«Математический анализ – 2»

Лектор: Кочергин А.В.
Семинаристы (список уточняется, в зависимости от количества групп): Анно Е.И., Демушкина О.И., Кочергин А.В., Любкин А.А., Ромашова В.М.
Отчѐтность: Три письменные работы и две микроконтрольные.

Тема 1. Точечные множества в m-мерном пространстве

Понятие метрики, метрического пространства. Примеры метрик в R^m. Конечномерное евклидово пространство, m-мерная окрестность, проколотая окрестность. Понятие внутренней точки множества, граничной и внешней точек, границы множества. Понятие изолированной точки. Понятие открытого множества. Понятие ограниченного множества. Понятие ограниченной последовательности точек m - мерного пространства. Понятие сходящейся последовательности точек m - мерного пространства. Связь с покоординатной сходимостью. Теорема Больцано - Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности. Два определения предельной точки множества (на языке окрестностей и последовательностей), их эквивалентность. Понятие замкнутого множества. Понятие пути, линейно связного множества.

Тема 2. Функции нескольких переменных, их непрерывность

Понятие функции нескольких переменных. Область определения и область изменения функции. Множество уровня. Бесконечно малые функции, их связь с понятием предела. Ограниченные функции. Теоремы о пределах. Понятие непрерывной функции. Два определения непрерывности (по Коши и по Гейне), их эквивалентность. Свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Теорема Больцано - Коши.

Тема 3. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Первые частные производные. Понятие дифференцируемой функции нескольких переменных, понятие дифференциала. Две формы записи нелинейного слагаемого. Связь дифференцируемости с непрерывностью. Необходимое условие дифференцируемости, единственность дифференциала. Достаточное условие дифференцируемости. Производная по направлению и вдоль вектора. Градиент. Формулы производной по направлению и вдоль вектора для дифференцируемой функции. Производная по направлению, касательному к линии уровня. Свойства градиента. Теорема о дифференцируемости сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Касательная плоскость к графику функции нескольких переменных, геометрический смысл дифференциала. Понятие частной производной порядка выше первого. Достаточные условия равенства смешанных производных. Полные дифференциалы высших порядков. Понятие n раз дифференцируемой функции в точке. Достаточное условие того, что функция n раз дифференцируема в точке. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа (без доказательства).

Тема 4. Классические методы оптимизации

Понятие локального экстремума. Необходимое условие локального абсолютного экстремума первого порядка. Квадратичные формы: характерные графики. Необходимое условие экстремума второго порядка. Достаточное условие (второго порядка) локального абсолютного экстремума и его отсутствия. Постановка задачи условной оптимизации с одним ограничением. Функция Лагранжа и множители Лагранжа для задачи на условный экстремум. Необходимое условие условного экстремума (случай одного уравнения связи). Исследование с помощью линий уровня и градиентов. Простой вариант достаточного условия условного экстремума. Достаточное условие условного экстремума, использующее дифференциал уравнения связи (случай одного уравнения). Задача глобальной оптимизации. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа.

Тема 5. Теорема о неявной функции (понятия и формулировки)

Понятие функции, заданной неявно. Примеры однозначного и неоднозначного локального решения уравнения $f(x,y)=0$. Теорема о неявной функции для случая одного уравнения с двумя переменными (идея доказательства). Геометрическая и аналитическая интерпретации теоремы о неявной функции. Касательная к линии уровня функции. Линеаризация уравнения, приближенное решение нелинейного уравнения. Вычисление дифференциала неявной функции.

Тема 6. Неопределенный интеграл.

Лемма о функциях, имеющих одинаковую производную на интервале. Понятие первообразной функции. Понятие неопределенного интеграла, его свойства. Таблица интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле и интегрирование по частям. Теорема о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших. Интегрирование рациональной дроби. Интегрирование тригонометрических выражений, универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование простейших иррациональных функций.

Тема 7. Определенный интеграл

Понятие интегральной суммы. Понятие определенного интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости функции по Риману. Понятие верхней и нижней сумм Дарбу. Простейшие свойства сумм Дарбу. Формулировка критерия интегрируемости. Примеры его применения. Понятие равномерно непрерывной функции. Формулировка теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции. Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость функции, монотонной на отрезке. Интегрируемость ограниченной функции, имеющей конечное число точек разрыва. Свойства определенного интеграла, связанные с подынтегральной функцией, с отрезком интегрирования и выражаемые неравенствами. Теоремы о среднем значении. Непрерывная зависимость определенного интеграла от переменного верхнего предела. Производная интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле, ее геометрический смысл. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычисление площадей и длин дуг кривых.

Тема 8. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы первого и второго рода. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы. Примеры. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов. Эталонные интегралы.

Тема 9. Кратные интегралы

Определение двойного интеграла по прямоугольной области. Определение двойного интеграла по произвольной области. Необходимое условие интегрируемости. Свойства двойного интеграла, связанные с подынтегральной функцией и с областью интегрирования. Формулировка критерия интегрируемости. Понятие кратного интеграла. Переход к повторному интегралу (идея доказательства). Замена переменных в двойном и тройном интеграле (формулировка). Геометрический смысл. Переход к полярным координатам. Понятие несобственного двойного интеграла. Критерий сходимости несобственного двойного интеграла. Вычисление интеграла Пуассона с помощью двойного интеграла. Вычисление площадей и объемов с помощью двойных интегралов.

Тема 10. Элементы теории дифференциальных уравнений

Понятие дифференциального уравнения. Примеры простейших дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными и линейных. Примеры линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1, 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Кочергин А.В., Кострикин И.А. Методические материалы по курсу математического анализа (Интеграл и функции нескольких переменных). – М.: Экономический ф-т МГУ, ТЕИС, 2009
3. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое. – М.: Высшая Школа, 2000.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: АСТ: Астрель, 2010.
5. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. – М.: Издательство МЦНМО, 2012.

6. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3-х т. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: МЦНМО, 2017.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989 и последующие издания.