Моделирование и предсказание изменчивых корреляций с помощью DCC моделей

Лунева Ирина

Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Мотивация

- На прошлой лекции мы научились моделировать динамику доходности одного актива
- На практике часто полезно анализировать совместную динамику нескольких активов. Например, при построении оптимального портфеля
- DCC-модель - один из устоявшихся подходов к решению проблемы

Обозначения

- Пусть мы анализируем вектор из n доходностей: $r_{1t}, r_{2t}, ..., r_{nt}$
- Компактная запись:

$$r_t = \begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ \vdots \\ r_{nt} \end{bmatrix}$$

Большинство многомерных моделей может быть представлено как

$$r_t = \Sigma_t^{1/2} z_t, z_t \sim D(\mathbf{0}, I_n)$$

где

- Σ_t - симметричная положительно определенная матрица размера n*n
- z_t - n-мерный случайный шок с распределением D с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей
- Многомерные модели различаются в спецификациях "ковариационного уравнения" для Σ_t
- Σ_t имеет $\frac{(n+1)n}{2}$ степеней свободы

Моделирование двумерных рядов

Случай $n = 2$

$$\begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{1t}^2 & \sigma_{12t} \\ \sigma_{12t} & \sigma_{2t}^2 \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix}$$

Проблемы

- $\frac{(n+1)n}{2}$ степеней свободы ковариационной матрицы, меняющихся во времени, тяжело замоделировать даже для небольших n.
- Число шагов для оценки функции правдоподобия стремительно растет с ростом числа активов.
- Нужно удостовериться, что Σ_t положительно определена для всех t.

Необходима модель **с небольшими затратами** времени и малым числом параметров, **реалистично** предсказывающая динамику волатильности.

DCC модель

- Engle (2002): Dynamic Conditional Correlation model
- Ковариационная матрица Σ_t может быть представлена в виде:

$$\Sigma_t = D_t R_t D_t,$$

где
D_t - матрица, по диагонали которой расположены стандартные отклонения (n степеней свободы),
R_t - условная корреляционная матрица ($\frac{(n-1)n}{2}$ степеней свободы)

Основная идея - **раздельное моделирование** волатильностей и корреляций.
D_t - с помощью GARCH, R_t - с помощью динамических уравнений.

Двумерный случай

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1t}^2 & \sigma_{12t} \\ \sigma_{12t} & \sigma_{2t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1t} & 0 \\ 0 & \sigma_{2t} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12t} \\ \rho_{12t} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_{1t} & 0 \\ 0 & \sigma_{2t} \end{bmatrix}$$

DCC - хитрость 1

- Нужно обеспечить, чтобы R_t была действительно корреляционной матрицей.
- Будем моделировать не сразу R_t, а **псевдокорреляционную матрицу** Q_t, затем переходя к R_t:

$$R_t = diag(Q_t)^{-0,5} * Q_t * diag(Q_t)^{-0,5}$$

- Двумерный случай:

$$R_t = \begin{bmatrix} q_{11t}^{-0,5} & 0 \\ 0 & q_{22t}^{-0,5} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_{11t} & q_{12t} \\ q_{12t} & q_{22t} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_{11t}^{-0,5} & 0 \\ 0 & q_{22t}^{-0,5} \end{bmatrix}$$

DCC - хитрость 2

- Моделируем Q_t с помощью спецификации типа GARCH:
$$Q_t = C + \alpha \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-1}^{'} + \beta Q_{t-1},$$
где ϵ_t - вектор стандартизированных доходностей $\epsilon_{it} = \frac{r_{it}}{\sigma_{it}}$
- Предполагаем, что динамика псевокорреляционной матрицы зависит от двух параметров α, β. На практике такая сильная аппроксимация работает достаточно хорошо.
- Параметров все еще много: $2 + \frac{n(n-1)}{2}$!
- Оценка C все еще затратна для больших n

DCC - хитрость 3

- Используем **корреляционное таргетирование** для моделирования C.
- Можно показать, что $C = \bar{Q}(1-\alpha-\beta)$, где $\bar{Q}$ - безусловная псевдокорреляционная матрица.
- Заменяем $\bar{Q}$ подходящей оценкой.

$$Q_t = \hat{Q}(1-\alpha-\beta) + \alpha\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}^{'} + \beta Q_{t-1},$$

где $\hat{Q} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t\epsilon_t^{'}$.
В результате остаются только два параметра: α и β.

Оценка DCC

2 этапа:

1. Оценка волатильности D_t: оценка n независимых GARCH-моделей (оценка волатильности каждого актива отдельно).
2. Оценка корреляций R_t с помощью метода максимального правдоподобия:

$$L_T^{DCC}(\theta) = -\frac{1}{2}\Sigma(log|R_t| + \hat{\epsilon}_t R_t^{-1} \hat{\epsilon}_t{}')$$

$$\Sigma_t = D_t R_t D_t$$

Расширения DCC модели

- ”Исправленная” DCC - cDCC
- Асимметричная DCC
- Сокращенная DCC

cDCC - исправление ошибок

- Оригинальная версия DCC содержала недочеты, приводящие к небольшому смещению
- Исправление - Aielli (2006)

$$Q_t = \hat{Q}(1-\alpha-\beta) + \alpha\epsilon^*_{t-1}\epsilon^{*'}_{t-1} + \beta Q_{t-1}$$

$$R_t = diag(Q_t)^{-0,5} * Q_t * diag(Q_t)^{-0,5},$$

$\epsilon^*_t = Q^*_t\epsilon_t$, где $Q^*_t = diag(\sqrt{q_{11t}}, \sqrt{q_{22t}})$
$\hat{Q} = T^{-1}\Sigma_t\epsilon^*_t\epsilon^{*'}_t$

Асимметричная DCC

- Cappiello, Engle and Sheppard (2004)
- Моделирование асимметричной динамики корреляций. В частности, негативные доходности могут оказывать более сильное влияние на будущую условную корреляцию

$$Q_t = ((1-\alpha-\beta)\hat{Q} - \gamma\hat{N}) + \alpha\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}^{'} + \gamma n_{it-1}n_{it-1}^{'} + \beta Q_{t-1}$$

$$R_t = diag(Q_t)^{-0,5} * Q_t * diag(Q_t)^{-0,5},$$

где

$n_{it} = \epsilon_t * I(\epsilon_t < 0)$

$\hat{Q} = n^{-1}\Sigma_t\epsilon_t\epsilon_t^{'}$ и $\hat{N} = T^{-1}\Sigma_t n_t n_t^{'}$

Сокращенная DCC

- Для большого числа активов (n > 100) точность оценки $\hat{Q}$ низкая
- Engle, Ledoit, Wolf (2016) предлагают заменить $\hat{Q}$ сокращенной оценкой корреляционной матрицы:

$$\bar{Q} = \lambda_1 I + \lambda_2 \frac{1}{n} \sum_n \epsilon_t \epsilon_t^{'},$$

где
I - единичная матрица,
формулы для λ_1 и λ_2 - см. Engle, Ledoit, Wolf (2016).

Эмпирический пример: S&P 500

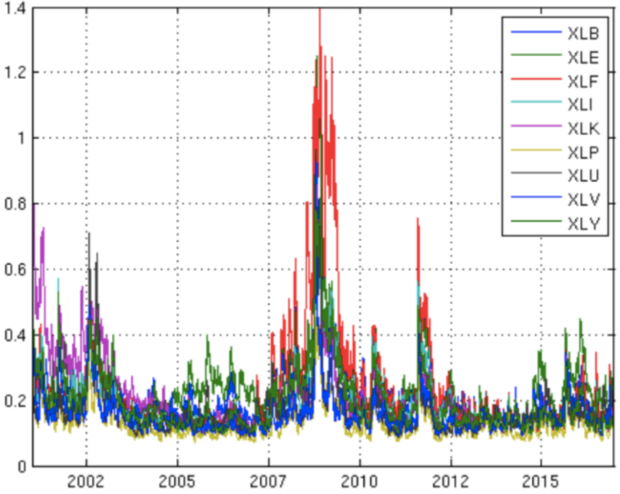
Динамика цен

Эмпирический пример: S&P 500

Оценка параметров

	оценка	стандартная ошибка
α	0.017	0.005
β	0.974	0.008

Условная волатильность с помощью DCC



Эмпирический пример: S&P 500

Условная корреляция с финансовым сектором