

## Теория и практика построения производственных функций

Структура доклада:

### 0. Этапы развития фотографического искусства

#### 1. Производственная функция в экономической теории

- 1.1. Место производственной функции в неоклассической теории фирмы
- 1.2. Разнообразие функциональных форм производственных зависимостей
- 1.3. Общая задача агрегирования производственных функций

#### 2. ПФ как экономико-статистическая модель процесса производства

- 2.1. Основные проблемы спецификации и оценивания параметров производственных функций и способы решения этих проблем
- 2.2. Особенности построения ПФ по комбинированным данным временных рядов и пространственных выборок
- 2.3. Преимущества использования микроэкономических данных по сравнению с макроэкономическими динамическими рядами

#### 3. Пример построения отраслевых ПФ по микроэкономическим панельным данным

### Этапы развития фотографического искусства

1. Максимальная достоверность
2. Внедрение элементов художественности
3. Вульгарное фотоискусство (ломография и прочее)
4. Доступное фотоискусство (неоднозначный этап)

Таблица 0. Сравнительный анализ искусства фотографии и искусства построения ПФ.

Фотографическое искусство	Построение ПФ как искусство
1. Максимальная достоверность	ПФ выражает максимально точную функциональную зависимость обобщающего показателя от показателей-факторов.
2. Внедрение элементов художественности	Метод огибающих; стохастическая граничная производственная функция.
3. Вульгарное фотоискусство	Моделируют много и всё подряд.
4. Доступное фотоискусство	Моделируют много и все подряд.

*Я хочу, чтобы вы полюбили производственные функции так, как люблю их я.  
Клейнер Г.Б.*

## **1. Производственная функция в экономической теории**

### **1.1. Место производственной функции в неоклассической теории фирмы**

В неоклассической теории фирма, имеющая своей целью максимизацию прибыли, определяет величину выпуска продукции и количество используемых в производстве ресурсов, исходя из условия равенства предельного дохода и предельных издержек. Функциональная взаимосвязь между вводимой комбинацией факторов производства и максимальным объемом выпуска продукции – есть производственная функция (ПФ) фирмы.

Традиционный подход к теории фирмы состоит в том, чтобы указать производственную функцию, которая описывала бы максимально достижимый выпуск продукции при данных затратах ресурсов на существующем уровне технологических знаний. [Уолтерс]

### **1.2. Разнообразие функциональных форм производственных зависимостей**

Наиболее распространенная форма производственной зависимости в эмпирических исследованиях – это **производственная функция Кобба-Дугласа**

$$Y=A*K^{\alpha}*L^{\beta}$$

или  $Y=A*K^{\alpha}*L^{1-\alpha}$  в случае предполагаемой линейной однородности,

где  $Y$  – совокупный выпуск,

$A$  – уровень технологии,

$K$  – затраты капитала,

$L$  – затраты труда,

$\alpha$  и  $\beta$  (или  $1-\alpha$ ) – соответственно доли капитала и труда в совокупном выпуске.

Основные свойства функции Кобба-Дугласа:

1) Отдача от расширения масштабов производства равна  $\alpha + \beta$  или равна 1 в случае линейной однородности.

2) Эластичности выпуска по капиталу и труду постоянны и равны  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.

3) Эластичность замещения между факторами постоянна и равна 1.

Обобщением производственной функции Кобба-Дугласа является **функция с постоянной эластичностью замещения** или **CES-функция**

$$Y=A(b*K^{-\rho} + (1-b)*L^{-\rho})^{-1/\rho}$$

Функция CES обладает следующими свойствами:

1) Отдача от факторов производства равна  $\gamma$ .

2) Эластичность замещения  $\sigma$  постоянна и равна  $1/(1+\rho)$ .

3) ПФ CES сводится к функции Кобба-Дугласа, если величину  $\rho$  устремить к нулю.

Разработка других, «более совершенных», функциональных форм связана с попыткой отказаться от ограничительных условий производственных функций Кобба-Дугласа и CES (в частности, от условия единичной (постоянной) эластичности замещения между факторами производства). Однако парадокс заключается в том, что, освобождаясь от жестких предпосылок, наложенных на свойства упомянутых ПФ, исследователи вынуждены накладывать гораздо более жесткие и менее реалистичные предпосылки на условия производства, чтобы оценить параметры новых функциональных зависимостей.

В целом, можно разделить всю совокупность дальнейших модификаций производственных функций на две группы. Функции 1-й группы принимают **предпосылку о совершенной конкуренции на рынках факторов производства**, т.е. каждый фактор должен в точности получать свой предельный продукт, а функции 2-й группы опираются на **свойства двойственной теории**, предполагающей помимо возможности построения производственных функций еще и возможность построения функций затрат.

Например, функция переменной эластичности замещения (VES), которая относится к 1-й группе, призвана обобщить CES функцию, отказываясь от условия постоянства коэффициента эластичности замещения факторов вдоль всей изокванты производственной функции. Также снимается предпосылка, что соотношение между  $V/L$  и  $W$ , где  $V/L$  – добавленная стоимость на единицу труда, а  $W$  – уровень заработной платы, не зависит от запаса капитала. Оценить значение эластичности VES функции можно только в предположении совершенной конкуренции на рынке факторов производства, располагая данными о средней цене труда и средней цене капитала. Дальнейшее обобщение функций типа CES и VES породило множество других спецификаций производственной функции, в каждой из которых также присутствует предпосылка о совершенстве факторных рынков.

Ко 2-й группе функций относится, например, обобщенная функция Леонтьева, разработанная Эдвином Дайвертом. Она основана на двойственной теореме Шепарда (технология может быть равноценно представлена как производственной функцией, так и функцией затрат, если каждая из этих функций удовлетворяет своему набору условий) и лемме Шепарда (если функция затрат хотя бы единожды дифференцируема по ценам ресурсов, то оптимальная функция спроса на ресурс – это производная функции затрат по цене этого ресурса). Существуют и другие обобщенные модификации производственной функции, использующие двойственную теорию. Однако для всех функций этой группы существенна завязка на двойственности представления технологии – с помощью производственной функции и функции затрат.

Приятным исключением из совокупности разработанных функций является **транслогарифмическая ПФ**

$$\ln Y = \ln A + \alpha_K \ln K + \alpha_L \ln L + \frac{1}{2} B_{KK} (\ln K)^2 + B_{KL} (\ln K \ln L) + \frac{1}{2} B_{LL} (\ln L)^2.$$

Транслогарифмическая функция не обладает свойством линейной однородности и не накладывает жестких предпосылок на функционирование рынков факторов производства. Единственная сложность, с которой можно столкнуться, используя транслогарифмическую ПФ – это получение незначимых коэффициентов второго порядка ( $B_{KK}$ ,  $B_{KL}$ ,  $B_{LL}$ ) в разложении выпуска по факторам производства, поскольку требования к качеству исходных данных повышаются.

### 1.3. Общая задача агрегирования производственных функций

ПФ – это технологическое соотношение, стоящее перед фирмой. Именно предприниматель выбирает нужные пропорции и уровни объема продукции. Возникает вопрос о возможности построения производственных функций для отрасли или для промышленного или сельскохозяйственного сектора в целом. Сразу видна одна трудность: те факторы, которые считались фиксированными для отдельной фирмы, вовсе не обязательно будут фиксированными для отрасли, например, предпринимательская способность. Другие факторы, такие как количество квалифицированного труда, которые не были фиксированы для отдельной фирмы, вполне могут быть значительно ограничены для отрасли. Даже если бы у всех фирм была растущая отдача от масштаба, это еще не означало бы, что отрасль в целом также получает экономию от масштаба. Расширение отрасли часто сталкивается с менее удобными местами, ограниченным предложением сырья и т.д. [Уолтерс]

### 2. ПФ как экономико-статистическая модель процесса производства

Несмотря на сложности, связанные с достоверностью получения и дальнейшей интерпретацией агрегированных величин, число эмпирических исследований, посвященных использованию модели ПФ для экономики страны в целом или для некоторых ее отраслей, либо для совокупности регионов очень велико.

Непосредственным объектом моделирования для ПФ в этих работах являются процессы производства продукции в отрасли, регионе или в экономике страны в целом. ПФ здесь выражает статистически устойчивую, закономерную количественную зависимость между затратами ресурсов и выпуском.

В основе такого понятия ПФ лежат следующие принципы-аксиомы:

1) объем выпуска продукции, произведенной данной производственной системой за период, определяется размерами средств труда, предметов труда и собственно труда, участвующих в процессе производства в течение этого периода;

2) связь между объемом выпуска и размерами средств труда, предметов труда и собственно труда является для данной производственной системы закономерной и относительно устойчивой;

3) в ряде случаев дополнительно принимается, что в определенных границах любое независимое изменение аргументов ПФ допускает реальную интерпретацию. [Клейнер]

Как видим, положение о технической эффективности (способов производства), т.е. о производстве **максимального** количества товара при данных затратах ресурсов, на макроэкономическом уровне моделирования не фигурирует. Макроэкономическая ПФ показывает **усредненный** объем производства при известной комбинации факторов и существующем уровне развития науки и техники.

Когда исследователь работает с временными рядами агрегированных показателей выпуска и затрат ресурсов, то полученная ПФ отражает усредненную за рассматриваемый период времени зависимость.

Если в качестве исходного материала используется совокупность данных по различным предприятиям (отраслям) в один и тот же момент времени (пространственная выборка), то искомая ПФ – это усредненная для данной группы предприятий (отраслей) зависимость выпуска от затрат ресурсов.

## 2.1. Основные проблемы спецификации и оценивания параметров производственных функций и способы решения этих проблем

**Мультиколлинеарность.** Как известно, мультиколлинеарность заключается в том, что все или некоторые независимые переменные модели линейно связаны между собой. При этом можно выделить три случая:

- между переменными существует точная линейная зависимость;
- между независимыми переменными имеется тесная корреляционная связь, и наблюдения за независимыми переменными не содержат ошибок;
- между независимыми переменными существует тесная корреляционная связь, и описывающие их данные содержат ошибки.

Первые два случая – гипотетические и не соответствуют особенностям построения ПФ.

На практике предположение об отсутствии ошибок наблюдения обычно принимает вид менее строгих гипотез об их несущественности при измерении независимых переменных (по сравнению с ошибками в уравнениях, обусловленными влиянием случайных, не учтенных в модели факторов) и о незначительном влиянии ошибок измерения на оценки параметров моделей. При отсутствии мультиколлинеарности такие гипотезы могут считаться оправданными. В условиях же мультиколлинеарности высокой степени – и в этом заключается суть проблемы – ошибки наблюдения существенно сказываются на оценках параметров моделей.

Обычно предполагается, что влияние мультиколлинеарности выражается в статистической незначимости оценок параметров регрессионных моделей. Но и в том случае, если получены значимые оценки, они могут быть обусловлены не реально существующей между переменными зависимостью, а ошибками наблюдения.

Для выявления мультиколлинеарности, как правило, достаточно рассчитать коэффициенты парной корреляции между независимыми переменными.

В качестве наиболее простого метода «борьбы» с мультиколлинеарностью обычно предлагается исключение части связанных между собой независимых переменных. При построении ПФ в модель часто включается минимальное количество факторов, ни один из которых не может быть исключен, и задача заключается в том, чтобы при наличии мультиколлинеарности и ошибок наблюдения выяснить:

- 1) отражают ли оценки параметров в случае их удовлетворительности истинную зависимость между переменными или они обусловлены ошибками наблюдения;
- 2) причины неудовлетворительности оценок параметров и возможность получения удовлетворительных оценок.

Если оценки параметров ПФ по знаку и величине приближенно соответствуют качественным представлениям о зависимости между переменными, статистически значимы и имеют сравнительно узкие доверительные интервалы, их можно считать удовлетворительными. Сама по себе статистическая значимость при наиболее распространенных в экономических исследованиях ее уровнях (0,05 и 0,01) свидетельствует о том, что оценки определяются реально существующими зависимостями. Однако более убедительным доказательством надежности оценок являются их устойчивость и несущественность различий их величин, полученных для выборки в целом и отдельных ее частей.

При построении отраслевых ПФ в качестве вспомогательной информации могут быть использованы данные выборки предприятий. Как правило, они содержат мультиколлинеарность в меньшей степени, чем временные ряды, и допускают значительно более широкое применение целенаправленных методов отбора информации, в чем и заключается их главное преимущество.

**Автокорреляция.** При построении ПФ возможна как автокорреляция независимой переменной, так и автокорреляция остатков регрессии.

Для устранения или уменьшения автокорреляции ПФ рассчитывают по отклонениям от тенденций во временных рядах. Этот метод основан на предположении, что временной ряд состоит из систематической части и случайной компоненты, не содержащей автокорреляции. Другой способ устранения автокорреляции заключается во введении времени в уравнение регрессии в качестве независимой переменной. Следует учитывать, что переход к расчетам по отклонениям от тенденций может одновременно существенно снизить уровень мультиколлинеарности, тогда как введение в модель временной переменной не влияет на уровень связи между другими независимыми переменными.

Специфическим недостатком пространственных выборок можно считать **гетероскедастичность** (неравные дисперсии ошибок). Более частое присутствие гетероскедастичности в расчетах по пространственным выборкам по сравнению с временными рядами объясняется существенно большим размахом колебаний значений переменных.

**Вывод:** необходим детальный анализ как самих статистических данных, так и рассчитанных для них оценок параметров ПФ. В области исходной информации он должен включать исследование однородности данных, взаимосвязей между ними и вывод об экономической значимости и интерпретации полученных на их основе оценок параметров ПФ. Затем оценки должны быть изучены с точки зрения их статистической значимости, влияния на них включения в функции дополнительных факторов и устойчивости их по отношению к изменениям в исходной информации.

## **2.2. Особенности построения ПФ по комбинированным данным временных рядов и пространственных выборок**

Помимо использования временных рядов данных или пространственных выборок в чистом виде, возможен также вариант построения регрессионных моделей по комбинированным данным временных рядов и пространственных выборок. Различают два подхода для такого построения:

- 1) использование для расчетов данных по отдельным объектам за ряд лет;
- 2) использование для расчетов данных по отдельным объектам за один год или ряд лет и данных по совокупности этих объектов в целом (или более общей совокупности, включающей названную совокупность в качестве составной части) за ряд лет.

Сущность первого подхода заключается в том, что для получения более надежных оценок параметров и необходимого в связи с этим увеличения числа наблюдений, пространственные выборки за ряд лет объединяются и рассматриваются как единое целое.

Поскольку в общем случае число объектов существенно превышает число лет, общая совокупность наблюдений считается пространственной выборкой. Хотя в ряде исследований отмечается большая вероятность автокорреляции как полученных для отдельных объектов временных рядов, так и погрешностей, а также существование ряда других проблем, никаких

специальных путей расчета оценок параметров регрессионных моделей по таким совокупностям не существует и применяется обычный метод наименьших квадратов.

Второй подход основывается на объединении данных разных уровней агрегирования и непосредственно связан с общей проблемой использования микроэкономических данных в макроэкономических исследованиях, а также проблемой использования в регрессионных моделях внешней информации.

Основным источником осложнений при комбинированном использовании данных пространственных выборок и временных рядов является спецификация формы уравнения связи и набора включаемых в модель факторов.

### **2.3. Преимущества использования микроэкономических данных по сравнению с макроэкономическими динамическими рядами**

Необходимость обращения к информации низшего уровня агрегирования при построении модели для более высокого уровня связана с недостатками макроэкономических динамических рядов, на основе которых строятся такие модели. Преимущества пространственных выборок, объясняемые прежде всего значительно большим по сравнению с динамическими рядами числом наблюдений, можно свести к следующим основным положениям:

1) Значения переменных в пространственных выборках имеют, как правило, значительно больший размах колебаний по сравнению с макроэкономическими динамическими рядами. Изучение микроэкономических данных позволяет определить структурные зависимости в широкой области изменения объясняющих переменных и дает об изучаемом процессе более полное представление. Это свойство пространственных выборок может быть широко использовано в прогнозировании на основе макроэкономических моделей для уточнения характеристик процесса за пределами наблюдений динамического ряда.

2) Пространственные выборки содержат обычно значительно более разнообразные, по сравнению с макроэкономическими динамическими рядами, сочетания объясняющих переменных. Для ПФ, таким образом, пространственные выборки описывают более широкие области замещения факторов, что повышает надежность получаемых оценок параметров и дает более реальное представление об эластичности замещения для моделируемого объекта.

3) Уровень мультиколлинеарности данных пространственных выборок, как правило, заметно ниже, чем временных рядов, что объясняется предыдущим свойством. Однако основное преимущество выборок в решении проблемы мультиколлинеарности заключается в том, что большое число наблюдений позволяет шире применять целенаправленные методы отбора информации.

4) Исследование оценок параметров моделей, полученных по пространственным выборкам за последний ряд лет, дает наиболее надежную основу для прогнозирования будущих изменений параметров.

### 3. Пример построения отраслевых ПФ по микроэкономическим панельным данным

*Я действительно был бы очень рад начать с изучения (производственных функций) отдельных фирм, если бы в моем распоряжении были необходимые данные...Если бы нам удалось получить цифры для отдельных фирм и предприятий в пределах отдельных отраслей промышленности за определенный год, то мы смогли бы разработать производственные функции для каждой из основных отраслей промышленности, где каждая фирма служила бы объектом наблюдения.*

*Дуглас П.Х. «Существуют ли законы производства?»*

**Цель** анализа – построение производственной функции российской промышленности и производственных функций ее отдельных отраслей по микроэкономическим данным.

**Исходные данные** содержат показатели бухгалтерской отчетности предприятий всех отраслей промышленности за 2003-2004 годы.

#### **Теоретическая модель**

Данное исследование основано на том, что выпуск в целом по промышленности (равно как и в отдельных отраслях) может быть описан производственной функцией  $Y=F(K,L)$ , относительно которой предполагается:

- 1) несущественность влияния других факторов производства;
- 2) непрерывность и дважды дифференцируемость функции по аргументам  $K$  и  $L$ ;
- 3) невозможность производства при отсутствии хотя бы одного из факторов, т.е.  $F(0,L) = F(K,0) = 0$ ;
- 4) возможность и ограниченность замещения между факторами, а именно: при увеличении затрат любого из факторов и неизменности количества другого фактора выпуск продукции увеличивается; по мере увеличения затрат одного ресурса при постоянных количествах другого предельная эффективность использования первого ресурса не возрастает.

#### **Спецификация основных переменных**

В качестве оценки выпуска используется номинальная выручка от реализации товаров, продукции, работ, услуг. Капитал представлен логарифмическим средним номинальных стоимостей основных фондов предприятия на начало и конец года<sup>1</sup>, а труд – реальными затратами на оплату труда.

---

<sup>1</sup> Формула для логарифмического среднего:

$$K = \frac{K_1 - K_0}{\ln K_1 - \ln K_0},$$

где  $K_1$  – основные фонды на конец года,  
 $K_0$  – основные фонды на начало года.



## Результаты анализа

Таблица 1. Оценки эластичностей выпуска по фондам и труду для производственной функции Кобба-Дугласа (2 случая) и транслогарифмической функции производства.

	1	2	3	4	5	6		8
	$(\alpha+\beta)$ произв.		$\alpha + \beta = 1$			транслог. ПФ		VES
	$E_K$	$E_L$		$E_K$	$E_L$	$E_K$	$E_L$	
ПРОМЫШЛЕННОСТЬ В ЦЕЛОМ	0,50 (0,02)	0,49 (0,02)	-	0,51 (0,02)	0,49	0,47	0,51	+
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКА (ЭЛЕКТРОСТАНЦИИ)	0,26 (0,04)	0,73 (0,04)	+	0,26 (0,04)	0,74	0,18	---	+
ТОПЛИВНАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	0,73 (0,07)	0,21* (0,06)	+	0,80 (0,06)	0,20	---	---	+
ЧЕРНАЯ МЕТАЛЛУРГИЯ	0,34 (0,09)	0,63 (0,09)	+	0,35 (0,09)	0,65	---	---	+*
ЦВЕТНАЯ МЕТАЛЛУРГИЯ	0,61 (0,08)	0,38 (0,08)	+	0,62 (0,08)	0,38	---	---	+
ХИМИЧЕСКАЯ И НЕФТЕХИМИЧЕСКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	0,49 (0,07)	0,48 (0,07)	+	0,50 (0,07)	0,50	---	---	+
МАШИНОСТРОЕНИЕ И МЕТАЛЛООБРАБОТКА	0,44 (0,03)	0,55 (0,03)	+	0,44 (0,03)	0,56	0,36	0,55	+
ЛЕСНАЯ, ДЕРЕВООБРАБАТЫВАЮЩАЯ И ЦЕЛЛЮЛОЗНО-БУМАЖНАЯ ПРОМЫШЛ.	0,12 (0,03)	0,88 (0,03)	+	0,12 (0,03)	0,88	0,38	---	+*
ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	0,47 (0,09)	0,53 (0,09)	+	0,47 (0,09)	0,53	---	---	+
ПИЩЕВАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	0,54 (0,04)	0,44 (0,04)	-	0,54 (0,04)	0,46	0,35	---	+

Оценивание параметров функции CES проводилось по аналогии с методикой, изложенной в статье Бессонова В.А. «Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике».

Таблица 2. Эластичности выпуска по фондам и труду для производственной функции типа CES, оценка эластичности замещения между факторами производства.

	$E_K$	$E_L$	$\sigma$
ПРОМЫШЛЕННОСТЬ В ЦЕЛОМ	0,16	0,84	1,28***
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКА (ЭЛЕКТРОСТАНЦИИ)	0,24	0,76	1,69***
ТОПЛИВНАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	0,07	0,93	2*
ПИЩЕВАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	0,19	0,81	1,72*

### **Направления дальнейшей работы:**

- построение ПФ для регионов Украины с помощью панельного анализа данных и с использованием методологии стохастической границы;
- разработка собственной спецификации производственной функции.

### **Список использованной литературы:**

1. Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Макаров В.Л. Моделирование достижимого производственного потенциала и оценка эффективности производства на основе методологии стохастической границы., 2008.
2. Гладышевский. Методические основы построения отраслевых функций выпуска., 1976.
3. Гладышевский А.И. Проблемы построения ПФ по комбинированным данным временных рядов и пространственных выборок., 1979.
4. Дуглас П.Х. Существуют ли законы производства?, 1948.
5. Клейнер Г.Б. Производственные функции. – М., 1986.
6. Уолтерс А.А. Производственные функции и функции затрат: эконометрический обзор., 1963.
7. Arnold Zellner, Hang Ryu. Alternative functional forms for production, cost and returns to scale functions., 1998.
8. Jesus Felipe, Franklin M. Fisher. Aggregation in production functions: what applied economists should know., 2003.