В нашем случае *дисперсия* феномен, который мы исследуем с точки зрения финансовой математики, объектом которой финансовый инструмент и предметом – его динамика, изменение цены инструмента;
- Именно с *дисперсией* ассоциируется риск как степень вероятности отклонения от прогнозируемого → мотив для интереса к моделированию дисперсии;



3. Реализованная вариация как оценка интегрированной дисперсии (1)

- Основополагающий для нашего анализа процесс X_t :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dW_s + J_t,$$

где $\int_0^t \sigma_s dW_s$ элемент “чистой случайности”, диффузии, а J_t - компонент “сдвига”, подразумевающий активность прыжков;

- Процесс X_t является семимартингалом, что исключает возможность арбитража как основополагающего условия для моделирования процесса;
- Квадратичная вариация, QV (Quadratic Variation):

$$[X, X]_t = \langle X^c, X^c \rangle_t + \sum_{i=1}^t (\Delta X_i)^2 = \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{i=1}^t (\Delta X_i)^2 = QV$$



3. Реализованная вариация как оценка интегрированной дисперсии (2)

или:

$$QV = \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{i=1}^t (\Delta X_i)^2 = IV + Jumps,$$

где IV (Integrated Variance) – интегрированная дисперсия, “непрерывная” часть QV ;

- Реализованная вариация RV (Realised Variance):

$$[X]_t^2 = p \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^M (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2 = RV$$

при $M \rightarrow \infty$ и $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_M = t$ и $\sup\{t_j - t_{j-1}\} \rightarrow 0, \forall j$.



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

3. Реализованная вариация как оценка интегрированной дисперсии (3)

- Так, RV является оценкой QV :

$$RV \xrightarrow{u.c.p} QV,$$

u.c.p. (uniform convergence in probability) означает $\mathbb{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} |RV - IV| > \varepsilon] \rightarrow 0$, сходимость по вероятности, где $n \rightarrow \infty$ имеет отношение к RV , выраженной как $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (\Delta_i^n X)^2$, что равносильно $\Delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

4. Прыжки и состоятельность RV (1)

- Два фундаментальных в нашем случае фактора имеют непосредственное влияние на *состоятельность* оценки RV :
 - частота данных, так как сходимость по вероятности предполагает $\Delta \rightarrow 0$. В силу доступности все большего множества данных данное представляется разумным с учетом определённого $\varepsilon > 0$ (см. слайд 6),
 - влияние прыжков, их активность!
- Именно влияние прыжков и является причиной настоящей презентации и интереса к исследованию оценки RV ;
- Даже в случае все еще умеренной (конечной) активности прыжков RV уже является не состоятельной оценкой QV ;



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

4. Прыжки и состоятельность RV (2)

- Следует отметить, что наисложнейшую задачу в данном отношении представляют бесконечные прыжки;
- Каким образом минимизировать “разрушающий” для состоятельности оценки эффект прыжков?
- В решении данной проблемы краеугольным является выделение влияния прыжков для лучшего контроля (обособления) IV как центрального для нашего внимания компонента QV ;
- Один из методов для достижения состоятельности оценки — использование многостепенных вариаций (Multipower Variation, MPV), то есть когда степень для RV , $[X]_t^{p=2}$, принимает иные значения, $p \in (0, \infty)$.



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

5. Библиография (1)

- Aït-Sahalia and Jacod J. (2014), High frequency financial econometrics. Princeton University Press.
- Andersen T. G., Dobrev D., and Schaumburg E. (2012), Jump robust volatility estimation using nearest neighbour truncation. Journal of Econometrics 169, pp. 75 – 91.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard, and M. Winkel (2004), Limit theorems for multipower variation in the presence of jumps in financial econometrics. Unpublished paper: Nuffield College, Oxford.
- Barndorff-Nielsen, O.E. and N. Shephard (2007), Variation, jumps, market frictions and high frequency data in financial econometrics. In: Blundell, R., Persson, T., Newey, W. (Eds.), Advances in Economics and Econometrics. In: Theory and Applications, Ninth World Congress, Cambridge University Press.



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

5. Библиография (2)

- Eberlein E. (2010), Jump processes. Handbook of Encyclopaedia of quantitative finance, pp. 1850 – 1869.
- Mancini C. (2009), “Non parametric threshold estimation for models with stochastic diffusion coefficient and jumps”. Scandinavian Journal of Statistics, Vol 36: 270-296.
- Protter, P. (1992), Stochastic integration and differential equations: A new approach (Second edition). New York: Springer – Verlag.
- Shiryaev N. A. (1999), Essential of stochastic finance: facts, models, theory. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. Scientific Pub Co Inc, 1st edition.
- Woerner, H. C. J. (2004), Power and multipower variance: inference for high frequency data. Handbook of Stochastic finance by Albert Shiryaev (2006), Chapter 12, pp. 343 – 364. Springer.



LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

Кафедра математических методов анализа экономики

zohirsho1@gmail.com
