

Назаров Павел, 2.12.2010.

## Оценка устойчивости результатов тестирования клубной конвергенции.

Цель: с помощью имитационного моделирования определить, как влияют экономические циклы, шоковые явления в экономике и случайные колебания на результаты тестирования клубной конвергенции.

Задачи:

1. Формирования модельных рядов ВВП на душу населения с заведомо известными параметрами.
2. Выбор тестов на клубную конвергенцию.
3. Оценка изменения результатов тестов при изменении параметров ряда (периода и амплитуды циклов, дисперсии шоков).
4. Оценка допустимой длины периода, рассматриваемого в рамках тестирования.

Тип конвергенции: клубная.

Целевой показатель: ВВП на душу населения в сопоставимых ценах.

Проверяемые методы тестирования: регрессия Барро, индексы дифференциации, метод Квахы (цепи Маркова), тест Дики-Фулера.

Критерий качества теста: статистическая вероятность обнаружения заведомо существующей конвергенции.

### 1. Идея эксперимента.

Пусть существуют 10 стран, среднедушевые доходы которых распределены равномерно в промежутке от 1 до 100.

Пусть темп прироста дохода отрицательно зависит от достигнутого уровня, форма зависимости

$$Y_{t+1} = Y_t \left(1 + \exp\left(-\frac{Y_t}{10}\right)\right)$$
. Отрицательная зависимость темпа роста от достигнутого уровня дохода гарантирует конвергенцию.

Пусть страны развивались подобным образом в течение 20 лет.

Вопрос: какие из вышеуказанных тестов через 20 лет развития покажут конвергенцию?

1. Регрессия Барро.
2. Временные ряды.
3. Индексный метод.

Подобный эксперимент имеет смысл провести также добавив в уравнение роста экономический цикл периодом 6 лет и амплитудой, не превышающей 5% потенциального дохода:

$$Y_{t+1} = Y_t \left(1 + \exp\left(-\frac{Y_t}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)$$
. Циклы асинхронные для 4 групп стран.

И со случайным шоком:

$$Y_{t+1} = Y_t \left(1 + \exp\left(-\frac{Y_t}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + N(0,1)\right)$$
.

- все три метода показывают наличие конвергенции при отсутствии циклов и шоков.
- цикл влияет на результат тестов на стационарность
- при добавлении случайных шоков, не превышающих 5% максимального начального дохода, пространственный тест «не видит» конвергенции.

Назаров Павел, 2.12.2010.

## 2. Моделирование динамики ВВП на душу населения.

Общий подход к моделированию ряда динамики экономического показателя:

$$Y_t = \underbrace{(U_t + V_t)}_{\text{определенная компонента}} + \underbrace{(E_t^{(1)} + E_t^{(2)})}_{\text{случайная компонента}} + \underbrace{f}_{\text{управление}}$$

$U_t$  - тренд

$V_t$  – циклические колебания, сезонность.

$E_t$  – случайная компонента: шоки

$f$  - некоторая управляющая функция. Определяет, например, моменты изменения параметров, сглаживание.

Моделирование тренда:

$$U_t = \sum_{k=1}^n A_k t^k$$

1. Полиномиальный тренд:

2. Экспоненциальный тренд:  $U_t = (1 + g)^t$ .

Моделирование цикла:

1. Сезонность. Моделируется набором фиктивных переменных  $V_t = \{S_{1,t}; S_{2,t+1}; \dots; S_{k,t+k}\}$  для колебания длины  $k$ .

2. Ряд Фурье.

$$V_t = \sum (A_k \sin(kt) + B_k \cos(kt))$$

3. Сезонность по Хольту-Уинтерсу, циклы переменной амплитуды.

$$V_t = \hat{Y}_t \times F(w)$$

Частный случай: экспоненциальный тренд и экспоненциальное наращивание амплитуды:

$$V_t = \rho^t * (A_1 \cos(wt) + A_2 \sin(wt))$$

Моделирование случайной составляющей:

1. Тип первый: случайные колебания. Непрерывная случайная величина.

- с нормальным распределением, если необходимо контролировать дисперсию.

- с равномерным распределением, если необходимо контролировать амплитуду.

- с урезанным нормальным распределением, если необходимо контролировать оба показателя разброса.

2. Тип второй: случайные шоки. Две степени случайности: момент шока и размер шока.

Задача: создать модель процесса, который определяет

- моменты  $t^*$ , во время которых происходит шок

- направление и размер шока

Желательные свойства:

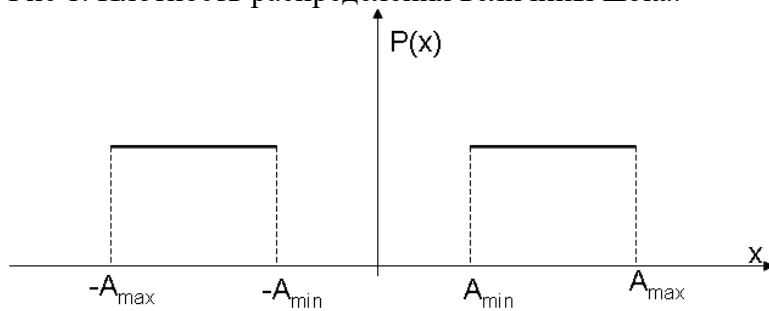
- вероятность шока не должна зависеть от момента времени.

- шоки не должны идти подряд.

- величина шока не должна зависеть от момента времени.

Назаров Павел, 2.12.2010.

Рис 1. Плотность распределения величины шока:



**Алгоритм:**

$$T := 20 \quad p := 0.25$$

```

D :=
  for i ∈ 1.. T
    Ai ← rnd (10)
  for i ∈ 1.. T
    Ai ← 0 if Ai ≥ p·10
    otherwise
      Ai ← rnd (10) + 5
      Ai ← (sign (rnd (1) - 0.5)·Ai)
      Ai+1 ← 10
  (A)
  
```

Параметры: T – длина временного ряда, p – вероятность шока в каждый период. Можно также регулировать амплитуду шока и число свободных от шока периодов.

**Общая структура ряда:**

$$Y_t = U_t + V_t + E_t =$$

$$1) Y_t = Y_0 (1 + g)^t + \rho^t (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)) + \varepsilon_t$$

$$2) Y_t = Y_0 (1 + g)^t + \rho^t (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)) + \varepsilon_t$$

Тренд – экспоненциальный, сезонность – по Хольту-Уинтерсу.

**2. Тестирование клубной конвергенции.**

**1. Регрессия Барро.** (Barro 1991, Barro, Sala –i-Martin 1992)

Определение: конвергенция означает, что более бедные страны развиваются более быстрыми темпами, чем богатые.

Применение: группа стран признается конвергенционным клубом, темпы их роста отрицательно зависят от начального уровня среднедушевых доходов.

$$\frac{1}{T} \sum \ln \left( \frac{Y_t}{Y_{t-1}} \right) = a + b * \ln(Y_0) + \varepsilon_t$$

Для среднего темпа роста:

$$\ln \frac{Y_T}{Y_{T-1}} = a + b * \ln Y_0 + \varepsilon_t$$

Для текущего темпа роста:

Критерий:  $b < 0$ .

Назаров Павел, 2.12.2010.

Моделирование: набор рядов динамики вида  $Y_t = Y_0(1 + g)^t + \rho^t (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)) + \varepsilon_t$

Корреляция  $Y_0$  и  $g$  заведомо отрицательна.

$N$  – ранг страны.  $Y_0 = f(N)$  – убывающая функция от  $N$ , а  $g = h(N)$  – возрастающая функция.

2. Индексный метод. (Mo-Yin S. and J. Persky, 1982, D.Park, 2000).

Определение: в группе стран, являющейся конвергенционным клубом, дифференциация дохода убывает во времени.

Применение: дифференциацию дохода в каждый период времени измеряем каким-либо индексом. Группу признаем клубом, наклон линии тренда индекса дифференциации отрицателен.

Примеры индексов:

1. Коэффициент Джини,  $G = \sum P_i d_{i+1} - \sum d_i P_{i+1}$
2. Индекс Тейла (модификация),  $T = \sum \frac{y_i}{\sum y} * \ln(n * y_i)$

Чтобы дифференциация убывала, зададим динамику ВВП на душу населения в виде экспоненциального тренда и циклов убывающей амплитуды:

$$Y_t = Y_0 * 1,03^t + 0,97^t (\sin 1,256t + \cos 1,256t) + \varepsilon_t$$

Независимо от разброса  $Y_0$ , дисперсия будет сокращаться во времени. Для оценки необходимо числ стран, достаточное для расчета коэффициентов дифференциации.

3. Стационарность временных рядов. (A.V. Bernard, S. N. Durlauf, 1996)

Определение конвергенции, данное Д.Квахом (Galton's Fallacy and Tests of the Convergence Hypothesis, 1993): конвергенция в группе стран существует, если динамика разности среднедушевых доходов не содержит трендовой компоненты (стационарна).

Стационарность → равные темпы роста, частоты, амплитуды, различие в начальных уровнях.

$$Y_t^{(1)} - Y_t^{(2)} = (Y_0^{(1)} - Y_0^{(2)}) * 1,03^t + \eta_t$$

Для оценки достаточно двух стран.

Критерий стационарности – тест Дики-Фуллера. Существует 3 версии теста.

$$\Delta Y_t = b * Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Гипотезы:

$$\Delta Y_t = a + b * Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$H_0 : b = 0$  – нестационарность

$$\Delta Y_t = a_0 + a_1 + b * Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$H_1 : b < 0$  – стационарность ⇒ конвергенция

4. Конвергенционный клуб Д. Кваха. (Quah D., 1992, 1993).

Пусть  $F_0(Y)$  – распределение среднедушевого дохода по странам в момент  $t$ . Ранжирование по возрастанию. Разбиваем данное распределение на квантили, допустим, по 20% квантили.

Определения:

1. Конвергенция: более богатые страны имеют большую вероятность перейти в нижний квантиль.
2. Клубная конвергенция: вероятность остаться в своем квантиле значительно выше вероятности перехода в любой другой квантиль.

Моделирование: формируем три группы стран с разными темпами роста:

$$Y_t^{(1)} = Y_{01}(1,025)^t + A_1 \cos(1,256t) + A_2 \sin(1,256t) + \varepsilon_t$$

$$Y_t^{(2)} = Y_{02}(1,02)^t + A_1 \cos(1,256t) + A_2 \sin(1,256t) + \varepsilon_t$$

$$Y_t^{(3)} = Y_{03}(1,03)^t + A_1 \cos(1,256t) + A_2 \sin(1,256t) + \varepsilon_t$$

Назаров Павел, 2.12.2010.

Страны ранжируем по  $Y_0$  (и оцениваем матрицу перехода. Если диагональные вероятности действительно выше остальных – признаем конвергенционные клубы.

### 3. Определение длины ряда.

Методы оценки параметров:

Метод целевого синтеза.

1. Оценивается AR – модель. 
$$Y_t = aY_{t-1} + bY_{t-2} + cY_{t-3} + \varepsilon_t$$
2. Модель преобразуется в разностное уравнение: 
$$Y_t - aY_{t-1} - bY_{t-2} - cY_{t-3} = 0$$
3. Решение характеристического уравнения:

$$X^t - aX^{t-1} - bX^{t-2} - cX^{t-3} = 0$$

4.  $X^3 - aX^2 - bX - C = 0$  позволяет найти нелинейные параметры ряда.  
Линейные восстанавливаются по МНК.

Метод SSA.

1. На основе временного ряда строится матрица сдвигов

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_k \\ X_2 & X_3 & \dots & X_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_L & X_{L+1} & \dots & X_N \end{pmatrix}, \text{ данная матрица зависит от параметра } L - \text{ шаг.}$$

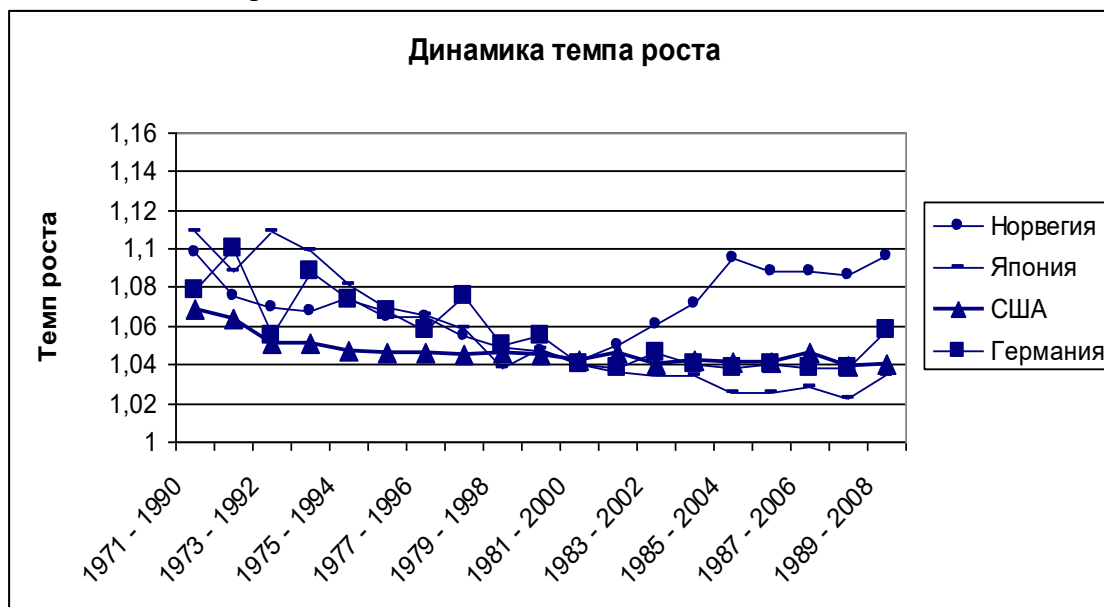
2. Находим решение матричного уравнения  $A = XX^T$ .
3. Раскладываем матрицу X в сумму матриц  $X = X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X_n$ .
4. Каждой матрице соответствует аддитивная составляющая структуры ряда.

Идея: использование максимальной длины периода, в течение которого сохраняется стабильность параметров.

Реализация:

1. Оцениваем параметры динамики ВВП на душу населения стран за некоторый период, например, с 1971 до 1991.
2. Сдвигаем ряд на год вперед (1972-1992), таким образом рассчитываем искомые параметры за плавающий период.
3. Получаем усредненную динамику целевых показателей.

Динамика темпов роста:



Динамика периодичности экономических циклов:



Темп экономического роста – стабильный показатель.

Длина циклического колебания подвержена структурным изменениям, однако в среднем сохраняется на постоянном уровне в течение 12-15 периодов.

Вывод: имеет смысл рассматривать ряд длиной не более 20 наблюдений при оценке роста и не более 15 наблюдений при оценке цикла.

**4. Оценка стабильности результатов теста.**

Оценка стабильности результатов всех тестов реализовывалась по одной и той же схеме:

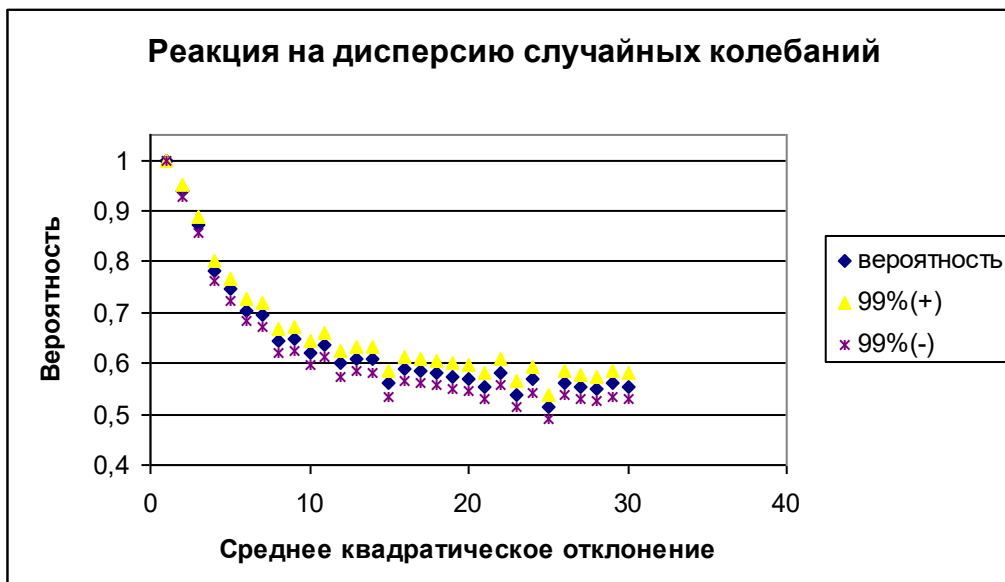
1. Устанавливается значение определенного параметра (например, дисперсии).
2. Для установленного значения параметра проводится 1000 тестов.
3. Рассчитывается частота подтверждения конвергенции.

Алгоритмы расчетов приведены в электронной версии доклада, [www.mmaest.ru](http://www.mmaest.ru).

**1.1 Стабильность результатов регрессии Барро.**

Исходные данные – 20 временных рядов, отрицательная корреляция начальных уровней и темпов роста.

Реакция на наращивание дисперсии случайных колебаний выпуска:

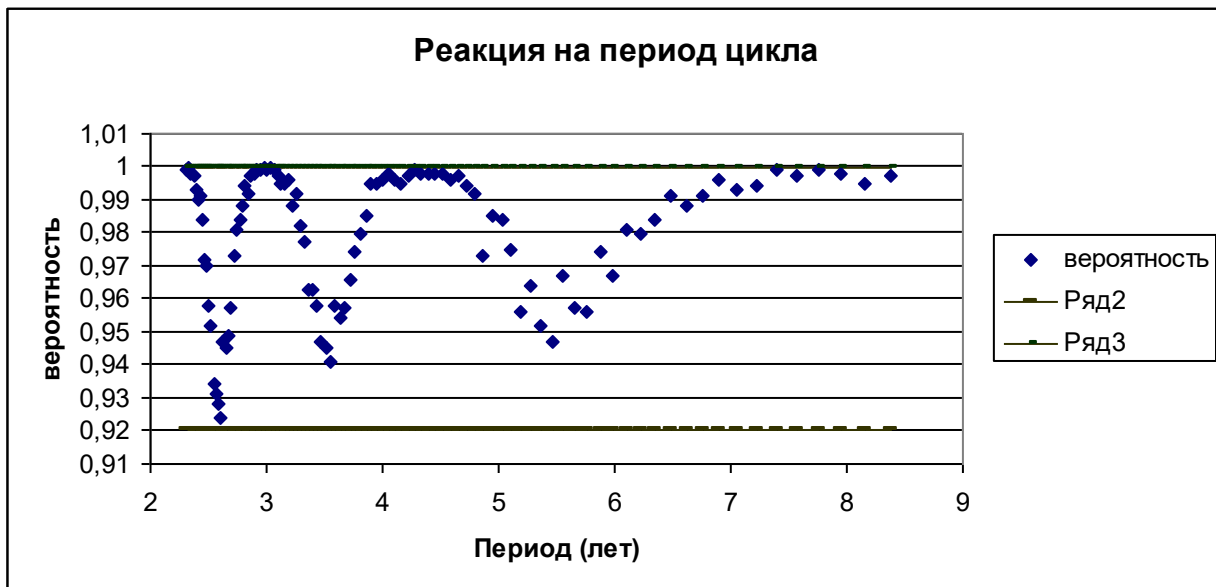


Назаров Павел, 2.12.2010.

Реакция на рост амплитуда случайных колебаний, заданных равномерно распределенной случайной величиной с нулевым матожиданием:

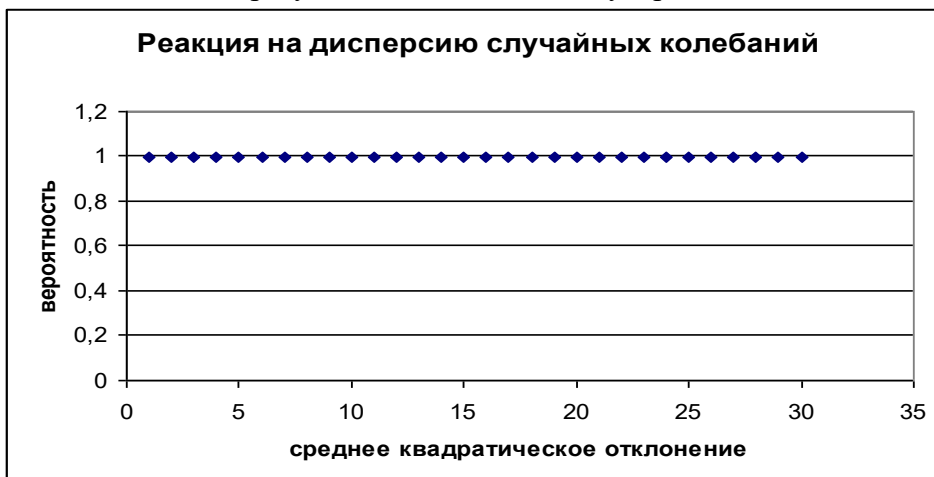


Реакция на рост периода экономических циклов:



Реакция на шоки:

### 1.2. Стабильность результатов теста Дики-Фулера.



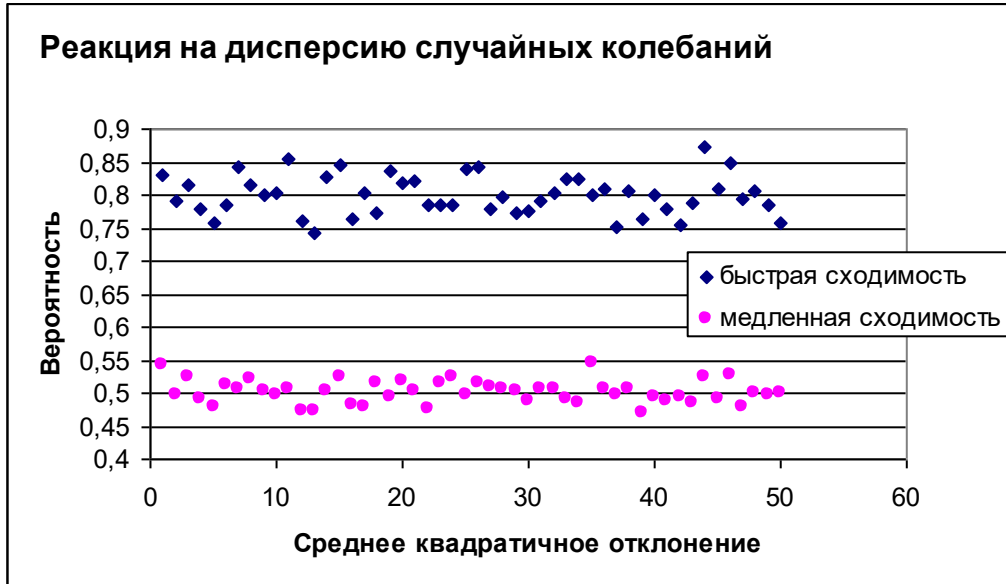
Назаров Павел, 2.12.2010.

На результаты также не влияет: амплитуда колебаний, асинхронность циклов, период циклов.  
Влияет: разница темпов роста.

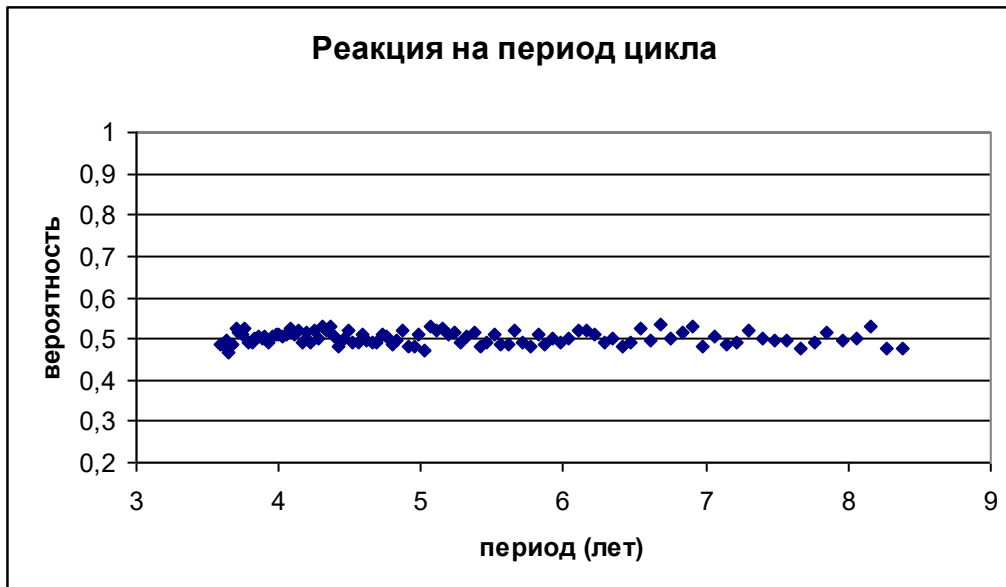
#### 1.4. Стабильность результата индексного метода.

Исходные данные: 20 временных рядов с убывающей амплитудой циклических колебаний.

Реакция на дисперсию шоков:







### **5. Переход к пространству параметров.**

1. Результаты любого теста в той или иной степени зависят от случайных факторов (выбор точки отчета, случайные колебания, шоки, асинхронные циклы).
2. Влияние зависит от специфики теста.
3. Ряд динамики ВВП на душу населения – не самый лучший объект для исследования конвергенции.
4. С определенной точностью динамику ВВП на душу населения можно описать конечным набором параметров:

$$Y_t = Y_0 g^t + \rho^t (A_1 \sin(wt) + A_2 \cos(wt)) + N(0, \sigma)$$

Как было показано выше, параметры влияют на вероятность конвергенции. Для каждой страны набор параметров  $\Omega(Y_0, g, w, \rho, \sigma)$  – некоторая точка. Если другая страна попадает в окрестность – они образуют клуб. Параметры окрестности можно оценить методом Монте-Карло.

Ещё не выполненные, но запланированные задачи:

1. Оценка стабильности результатов теста Квахы.
2. Анализ более сложных тестов.
3. Оценка параметров динамики ВВП на душу населения по реальным данным.

### **6. Список литературы.**

1. Соболев И.М., Метод Монте-Карло, М., «Наука», 1968, 64 с.
2. Кобелев Н.Б., Основы имитационного моделирования сложных экономических систем, М.: Дело, 2003, 336 с.
3. Кобелев Н.Б., Практика применения экономико-математических методов и моделей, М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000, 246 с.
4. Снетков Н.Н., Имитационное моделирование экономических процессов, М.: Изд. Центр ЕАОИ, 2008, 228 с.
5. Седелев Б.В., Методы конечных рядов Фурье и целевого синтеза как альтернативные инструменты исследования амплитудно-частотных структур временных рядов, НИЯУ-МИФИ, Москва, 2010.
6. Голядина Н.Э. Метод «Гусеница-SSA»: анализ временных рядов, Спб., - 2004.

Назаров Павел, 2.12.2010.

7. Winters *P.R.* Forecasting sales by exponentially weighted moving averages // *Management Science*. - 1960. - Vol. 6. - №3
8. Holt *C.C.* Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted moving averages // *O.N.R. Memorandum, Carnegie Inst. of Technology*. - 1957. - № 2
9. Theil *H.*, Wage *S.* Some observations on adaptive forecasting // *Management Science*. - 1964. - Vol. 10. - № 2.
10. Metropolis *N.* The beginning of the MONTE CARLO method. *Los Alamos Science Special Issue 1987*
11. *N. Metropolis and S. Ulam.* 1949. The Monte Carlo method. *Journal of the American Statistical Association* 44:335-341.
12. Dickey *D.A.* and Fuller *W.A.* «Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, / *Journal of the American Statistical Association*. — 74. — 1979. — p. 427-431.
13. *Elsner G.B., Tsonis A.A., Singular Spectrum Analysis, a new tool in time series analysis.* New York and London: Plenum Press, 1996.
14. *Economic Growth in a Cross Section of Countries: Robert J. Barro* Source: *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 106, No. 2 (May, 1991), pp. 407-443.
15. *Galton's Fallacy and Tests of the Convergence Hypothesis: Danny Quah* Source: *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 95, No. 4, Endogenous Growth (Dec., 1993), pp. 427-443.
16. *European Economic Review* 40 (1996), Regional convergence clusters across Europe  
Danny T. Quah, 1996.
17. *Twin Peaks: Growth and Convergence in Models of Distribution Dynamics* Author(s): Danny T. Quah  
Source: *The Economic Journal*, Vol. 106, No. 437 (Jul., 1996), pp. 1045-1055
18. *Journal of Economic Growth*, 1: 95-124 (March, 1996) Convergence Empirics Across Economies with (Some) Capital Mobility  
Danny T. Quah.
19. *Oxley L., Greasley D., “A Nordic convergence club”, Applied Economic Letters*, №6, 1999.
20. *Canova F., “Testing for convergence clubs in income per capita”, International Economic Review*, №1, 2004.
21. *Barro R.J, Sala-i-Martin X, “Regional Growth and Migration: A Japan-United States Comparison”, Journal of the Japanese and international economies*, №6, 1992.
22. *Sala-i-Martin X., “Regional cohesion: Evidence and theories of regional growth and convergence”, European Economic Review* 40 (1996).
23. *Bernard A.B., Durlauf S.N., “Interpreting tests of the convergence hypothesis”, Journal of Econometrics* 71 (1996).

Назаров Павел, 2.12.2010.

## 7. Алгоритмы.

Для тех, кто интересуется, в данном разделе приведены некоторые алгоритмы, с помощью которых оценивалась вероятность срабатывания теста на конвергенцию.

1. Анализ реакции результатов регрессии Барро на изменение дисперсии случайных колебаний:

```
P := for σ ∈ 1..30
  for m ∈ 1..1000
    for n ∈ 1..10
      | g_n ← 1 + n/200
      | Y0_n ← 100 - n
    for n ∈ 1..10
      for i ∈ 1..20
        Y_{n,i} ← Y0_n · (g_n)^i + 2·sin(1.25·i) + cos(1.25·i) + norm(1,0,σ)
      A ← (∑_{n=1}^{10} Y0_n) / 10
      var ← (∑_{n=1}^{10} (Y0_n - A)^2) / 10
      for n ∈ 1..10
        r_n ← ln(Y_{n,20} / Y_{n,19})
      cov ← ∑_{n=1}^{10} (r_n · Y0_n) / 10 - ∑_{n=1}^{10} Y0_n / 10 · ∑_{n=1}^{10} r_n / 10
      b_m ← cov / var
      L_m ← sign(1000 · b_m) - 1
      q_σ ← (∑_{m=1}^{1000} |L_m|) / 2000
  (q)
```

2. Анализ реакции регрессии Барро на изменение периода цикла:

```

P := for a ∈ -50.. 50
  for m ∈ 1.. 1000
    for n ∈ 1.. 10
      g_n ← 1 +  $\frac{n}{200}$ 
      Y0_n ← 100 - n
    for n ∈ 1.. 10
      for i ∈ 1.. 20
         $Y_{n,i} \leftarrow Y0_n \cdot (g_n)^i + 2 \cdot \sin\left[\left(1.25 + \frac{a}{100}\right) \cdot i\right] + \cos\left[\left(1.25 + \frac{a}{100}\right) \cdot i\right] + \text{norm}(1,0,2)$ 
       $A \leftarrow \frac{\sum_{n=1}^{10} Y0_n}{10}$ 
       $\text{var} \leftarrow \frac{\sum_{n=1}^{10} (Y0_n - A)^2}{10}$ 
      for n ∈ 1.. 10
         $r_n \leftarrow \ln\left(\frac{Y_{n,20}}{Y_{n,19}}\right)$ 
       $\text{cov} \leftarrow \sum_{n=1}^{10} \frac{(r_n \cdot Y0_n)}{10} - \sum_{n=1}^{10} \frac{Y0_n}{10} \cdot \sum_{n=1}^{10} \frac{r_n}{10}$ 
       $b_m \leftarrow \frac{\text{cov}}{\text{var}}$ 
       $L_m \leftarrow \text{sign}(1000 \cdot b_m) - 1$ 
       $q_{a+51} \leftarrow \frac{\sum_{m=1}^{1000} |L_m|}{2000}$ 
  (■)

```

4. Анализ реакции коэффициента Джини на изменение амплитуды экономических циклов:

```

P := for a ∈ -20..30
  for m ∈ 1..1000
    for i ∈ 1..20
      for j ∈ 1..15
        
$$A_{i,j} \leftarrow 1.04^i \cdot 100 \cdot \frac{\text{rnd}(1) + 9}{10} + \left[ \left( 0.99 - \frac{a}{200} \right)^i [2 \cdot \cos[(1.25) \cdot i] + \sin[(1.25) \cdot i]] \right] + \text{sign}(\text{rnd}(1) + 0.5) \cdot |\text{norm}(1, 0, 2)|$$

        for j ∈ 1..15
          
$$d_j \leftarrow \text{sort}(A^{\langle j \rangle})$$

          
$$dd_j \leftarrow \frac{d_j}{E \cdot d_j}$$

        for i ∈ 1..20
          for j ∈ 1..15
            
$$w_{i,j} \leftarrow \left| \left( dd_j^T \right)^{\langle i-1 \rangle} \right|$$

            
$$q_{j,i} \leftarrow \sum_{k=1}^i w_{k,j}$$

          P1 ← (0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.55 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95)
          P2 ← (0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.50 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1)
          for j ∈ 1..15
            
$$G_j \leftarrow P1 \cdot \text{submatrix}(q, j, j, 2, 20)^T - P2 \cdot \text{submatrix}(q, j, j, 1, 19)^T$$

          for j ∈ 1..15
            
$$T_j \leftarrow j$$

          
$$\text{cov}_m \leftarrow \sum_{n=1}^{15} \frac{(T_n \cdot G_n)}{15} - \sum_{n=1}^{15} \frac{G_n}{15} \cdot \sum_{n=1}^{15} \frac{T_n}{15}$$

          
$$L_m \leftarrow \text{sign}(1000 \cdot \text{cov}_m) - 1$$

          
$$e_{a+51} \leftarrow \frac{\sum_{m=1}^{1000} |L_m|}{2000}$$


```

(■)