О построении DSGE модели с не абсолютно гибкими ценами, финансовым посредником и центробанком, действующим по правилу Тэйлора

Отличие от прежних моделей

Бакалаврский диплом: DSGE-модель с гибкими ценами;

Магистерская диссертация: DSGE-модель с гибкими ценами и финансовым посредником;

Аспирантура: DSGE-модель закрытой экономики с жесткими ценами (ноябрь 2011 г.) → **авторская модификация** модели закрытой экономики с жесткими ценами, финансовым посредником и центробанком, действующим по правилу Тэйлора.[1]

Домохозяйства

Континуум домохозяйств i, максимизирующих ожидаемую приведенную полезность. Действуют в условиях ограничения cash-in-advance, реального бюджетного ограничения и финансовых шоков, пропорциональных размеру денежной массы.

Основные обозначения: P_t – общий уровень цен в экономике; c_t^i – потребление домохозяйства i; h_t^i – предложение труда домохозяйством i; m_t^i – денежная масса в распоряжении домохозяйства i; g_t^f – финансовый шок; M_t – денежная масса в экономике; N_t^i – депозиты домохозяйства i; k_t^i – основной капитал в распоряжении домохозяйства i; w_t – уровень заработной платы в экономике; r_t – норма доходности сдачи в аренду основного капитала; δ – норма выбытия основного капитала; ξ_t^i – прибыль промежуточных фирм, переданная домохозяйству i; r_t^n – норма доходности передачи депозитов финансовому посреднику.

Задача домохозяйства:

$$\mathrm{E}_t\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left(\ln c_t^i + Bh_t^i\right)\right\} \to \max_{\{c_t^i\},\{h_t^i\},\{m_t^i\},\{k_{t+1}^i\},\{N_t^i\}} \tag{1}$$

$$P_t c_t^i = m_{t-1}^i + \left(g_t^f - 1\right)M_{t-1} - N_t^i \tag{2}$$

$$\frac{m_t^i}{P_t} + k_{t+1}^i = w_t h_t^i + r_t k_t^i + (1-\delta)k_t^i + \xi_t^i + r_t^n\frac{N_t^i}{P_t} \tag{3}$$

$$\ln g_t^f = \gamma^g \ln g_{t-1}^f + \varepsilon_t^g \tag{4}$$

$$\varepsilon_t^g \sim i.i.d.(0,\sigma^g)$$

Фирма, действующая на рынке конечного продукта

Действующая на рынке конечного продукта фирма решает задачу максимизации прибыли при известной структуре цен и фиксированном выпуске, выбирая объем спроса на продукт

[1] Комбинация модели с гибкими ценами, финансовым посредником и центробанком и модели с жесткими ценами – обе представлены в [6].

каждой из k промежуточных фирм, при заданной «технологии» производства конечного продукта:

$$P_t Y_t - \int_0^1 P_t(k) Y_t(k) dk \to \max_{\{Y_t(k)\}} \tag{5}$$

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_t(k)^{\frac{\psi-1}{\psi}} dk\right]^{\frac{\psi}{\psi-1}} \tag{6}$$

ФИРМЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РЫНКЕ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ПРОДУКТА

На рынке промежуточного продукта действуют k фирм, не являющихся совершенными конкурентами. Технология производства промежуточного продукта одинакова для всех k фирм. Фирмы арендуют у домохозяйств основной капитал и занимают деньги у финансовых посредников по ставке r_t^f на выплату заработной платы работникам. Кредиты берутся и возвращаются внутри одного периода и потому являются для финансовых посредников, по существу, безрисковыми. Заработанную прибыль промежуточные фирмы распределяют среди домохозяйств, которые и используют ее, в том числе, для накопления основного капитала.

Случайно «выбираемые» в каждом периоде $1-\rho \in [0;1]$ фирм могут установить цену периода t $P_t(k)$ на уровне $P_t^*(k)$. Остальные ρ фирм в периоде t только индексируют цену периода $t-1$ с учетом общего уровня инфляции периода $t-1$ (π_{t-1}):

$$P_t(k) = P_{t-1}(k)\left[\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right] = P_{t-1}(k)[\pi_{t-1}]$$

При установлении цены $P_t^*(k)$ фирмы решают задачу максимизации ожидаемой приведенной прибыли на горизонте действия цены $P_t^*(k)$ при найденном из решения задачи для конечной фирмы спросе на продукцию промежуточной фирмы и заданной технологии производства.

$$\mathrm{E}_t\left\{\sum_{i=0}^{\infty}(\beta\rho)^i\left[\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}}P_t^*(k)Y_{t+i}(k) - P_{t+i}\left(r_{t+i}K_{t+i}(k) + r_{t+i}^f w_{t+i} H_{t+i}(k)\right)\right]\right\} \to \max_{\{P_t^*(k)\}} \tag{7}$$

$$Y_t(k) = Y_t\left(\frac{P_t}{P_t(k)}\right)^{\psi} \tag{8}$$

$$Y_t(k) = \lambda_t K_t^{\theta}(k) H_t^{1-\theta}(k) \tag{9}$$

$$\ln \lambda_t^f = \gamma^g \ln \lambda_{t-1}^f + \varepsilon_t^{\lambda} \tag{10}$$

$$\varepsilon_t^{\lambda} \sim i.i.d.\left(0, \sigma^{\lambda}\right)$$

ФИНАНСОВЫЙ ПОСРЕДНИК

Финансовый посредник в модели работает без прибыли. Помимо кредитно-депозитных операций с домохозяйствами и промежуточными фирмами внутри одного периода, финансовый посредник абсорбирует прирост контролируемого центробанком денежного предложения. Коэффициент роста денежной массы под контролем центробанка составляет g_t^m. Бюджетное ограничение финансового посредника и условие нулевой прибыли задаются, при таких предпосылках, как:

$$N_t + (g_t^m - 1)M_{t-1} = P_t w_t H_t \tag{11}$$

$$r_t^n N_t = r_t^f P_t w_t H_t \tag{12}$$

Центробанк

Центробанк в экономике действует по правилу Тэйлора. Целевой (устойчивый) уровень инфляции $\bar{\pi}$ задается экзогенно. В зависимости от величин отклонений π_t от $\bar{\pi}$ и Y_t от устойчивого уровня $\bar{Y}$ (после реализации всех шоков периода t) центральный банк изменяет подконтрольноую ему часть денежного предложения для достижения индуцируемого правилом Тэйлора уровня реальной процентной ставки по кредитам финансового посредника промежуточным фирмам:

$$r_t^f = a(Y_t - \bar{Y}) + b(\pi_t - \bar{\pi}) + \bar{r}^f \tag{13}$$

$$g_t^m = \left(\frac{r_t^n - r_t^f}{r_t^f}\right)\frac{N_t}{M_{t-1}} + 1 \tag{14}$$

Последнее выражение в явном виде показывает, насколько изменяет в каждом периоде времени подконтрольную ему часть денежной массы центробанк. Общий прирост денежной массы в каждый период времени, при этом, описывается уравнением:

$$M_t = \left(g_t^f + g_t^m - 1\right)M_{t-1} \tag{15}$$

Переменные и параметры модели

Из числа переменных модели можно убрать ξ_t^i, приняв, что:

$$y_t^i = w_t h_t^i + r_t k_t^i + \xi_t^i$$

Полный набор переменных и параметров модели включает двенадцать переменных:

$$\left\{c_t^i, k_{t+1}^i, h_t^i, y_t^i, m_t^i, N_t^i, P_t, w_t, r_t, r_t^f, r_t^n, g_t^m\right\}$$

два типа шоков (4) и (10), а также экзогенные параметры:

$$\left\{B, \theta, \beta, \delta, \rho, \psi, a, b, \bar{g}^m, \bar{\pi}, \bar{g}^f, \bar{\lambda}, \gamma^\lambda, \gamma^f, \sigma^\lambda, \sigma^f\right\}$$

Для всех реализаций модели $\bar{g}^f = 1$ и $\bar{\lambda} = 1$, остальные параметры подлежат калибровке.

Правила агрегирования

В равновесии $c_t^i = C_t$, $k_t^i = K_t$, $h_t^i = H_t$, $m_t^i = M_t$, $N_t^i = N_t$, $y_t^i = Y_t$. Строго говоря,

$$Y_t \neq \int_0^1 Y_t(k)dk \tag{16}$$

но можно показать, что при введенных предположениях о динамике цен корректирующих и не корректирующих цену фирм приведенное выше выражение обращается в равенство при логлинеаризации. Это позволяет использовать при формулировке модели только агрегированные величины.

Модель целиком

После решения задач оптимизации (1)-(4), (5)-(6) и (7)-(10), а также после перехода к агрегированным величинам (там, где это возможно), модель принимает вид:

$$\frac{B}{w_t} = -\beta \mathrm{E}_t \left\{ \frac{P_t}{P_{t+1} C_{t+1}} \right\} \tag{17}$$

$$\frac{1}{w_t} = \beta \mathrm{E}_t \left\{ \frac{r_{t+1} + 1 - \delta}{w_{t+1}} \right\} \tag{18}$$

$$r_t^n = -\frac{w_t}{B C_t} \tag{19}$$

$$P_t C_t = g_t^f M_{t-1} - N_t \tag{20}$$

$$\frac{M_t}{P_t} + K_{t+1} = Y_t + (1-\delta) K_t + \frac{r_t^n N_t}{P_t} \tag{21}$$

$$\frac{1-\theta}{\theta} \frac{r_t}{w_t r_t^f} = \frac{H_t}{K_t} \tag{22}$$

$$Y_t = \lambda_t K_t^\theta H_t^{1-\theta} \tag{23}$$

$$r_t^n N_t = r_t^f P_t w_t H_t \tag{24}$$

$$N_t + (g_t^m - 1) M_{t-1} = P_t w_t H_t \tag{25}$$

$$M_t = \left(g_t^f + g_t^m - 1\right) M_{t-1} \tag{26}$$

$$r_t^f = a(Y_t - \bar{Y}) + b(\pi_t - \bar{\pi}) + \bar{r}^f \tag{27}$$

$$P_t^*(k) = \frac{\psi}{\psi - 1} \frac{\mathrm{E}_t \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\rho)^i \left(\frac{P_{t-1}}{P_{t+i-1}} \right) P_{t+i} Y_{t+i}(k) \frac{w_{t+i} r_{t+i}^f}{(1-\theta)\lambda_{t+i}} \left(\frac{(1-\theta) r_{t+i}}{\theta w_{t+i} r_{t+i}^f} \right)^\theta \right\}}{\mathrm{E}_t \{ \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\rho)^i Y_{t+i}(k) \}} \tag{28}$$

$$P_t^{1-\psi} = \rho \left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} P_{t-1} \right)^{1-\psi} + (1-\rho) P_t^{*1-\psi} \tag{29}$$

Уравнения (17)-(19) – это результат решения задачи домохозяйства. Уравнения (20) и (21) – бюджетные ограничения домохозяйства. Уравнение (22) – результат минимизации издержек промежуточной фирмы (первый этап решения задачи (7)-(10)). (23) – производственная функция (в предположении о приближенном выполнении равенства (16)). (24) и (25) – ограничения финансового посредника. (26) – динамика совокупного денежного предложения. (27) – правило Тэйлора. (28) – результат решения задачи (7)-(10). (29) – правило установления цены на конечный продукт, полученное с учетом:

$$P_t(k) = \left[\int_0^1 P_t(k)^{1-\psi} dk\right]^{\frac{1}{1-\psi}}.$$

Устойчивые уровни

Решение системы уравнений (17)-(29) производится путем логлинеаризации переменных вокруг устойчивых уровней. Для нахождения последних система (17)-(29) решается в предположении о постоянстве всех переменных за исключением денежной массы и уровня цен (растут в устойчивом уровне с темпами, соответственно, $\bar{g}^m$ и $\bar{\pi}$). Последнее обстоятельство усложняет нахождение устойчивых уровней. В явном виде из уравнений (17)-(19) и (26) можно найти только:

$$\bar{r} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \tag{30}$$

$$\bar{r}^n = \frac{\bar{\pi}}{\beta} \tag{31}$$

$$\bar{\pi} = \bar{g}^m \tag{32}$$

Отсавшиеся девять переменных модели найти из восьми оставшихся уравнений невозможно ((27) тривиально, (28) и (29) объединяются в одно). Тем не менее, устойчивые уровни можно найти, если ограничиться нахождением только реального запаса денежных средств в устойчивом уровне $\left(\overline{M/P}\right)$ и не искать номинальное денежное предложение и уровень цен. Условие (32) гарантирует, что $\left(\overline{M/P}\right)$ не меняется во времени. После подобной модификации устойчивые уровни находятся посредством численного решения системы уравнений:

$$\bar{w} = -\frac{B}{\beta}\bar{c}\bar{\pi} \tag{33}$$

$$\bar{c} = \frac{1}{\bar{\pi}}\left(\frac{\bar{M}}{P}\right) - \left(\frac{\bar{N}}{P}\right) \tag{34}$$

$$\left(\frac{\bar{M}}{P}\right) = \bar{Y} - \delta\bar{K} + \bar{r}^n\left(\frac{\bar{N}}{P}\right) \tag{35}$$

$$\frac{1-\theta}{\theta}\frac{\bar{r}}{\bar{w}\bar{r}^f} = \frac{\bar{H}}{\bar{K}} \tag{36}$$

$$\bar{Y} = \bar{K}^\theta \bar{H}^{1-\theta} \tag{37}$$

$$\bar{r}^n\left(\frac{\bar{N}}{P}\right) = \bar{w}\bar{r}^f\bar{H} \tag{38}$$

$$\left(\frac{\overline{N}}{P}\right)+\left(\frac{\bar{\pi}-1}{\bar{\pi}}\right)\left(\frac{\overline{M}}{P}\right)=\overline{w}\overline{H} \tag{39}$$

$$\frac{\psi}{\psi-1}=\frac{1}{\dfrac{\overline{w}\bar{r}^{f}}{(1-\theta)}\left[\dfrac{\bar{r}(1-\theta)}{\theta\overline{w}\bar{r}^{f}}\right]^{\theta}} \tag{40}$$

В уравнении (40) знаменатель правой части – реальные предельные издержки промежуточной фирмы в устойчивом уровне, левая часть – валовая (увеличенная на единицу) надбавка промежуточной фирмы.

Символьного решения система (33)-(40) не имеет.

Логлинеаризация

Нелинейная система разностных уравнений (17)-(29) может быть решена, только если ее свести к линейной. Для этого используется техника логлинеаризации переменных вокруг устойчивых уровней. После логлинеаризации системы переписывается в процентных отклонениях от устойчивых уровней, обозначаемых для произвольной переменной x_t как $\tilde{x}_t$. Простое правило логлинеаризации состоит в следующем:

$$x_t=\bar{x}e^{\ln x_t/\bar{x}}=\bar{x}e^{\tilde{x}_t}\approx\bar{x}(1+\tilde{x}_t)=\bar{x}+\bar{x}\tilde{x}_t$$

После логлинеаризации система уравнений (17)-(29) запишется как:

$$\widetilde{w}_t+\tilde{P}_t-\mathrm{E}_t\{\tilde{P}_{t+1}\}-\mathrm{E}_t\{\tilde{C}_{t+1}\}=0 \tag{41}$$

$$\widetilde{w}_t+\beta\bar{r}\mathrm{E}_t\{\tilde{r}_{t+1}\}-\mathrm{E}_t\{\widetilde{w}_{t+1}\}=0 \tag{42}$$

$$\tilde{r}_t^n-\widetilde{w}_t+\tilde{C}_t=0 \tag{43}$$

$$\bar{C}\tilde{C}_t-\frac{\left(\overline{M/P}\right)}{\bar{g}^m}\tilde{g}_t^f-\frac{\left(\overline{M/P}\right)}{\bar{g}^m}\widetilde{M}_{t-1}+\left(\overline{N/P}\right)\widetilde{N}_t+\bar{C}\tilde{P}_t=0 \tag{44}$$

$$\begin{gathered}\left(\overline{M/P}\right)\widetilde{M}_t+\left(\bar{r}^n\left(\overline{N/P}\right)-\left(\overline{M/P}\right)\right)\tilde{P}_t+\overline{K}\widetilde{K}_{t+1}-(1-\delta)\overline{K}\widetilde{K}_t-\\-\overline{Y}\tilde{Y}_t-\bar{r}^n\left(\overline{N/P}\right)\tilde{r}_t^n-\bar{r}^n\left(\overline{N/P}\right)\widetilde{N}_t=0\end{gathered} \tag{45}$$

$$\widetilde{H}_t-\widetilde{K}_t-\tilde{r}_t+\widetilde{w}_t+\tilde{r}_t^f=0 \tag{46}$$

$$\tilde{Y}_t-\tilde{\lambda}_t-\theta\widetilde{K}_t-(1-\theta)\widetilde{H}_t=0 \tag{47}$$

$$\tilde{r}_t^n+\widetilde{N}_t-\tilde{P}_t-\tilde{r}_t^f-\widetilde{w}_t-\widetilde{H}_t=0 \tag{48}$$

$$\left(\overline{N/P}\right)\widetilde{N}_t-\overline{w}\overline{H}\tilde{P}_t+\left(\overline{M/P}\right)\left(1-\frac{1}{\bar{g}^m}\right)\widetilde{M}_{t-1}+\left(\overline{M/P}\right)\tilde{g}_t^m-\overline{w}\overline{H}\widetilde{w}_t-\overline{w}\overline{H}\widetilde{H}_t=0 \tag{49}$$

$$\widetilde{M}_t-\frac{1}{\bar{g}^m}\tilde{g}_t^f-\tilde{g}_t^m-\widetilde{M}_{t-1}=0 \tag{50}$$

$$a\bar{Y}\tilde{Y}_t + b\bar{g}^m\tilde{P}_t - b\bar{g}^m\tilde{P}_{t-1} - \bar{r}^f\tilde{r}_t^f = 0 \quad (51)$$

$$(1+2\beta)\tilde{P}_t - \beta\mathrm{E}_t\{\tilde{P}_{t+1}\} - (2+\beta)\tilde{P}_{t-1} + \tilde{P}_{t-2} - \\ -\frac{(1-\rho)(1-\beta\rho)}{\rho}\left[(1-\theta)\widetilde{w}_t - \tilde{\lambda}_t + (1-\theta)\tilde{r}_t^f + \theta\tilde{r}_t\right] = 0 \quad (52)$$

$$\tilde{\lambda}_t = \gamma^\lambda\tilde{\lambda}_{t-1} + \varepsilon_t^\lambda \quad (53)$$

$$\tilde{g}_t^f = \gamma^g\tilde{g}_{t-1}^f + \varepsilon_t^g \quad (54)$$

Система линейных разностных уравнений (41)-(54) описывает динамику моделируемой экономики в отклонениях от устойчивых уровней. Уравнение (52) представляет собой неокейнсианскую кривую Филлипса. Уравнения (53) и (54) описывают динамику шоковых процессов.

Принцип разрешения логлинеаризованной системы

Система (41)-(54) может быть разрешена различными способами, но ранее разработанный алгоритм для MathCAD предполагает использование метода неопределенных коэффициентов, изложенного в [16]. Для сведения системы (41)-(54) к форме, обсчитываемой компьютерным алгоритмом, ее достаточно переписать в виде:

$$\mathrm{A}x_t + \mathrm{B}x_{t-1} + \mathrm{C}y_t + \mathrm{D}z_t = 0 \quad (55)$$

$$\mathrm{E}_t\{\mathrm{F}x_{t+1} + \mathrm{G}x_t + \mathrm{H}x_{t-1} + \mathrm{J}y_{t+1} + \mathrm{K}y_t + \mathrm{L}z_{t+1} + \mathrm{M}z_t\} = 0 \quad (56)$$

$$z_{t+1} = \mathrm{N}z_t + \varepsilon_{t+1} \quad (57)$$

Для представленной модели:

$$x_t = \left[\widetilde{K}_{t+1}, \widetilde{M}_t, \tilde{P}_t, \tilde{P}_{t-1}\right]' \quad (58)$$

$$y_t = \left[\tilde{r}_t, \widetilde{w}_t, \tilde{Y}_t, \tilde{C}_t, \widetilde{H}_t, \widetilde{N}_t, \tilde{r}_t^n, \tilde{r}_t^f, \tilde{g}_t^m\right]' \quad (59)$$

$$z_t = \left[\tilde{\lambda}_t\ , \tilde{g}_t^f\right]' \quad (60)$$

Матрицы системы (55)-(57) полностью определяются параметрами модели и значениями переменных в устойчивых уровнях, то есть они полностью определены.

Дальнейшие шаги

Представляется интересным сопоставить поведение модели с жесткими ценами (представлена в ноябре) и авторской модификации этой модели с финансовым посредником и центробанком. Так как модель сконструирована для закрытой экономики, надо аккуратно подойти как к выбору страны, для которой будет калиброваться и симулироваться модель, так и к выбору исследуемого периода.

Список литературы

Книги

1. *Canova F.*, Methods for Applied Macroeconomic Research. – Princeton. 2007
2. *Dave C.*, *DeJong D.N.,* Structural Macroeconometrics. – Princeton. 2010
3. *Favero C.A.,* Applied Macroeconometrics. – Oxford, 2001
4. *Gali J.,* Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle. – Princeton. 2008
5. *Lim G.C., McNeils P.D.* Computational Macroeconomics for the Open Economy. – MIT. 2008
6. *McCandless G.T.,* The ABC's of RBC's: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models. – McGraw-Hill. 2008
7. *Wickens M.,* Macroeconomic Theory: A Dynamic General Equilibrium Approach. – Princeton. 2008

Статьи

8. *Ascari G.,* Staggered Prices and Trend Inflation: Some Nuisances // Review of Economic Dynamics. 2004. Vol. 7. P. 642-667
9. *Bernanke B., Gertler M., Gilchrist S.,* The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework // Chapter 21 in "Handbook of Macroeconomics" (ed. Taylor J.B., Woodford M.). Vol. 1 – Elsevier, 1999
10. *Blanchard O., Kahn C.,* The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations // Econometrica. 1980. Vol. 48. No. 5. pp.1305-1311
11. *Calvo G.A.,* Staggered Prices in a Utility Maximizing Framework // Journal of Monetary Economics. 1983. Vol. 12. P. 383-398
12. *Christiano L.J.,* Solving Dynamic Equilibrium Models by a Method of Undetermined Coefficients // Computational Economics. 2002. Vol.21. pp.21-55
13. *Clarida R., Gali J., Gertler M.,* The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective // Journal of Economic Literature. 1999. Vol. 37. P. 1661-1707
14. *Nolan C., Thoenissen C.* Financial Shocks and The US Business Cycle // Journal of Monetary Economics. 2009. Vol. 56. P. 596-604
15. *Smets F., Wouters R.,* An Estimated Stochastic Dynamic General Equilibrium Model of The Euro Area // ECB Working Paper # 171. 2002
16. *Uhlig H.* A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily // Federal Reserve Bank of Minneapolis Discussion Paper 101. 1995