

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СТРАН НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ РЕАЛЬНОГО ДЕЛОВОГО ЦИКЛА

Цель магистерской работы: оценить адекватность различных моделей теории реального делового цикла как инструмента анализа макроэкономической динамики развивающихся стран.

Задачи, решаемые для достижения цели:

- ✓ Классификация эмпирических работ по развивающимся странам и выделение неисследованных областей; (март 2008);
- ✓ Выбор моделей (с обоснованием) на основе которых будут проведены расчёты, рассмотрение теоретических особенностей этих моделей; (ноябрь 2009);
- ✓ Анализ эмпирических особенностей деловых циклов в развивающихся странах, классификация развивающихся стран с точки зрения выявленных особенностей; (май 2008);
- ✓ **Написание расчетного алгоритма для выбранных моделей и проведение непосредственных расчётов для развивающихся стран; (март 2009);**
- ✓ Сравнение результатов расчётов на основе различных моделей между собой и с расчётами по развитым странам, оценка применимости моделей RBC для развивающихся стран (март-апрель 2009).

МОДЕЛЬ SOE С УЧЕТОМ ДЕНЕГ, ИЗДЕРЖЕК НАКОПЛЕНИЯ КАПИТАЛА И СТРАНОВОГО РИСКА

Общие положения модели изложены в Главе 13 книги *McCandless (2009)*. Рассматриваемая модификация модели отличается от базовой модели *Hansen (1985)* включением денег (по принципу cash in advance), издержек накопления капитала (для различий в стоимости иностранных и внутренних заимствований) и «странового риска» (для получения устойчивых решений модели). Все переменные – на душу, обозначения стандартны. Принципиальное отличие модели от прежде рассматривавшихся – *набор условий открытой экономики*:

$$\begin{aligned}
 b_t - (1 + r_{t-1}^f) b_{t-1} &= p_t^* \hat{x}_t; \\
 r_t^f &= r^* - a \frac{b_t}{p_t^*}; \\
 p_t^* &= (1 - \gamma^*) + \gamma^* p_{t-1}^* + \varepsilon_t^*; \\
 \varepsilon_t^* &\sim N(0, \sigma_{\varepsilon^*}); \\
 e_t &= \frac{p_t}{p_t^*}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь b_t – внешняя финансовая позиция, r_t^f – ставка по внешним активам (займам), p_t^* – уровень цен зарубежом, r^* – экзогенная фиксированная процентная ставка зарубежом, e_t – обменный курс (единиц отечественной за единицу иностранной) в условиях паритета покупательной способности. «Закрытие» открытой экономики происходит благодаря второму уравнению системы (1.1), которое связывает ставку по внешним займам (активам) с внешней финансовой позицией того же периода.

Условия для домохозяйства с учетом условий для открытой экономики и ограничений cash in advance имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t, h_t, k_{t+1}, b_t, m_t\}} \mathbf{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln c_t + B h_t]; \\ & p_t c_t = m_{t-1} + (g_t - 1) m_{t-1}; \\ & c_t + \frac{m_t}{p_t} + \frac{e_t b_t}{p_t} + k_{t+1} = w_t h_t + r_t k_t + (1 - \delta) k_t - \\ & - \frac{\kappa}{2} (k_{t+1} - k_t)^2 + \frac{e_t (1 + r_{t-1}^f) b_{t-1}}{p_t} + \frac{m_{t-1} + (g_t - 1) m_{t-1}}{p_t}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

Условия для фирмы имеют традиционный вид:

$$\begin{aligned} & y_t = \lambda_t k_t^\theta h_t^{1-\theta}; \\ & w_t = (1 - \theta) \lambda_t k_t^\theta h_t^{-\theta}; \\ & r_t = \theta \lambda_t k_t^{\theta-1} h_t^{1-\theta}; \\ & \lambda_t = \gamma \lambda_{t-1} + \varepsilon_t; \\ & \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon) \end{aligned} \quad (1.3)$$

В модели (традиционно для RBC с учетом cash in advance) есть третий источник шоков – *шоки монетарной политики*:

$$\begin{aligned} & m_t = g_t m_{t-1}; \\ & g_t = \gamma_g g_{t-1} + \varepsilon_t^g; \\ & \varepsilon_t^g \sim N(0, \sigma_{\varepsilon^g}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Задача, сформулированная в первом уравнении системы (1.2) в совокупности с остальными уравнениями систем (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) составляет полную модель.

РАЗРЕШЕНИЕ МОДЕЛИ SOE С УЧЕТОМ ДЕНЕГ, ИЗДЕРЖЕК НАКОПЛЕНИЯ КАПИТАЛА И СТРАНОВОГО РИСКА

Решение модели осуществляется с помощью метода, изложенного в работах Uhlig (1995), Uhlig (1997). Он основывается на последовательном расчете устойчивых уровней модели, логлинеаризации всех уравнений в окрестности устойчивых уровней и решения полученной динамической стохастической системы (но уже линейных уравнений) методом неопределенных коэффициентов. Далее все переменные, несмотря на прежние обозначения, представляют собой отклонения логарифмов исходных переменных от устойчивых уровней:

$$\tilde{v} = \ln v - \ln \bar{v} = \ln \left(\frac{v}{\bar{v}} \right) \approx \frac{v}{\bar{v}} - 1 = \frac{v - \bar{v}}{\bar{v}}.$$

Рассматриваемую систему в логарифмах отклонений от устойчивых уровней (при условии, что они найдены), можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & 0 = \mathbf{A}x_t + \mathbf{B}x_{t-1} + \mathbf{C}y_t + \mathbf{D}z_t; \\ & 0 = \mathbf{E}_t [\mathbf{F}x_{t+1} + \mathbf{G}x_t + \mathbf{H}x_{t-1} + \mathbf{J}y_{t+1} + \mathbf{K}y_t + \mathbf{L}z_{t+1} + \mathbf{M}z_t]; \\ & z_{t+1} = \mathbf{N}z_t + \varepsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_t &= \left(\tilde{k}_{t+1} \quad \tilde{m}_t \quad \tilde{p}_t \quad \tilde{b}_t \quad \tilde{r}_r^f \right)^T; \\ y_t &= \left(\tilde{c}_t \quad \tilde{r}_t \quad \tilde{w}_t \quad \tilde{h}_t \quad \tilde{e}_t \quad \tilde{x}_t \right)^T; \\ z_t &= \left(\tilde{\lambda}_t \quad \tilde{g}_t \quad \tilde{p}_t^* \right)^T. \end{aligned}$$

Матрицы, задающие систему (1.5), определяются через найденные устойчивые уровни, которые в свою очередь полностью определяются на основе параметров модели:

$$\left(\beta \quad a \quad \kappa \quad \theta \quad \delta \quad \bar{g} \quad r^* \quad B \quad \gamma \quad \gamma_g \quad \gamma^* \right)$$

Предполагается, что решение системы (1.5) найдется в форме:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \mathbf{P}x_t + \mathbf{Q}z_t; \\ y_t &= \mathbf{R}x_t + \mathbf{S}z_t \end{aligned} \tag{1.6}$$

Подстановка уравнений системы (1.6) в систему (1.5) должна обеспечивать тождественное выполнение уравнений системы (1.5), что позволяет определить матрицы системы (1.6) (по сути, речь идет о реализации метода неопределенных коэффициентов). Можно показать, что матрица \mathbf{P} находится в результате решения квадратного матричного уравнения:

$$\left[\mathbf{F} - \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} \right] \mathbf{P}^2 - \left[\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{G} + \mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} \right] \mathbf{P} - \left[\mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{H} \right] = 0$$

Матрица \mathbf{Q} определяется несколько проще на основе соотношения:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{Q}) &= \left[\mathbf{N}^T \otimes (\mathbf{F} - \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}) + \mathbf{I}_k \otimes (\mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{G} + \mathbf{J}\mathbf{R} - \mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}) \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \text{vec} \left[(\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{N} + \mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{M} \right] \end{aligned}$$

После чего на основе найденных матриц \mathbf{P} и \mathbf{Q} легко находятся матрицы \mathbf{R} и \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= -\mathbf{C}^{-1} \left[\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B} \right]; \\ \mathbf{S} &= -\mathbf{C}^{-1} \left[\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{D} \right] \end{aligned}$$

Итерации данного метода не тривиальны, поэтому для его реализации традиционно используется какой-либо из математических языков программирования (MatLAB, Maple), что не всегда удобно и просто. Для облегчения анализа модели мной был написан алгоритм для расчета модели в более простой и удобной среде инженерных вычислений MathCAD, что само по себе является определенным достижением, потому что открытых кодов для моделей DSGE (dynamic stochastic general equilibrium) в среде MathCAD нет. Для достижения целей работы также были реализованы алгоритмы расчетов по моделям *Hansen (1985)*, *Hansen(1985) + CIA*, *Hansen(1985) + CIA + working capital*.

РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ SOE+CIA+KAC В СРЕДЕ MATHCAD

Ниже приведены наиболее интересные блоки расчетного алгоритма, которые были реализованы в среде MathCAD (фрагменты программы для рассматриваемой модели для открытой экономики).

Вставка 1. Нахождение матриц policy functions (слева) и генерация 100 реализаций модели при различных шоках (справа).

```

AA := F - J·C-1·A
BB := J·C-1·B - G + K·C-1·A
CC := K·C-1·B - H
DD := augment(stack(BB, identity(5)), stack(CC, 0·identity(5)))
EE := augment(stack(AA, 0·identity(5)), stack(0·identity(5), identity(5)))

λλ := genvals(DD, EE)    λλ1 := sort(λλ)
XX := rsort(stack(genvecs(DD, EE), λλT), rows(DD) + 1)
λλ1T = (0 0 0.61 0.95 1 1.07 1.62 1.8×10308 1.8×10308 1.8×10308)

ss := | j ← 1           = 1
      | while |λλ1j| > 1
      | j ← j + 1
      | j
λλ2 := diag(submatrix(λλ1, ss, ss + 4, 1, 1))
XX2 := submatrix(XX, 6, 10, ss, ss + 4)
P := XX2·λλ2·XX2-1

P = ( 0.894  -0 0  0.032  0
      0      1 0  0      0
     -0.43  1 0  -0.081 -0.001
      0.461  0 0  0.677  0.007
     -0.908  0 0  -1.334 -0.013 )

AA·P2 - BB·P - CC = ( 0      0      0 0 0
                       0 -1.443×10-15 0 0 0
                       0  2.22×10-15 0 0 0
                       0      0      0 0 0
                       0      0      0 0 0 )

Rww := -C-1·(A·P + B)    SS := (J·C-1·D - L)·N + K·C-1·D - M
FF := F·P + G + J·R - K·C-1·A
vecQ := ((kronecker(NT, F - J·C-1·A) + kronecker(identity(3), FF))-1·stack(SS(1), SS(2), SS(3)))
Q := augment(submatrix(vecQ, 1, 5, 1, 1), submatrix(vecQ, 6, 10, 1, 1), submatrix(vecQ, 11, 15, 1, 1))
Sxx := -C-1·(A·Q + D)

```

```

simul := for q ∈ 1..100
          ελ(q) ← momm(s, μελ, σεελ)
          εg(q) ← rnomm(s, μελ, σεg)
          εpf(q) ← momm(s, μελ, σεpf)
          for t ∈ 2..100
            λ1,q ← ελ1,q
            λt,q ← γλ·λt-1,q + ελt,q
            g1,q ← εg1,q
            gt,q ← γg·λt-1,q + εgt,q
            pf1,q ← εpf1,q
            pft,q ← γpf·λt-1,q + εpft,q
            z(1) ← ( λ1,q
                  g1,q
                  pf1,q )
            z(t) ← ( λt,q
                  gt,q
                  pft,q )
            y(1) ← ( 0
                  0
                  0
                  0
                  0 )
            x(1) ← ( 0
                  0
                  0
                  0
                  0 )
            x(t) ← P·x(t-1) + Q·z(t-1)
            y(t) ← R·x(t-1) + S·z(t-1)
            kkq,t ← x1,t
            mmq,t ← x2,t
            ppq,t ← x3,t
            bbq,t ← x4,t
            rrfq,t ← x5,t
            ccq,t ← y1,t
            rrq,t ← y2,t
            wwq,t ← y3,t
            hhq,t ← y4,t
            eeq,t ← y5,t
            xxq,t ← y6,t
            yyq,t ← z1,t + θ·kkq,t + (1 - θ)·hhq,t
            iiq,t ← 1/δ·(kkq,t - kkq,t-1)
          stack(kk, mm, pp, bb, cc, rr, ww, hh, ee, xx, rrf, yy, ii)
stack(kk, mm, pp, bb, cc, rr, ww, hh, ee, xx, rrf, yy, ii)

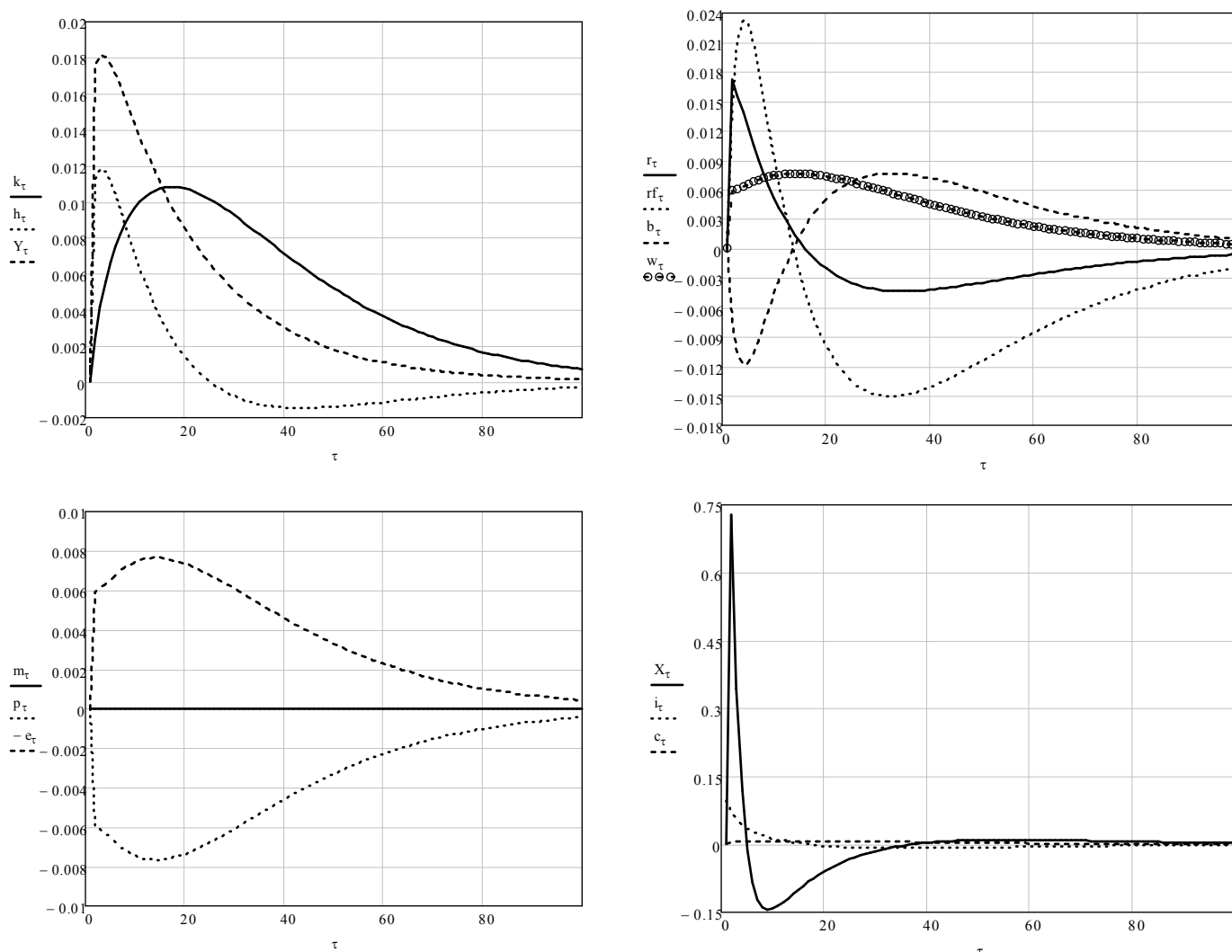
```

Источник: реализация автором

ЧИСЛОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ SOE+СIA+КАС

Практические реализации (с заданными параметрами, соответствующими нашим взглядам на реальность) моделей RBC традиционно рассматриваются в двух плоскостях: соответствие функций реакции представлениям о реакции макроэкономических параметров на различные шоки в краткосрочном периоде и соответствие средних (по множеству генераций) дисперсий моделируемых рядов реальным значениям.

График 1. Функции реакции на 1%-ный технологический шок при нулевой инфляции и 1%-ном дисконте.



Источник: реализация автором

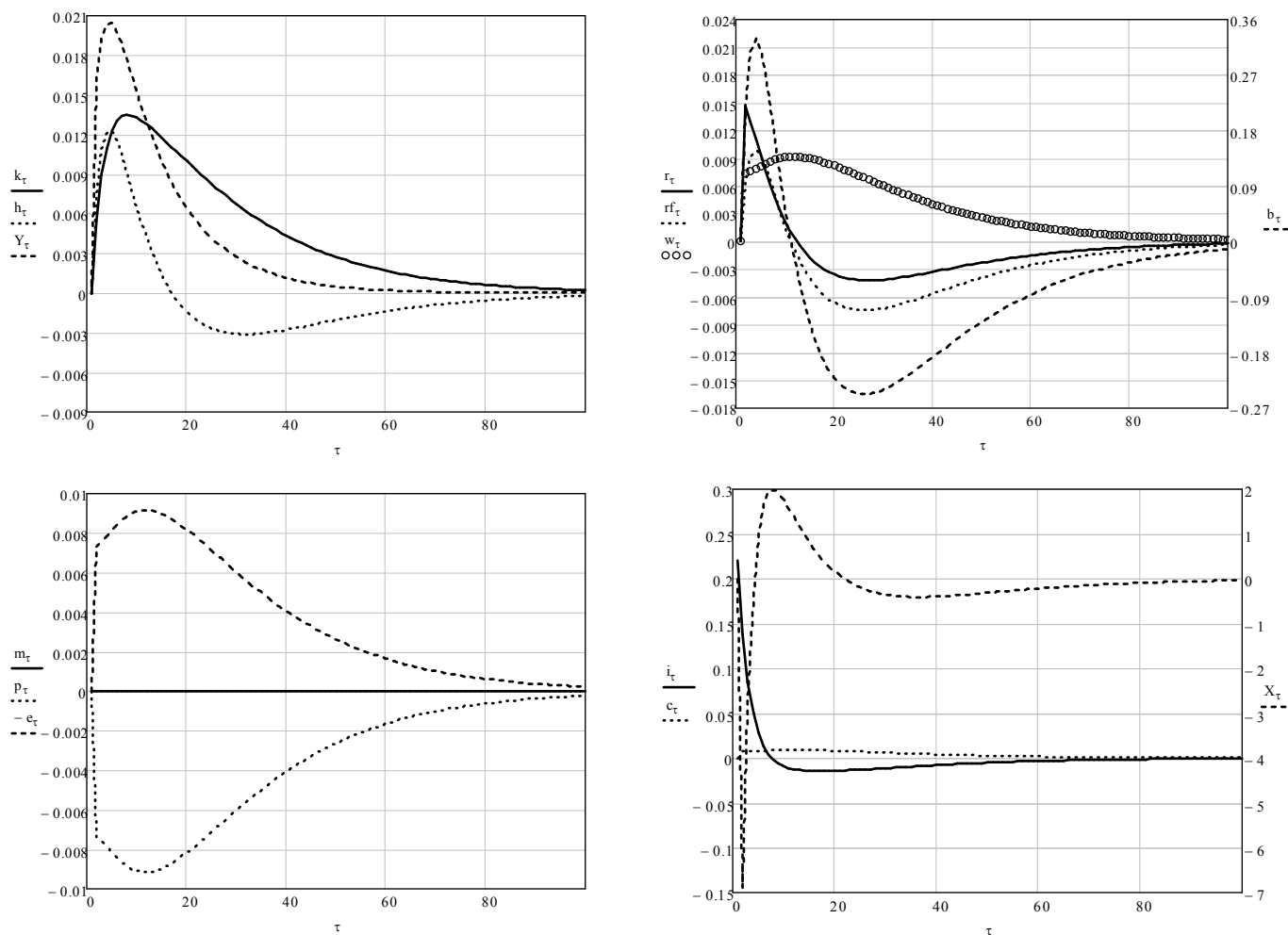
Главным негативным свойством модели является чрезмерная волатильность чистого экспорта и (как возможное следствие) отрицательная корреляция выпуска с потреблением и инвестициями. В таком виде модель ограниченно применима к анализу деловых циклов как в развитых, так и в развивающихся странах.

Таблица 1. Средние (по 100 генерациям) числовые характеристики рядов при нулевой инфляции и 1%-ном дисконте

v	\tilde{y}	\tilde{k}	\tilde{n}	\tilde{p}	\tilde{b}	\tilde{c}	\tilde{r}	\tilde{w}	\tilde{h}	\tilde{e}	\tilde{x}	\tilde{r}^f	\tilde{i}
$\sigma(v)$	1,76	1,05	9,43	9,27	8,36	0,91	1,57	0,89	2,23	9,23	622,4	14,8	32,7
$\sigma(v)/\sigma(y)$	1,00	0,60	5,34	5,25	4,73	0,52	0,89	0,50	1,26	5,23	352,6	8,40	18,51
$\rho(v, \tilde{y})$	1,00	0,11	-0,05	-0,03	0,20	-0,13	0,82	-0,05	0,87	-0,12	-0,70	-0,13	-0,62

Источник: реализация автором

График 2. Функции реакции на 1%-ный технологический шок при 15%-ной инфляции и 3%-ном дисконте.



Источник: реализация автором

Важно, однако, отметить, что, несмотря на отрицательную корреляцию выпуска с потреблением и инвестициями, при случайной реализации модели, функции реакции на 1%-ный технологический шок выглядят «правильно».

Таблица 2. Средние (по 100 генерациям) числовые характеристики рядов при 15%-ной инфляции и 3%-ном дисконте

v	\tilde{y}	\tilde{k}	\tilde{m}	\tilde{p}	\tilde{b}	\tilde{c}	\tilde{r}	\tilde{w}	\tilde{h}	\tilde{e}	\tilde{x}	\tilde{r}^f	\tilde{i}
$\sigma(v)$	2,40	2,42	8,53	8,51	154,1	0,95	1,60	0,92	3,27	8,49	4 026	4,65	81,8
$\sigma(v)/\sigma(y)$	1,00	1,00	3,54	3,53	64,02	0,39	0,67	0,38	1,36	3,53	1 672	1,93	34,0
$\rho(v, \tilde{y})$	1,00	0,37	-0,13	-0,11	0,28	-0,16	0,45	-0,16	0,90	-0,16	0,65	0,28	-0,58

Источник: реализация автором

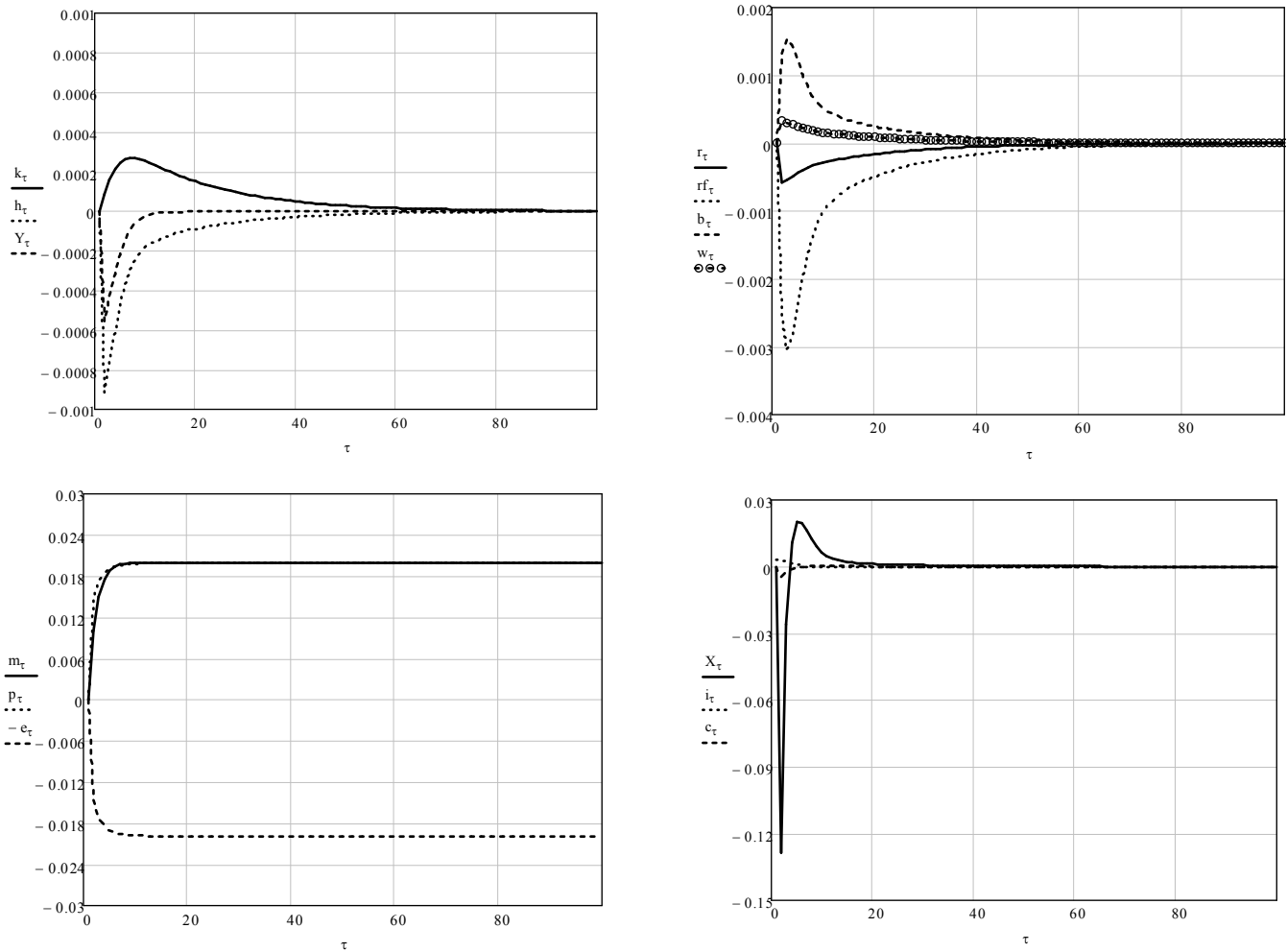
Можно априори говорить о том, что никакая калибровка (под соответствие волатильности ряда выпуска) не обеспечит нужных относительных вариаций основных макропоказателей.

Таблица 3. Индикаторы деловых циклов в группах стран

Страна	σ_y	σ_c/σ_y	σ_i/σ_y	σ_g/σ_y	σ_{nx}/σ_y
Среднее по Группе 1	3,11	1,08	3,18	1,29	4,09
Среднее по Группе 2	2,90	1,40	4,36	1,21	2,88
Среднее по Группе 3	3,02	0,96	3,73	0,95	1,97
Среднее по Группе 4	3,16	1,20	4,94	3,86	4,40

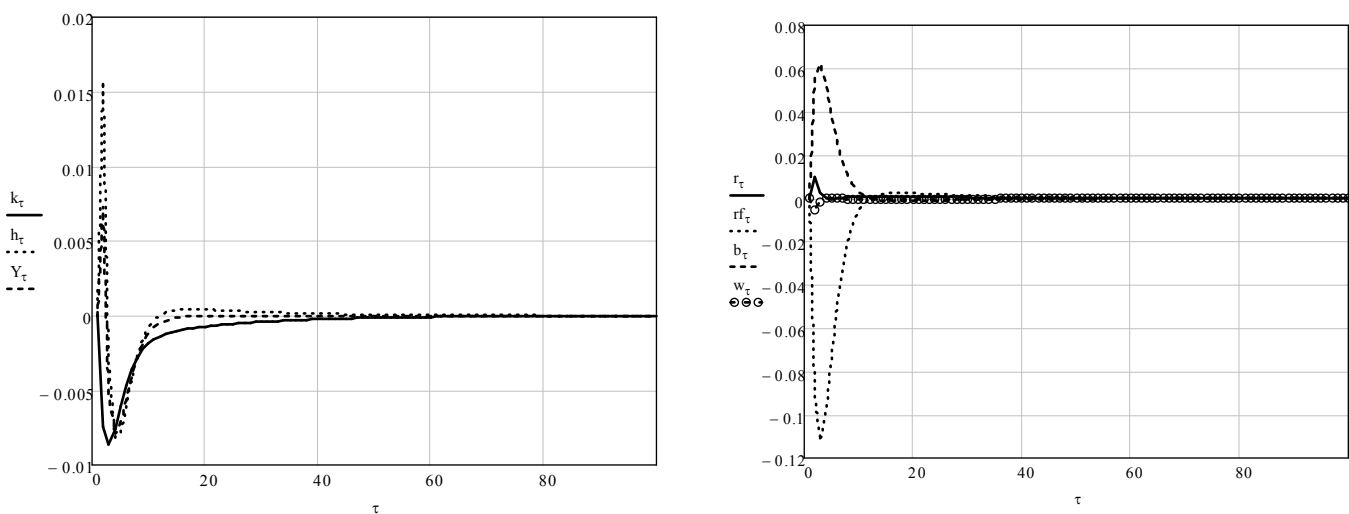
Источник: расчеты автора

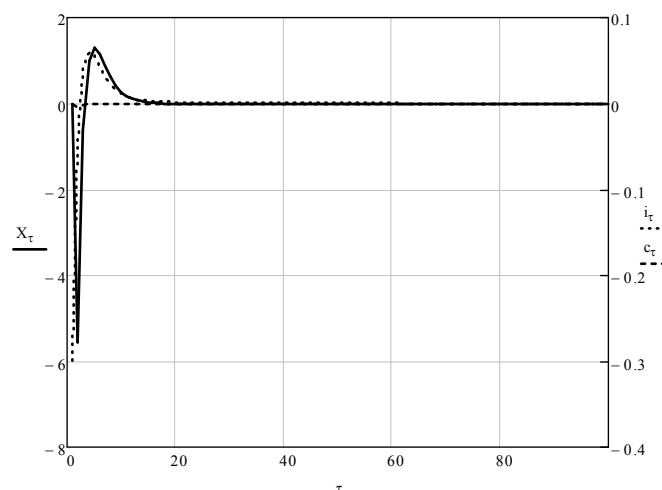
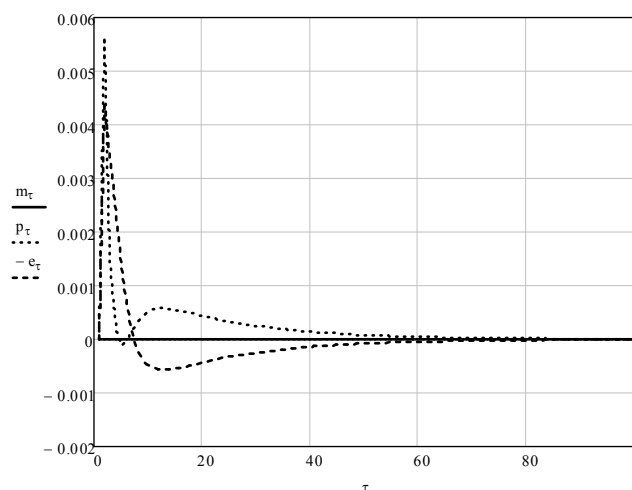
График 3. Функции реакции на 1%-ный монетарный шок при нулевой инфляции и 1%-ном дисконте.



Источник: реализация автором

График 4. Функции реакции на 1%-ный шок внешних цен при нулевой инфляции и 1%-ном дисконте.





Источник: реализация автором

ЛИТЕРАТУРА

1. McCandless G.T., The ABC's of RBC's: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models. – McGraw-Hill, 2008
2. Aguiar M., Gopinath G., Emerging Market Business Cycles: The Cycle is the Trend / Journal of Political Economy, 2007. Vol. 115. No.1. pp. 69-102
3. Arrelano C., Mendoza E., Credit Frictions and “Sudden Stops” in Small Open Economies: An Equilibrium Business Cycle Framework for Emerging Market Crises., в Dynamic Macroeconomic Analysis: Theory and Policy in General Equilibrium – Altug S., Chadha J., Nolan C. (eds.), Cambridge University Press, 2003
4. Boz E., Daude C., Durdu C.D., Emerging Market Business Cycles Revisited: Learning about the Trend / Board of Governors of The FRS. IFDP Series, DP 27. 2008
5. Christiano L.J., Eichenbaum M., Current Real Business Cycle Theories and Aggregate Labor-Market Fluctuations / The American Economic Review. 1992. Vol. 82. No. 3. pp.430-450
6. Christiano L.J., Eichenbaum M., Evans C., Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy / Journal of Political Economy. 2005. Vol. 113. No. 1. pp.1-45
7. Clarida R., Gali J., Gertler M., Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability: Evidence and Some Theory / The Quarterly Journal of Economics. 2000. Vol. 115. No. 1. pp.147-180
8. Cooley T., Hansen G., The Inflation Tax in a Real Business Cycle Models / The American Economic Review. 1989. Vol. 79. No. 4. pp.733-748
9. Garcia-Cicco J., Pancrazi R., Uribe M., Real Business Cycle in Emerging Countries? / NBER Working Paper Series. WP12629. 2006
10. Hansen G.D., Indivisible Labor and The Business Cycle / Journal of Monetary Economics. 1985. Vol.15. pp.309-327
11. Uhlig H. A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily / Federal Reserve Bank of Minneapolis Discussion Paper 101. 1995
12. <http://dqe.repec.org/> (The Quantitative Macroeconomics and Real Business Cycle Home Page)