

# ПРОЕКТ

## макета учебной дисциплины

«Дифференциальные уравнения»

«*Differential equations*»

**Кафедра** Математических методов анализа экономики. Ауд. 354-360, тел. 939-38-02

Сайт: <http://www.econ.msu.ru/departments/mmae/>.

e-mail: [mmae@econ.msu.ru](mailto:mmae@econ.msu.ru)

**Статус дисциплины:** *по выбору*, читается на программе бакалавров по направлению «Экономика»

### Авторы проекта:

1. Кострикин Игорь Алексеевич, e-mail: [iakostrikin@mail.ru](mailto:iakostrikin@mail.ru)
2. Кочергин Андрей Васильевич, e-mail: [avk@econ.msu.ru](mailto:avk@econ.msu.ru)
3. Черемных Юрий Николаевич.

### 1. Перечень планируемых результатов обучения

Изучение данной дисциплины способствует в дальнейшем освоению фундаментальных знаний, прикладных экономических навыков и получению следующих

Общекультурных компетенций (ОК):

- способность использовать фундаментальные экономические знания в различных сферах деятельности (ОК-3);
- способность к самоорганизации и активному самообразованию (ОК-7).

Общепрофессиональных компетенций (ОПК):

- способностью выбирать и комбинировать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы (ОПК-3);

Профессиональных компетенций (ПК):

- способность на основе описания экономических, исторических, политических, экологических, демографических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты и делать прогнозы (ПК-4);
- способность использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические и программные средства и информационные технологии (ПК-8);
- способность использовать в преподавании экономических дисциплин в образовательных организациях различного уровня существующие программы и учебно-методические материалы (ПК-12).

#### 1.1 В результате освоения дисциплины студент должен:

##### *Знать:*

1. основные понятия, проблемы и положения теории метрических пространств, описанные в программе курса;
2. основные понятия, проблемы и положения теории дифференциальных уравнений, описанные в программе курса;
3. примеры проблем в области социально-экономической динамики, решаемых методами дифференциальных уравнений.

**Уметь:**

1. обосновывать сходимость последовательностей в функциональных метрических пространствах;
2. обосновывать полноту метрических пространств;
3. обосновывать сжимаемость отображений;
4. применять сжимающие отображения для поиска приближенных решений различного рода задач;
5. формулировать основные задачи теории дифференциальных уравнений;
6. решать дифференциальные уравнения и системы типов, указанных в программе;
7. исследовать на устойчивость решения дифференциальных уравнений и систем;
8. численно решать системы дифференциальных уравнений на компьютере;
9. давать содержательную интерпретацию полученных результатов при решении дифференциальных уравнений и систем, описывающих поведение экономических объектов;
10. делать логически обоснованные непротиворечивые выводы на основе изучаемой теории.

**Владеть:**

1. навыками логических построений в области теории метрических пространств;
  2. основными методами исследования метрических пространств;
  3. навыками логических построений в области теории дифференциальных уравнений;
  4. основными методами решения дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений и их исследования;
  5. навыками экономико-математического моделирования в области экономической динамики.
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП) подготовки бакалавра.

***Для успешного овладения курсом студентам необходимы знания по следующим дисциплинам: математический анализ-1, математический анализ-2, математический анализ-3, линейная алгебра-1 и линейная алгебра-2.***

Освоение данной дисциплины нужно для эффективного изучения продвинутых курсов: микроэкономики и макроэкономики, спецкурсов по методам оптимальных решений и эконометрики-3. Освоение этого курса необходимо для изучения современной литературы по экономической динамике.

**Преподавание дисциплины «Дифференциальные уравнения» имеет цели:**

- ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения задач экономической и социальной динамики;
- привить студентам умение самостоятельно изучать литературу, в которой используется аппарат дифференциальных уравнений для описания и анализа экономических процессов;
- развить логическое и алгоритмическое мышление;
- развить у студентов навыки абстрактного мышления и умение строго излагать свои мысли;
- выработать у студентов навыки математического моделирования теоретических и прикладных задач, связанных с вопросами экономической динамики.

**Семестр:** четвёртый семестр.

**3. Объем дисциплины:** 4 зачетных единиц (144 академических часа, в том числе: лекции 30 часа, семинары 30 часов, контактные часы 10 часов, контрольные работы 4 часа, самостоятельная работа 70 часов)

#### **4. Структура и содержание дисциплины**

##### **Тема 1. Элементы теории метрических пространств**

Метрика и расстояние, метрическое пространство. Нормированные пространства. Понятие шара и  $\varepsilon$ -окрестности. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве. Критерий Коши. Понятие полного метрического пространства. Полнота пространства  $C[a, b]$ . Внутренняя, предельная и граничная точки множества в метрическом пространстве. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Полнота замкнутого множества полного метрического пространства. Теорема о дополнении в метрическом пространстве. Отображения метрических пространств. Непрерывные отображения. Сжимающее и квазисжимающее отображения и их непрерывность. Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения. Применения этой теоремы.

##### **Тема 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие решения (частного и общего). Вектор начальных значений. Начальное условие. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Лемма об эквивалентности задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка и интегрального уравнения. Теорема Пикара. Понятие о численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Эйлера и идея метода Рунге-Кутты). Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним уравнения. Линейные уравнения, уравнение Бернулли.

##### **Тема 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков и системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. линейные уравнения и системы**

Формулировка теоремы Пикара для систем дифференциальных уравнений первого порядка. Связь между дифференциальным уравнением порядка  $n$  и системой дифференциальных уравнений первого порядка. Понятие линейной зависимости и линейной независимости набора функций в промежутке. Теорема о структуре общего решения однородного и неоднородного линейного дифференциального уравнения порядка  $n$ . Фундаментальный набор решений. Теоремы об определителе Вронского для набора решений однородного линейного дифференциального уравнения порядка  $n$ . Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частных решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений порядка  $n$ . Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов. Фундаментальный набор решений однородной системы уравнений первого порядка, теорема о структуре общего решения.

##### **Тема 4. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами**

Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов. Структура общего решения линейной однородной системы уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

## **Тема 5. Устойчивость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. экономические приложения**

Фазовые траектории. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Сведение к исследованию положения равновесия. Теоремы Ляпунова. Устойчивость решений линейных систем. Формулировка теорем об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Доказательство для случая простых вещественных характеристических корней. Экономические приложения (модель динамики рыночных цен).

## **Тема 6. Обыкновенные разностные уравнения**

Разностные уравнения, две формы записи. Задача Коши. Формулировка теоремы о структуре общего решения линейного разностного уравнения порядка  $n$ . Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

## **Тема 7. Элементы вариационного исчисления**

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы**

#### **Литература**

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. УРСС, 2000.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: УРСС, 2013.
4. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2014.
5. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. Изд.4. Едиториал УРСС, 2006.

### **6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации по дисциплине**

В начале каждого семестра студенты получают список теоретических вопросов и обширный набор образцов практических и теоретических заданий, пополняемый в течение семестра Эти материалы служат основой для самостоятельной работы и подготовки к практическим и теоретическим письменным работам.

*б) типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций*

#### **Образцы вопросов по темам:**

**элементы теории метрических пространств, теоремы о неподвижной точке.**

1. Выясните, определяют ли метрику на плоскости указанные функции, и если да, то изобразите в полученном метрическом пространстве шар радиуса  $b$  с центром в начале координат:

$$\rho(M_1, M_2) = \max(3|x_1 - x_2|, 2|y_1 - y_2|)$$

2. Задаёт ли метрику на множестве  $C^1[a, b]$  функция  $\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  ?

3. Являются ли открытыми следующие подмножества пространства  $C[-1, 1]$  непрерывных функций с метрикой равномерной сходимости.

Являются ли эти подмножества замкнутыми? Если нет, то каковы их замыкания?

1) подмножество всех многочленов;

2) подмножество всех дифференцируемых функций.

4. Являются ли открытыми следующие подмножества пространства  $C[-1, 1]$  непрерывных функций с метрикой равномерной сходимости. Являются ли эти подмножества замкнутыми? Если нет, то каковы их замыкания?
  - 1) множество всех функций, для которых  $f(x) \leq -x$  ;
  - 2) множество всех функций, для которых  $f'(x) > 0$ .
5. Является ли непрерывным отображение  $f(x) \rightarrow f^2(x)$  в себя пространства  $C[a, b]$  непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций с метрикой равномерной сходимости? Является ли это отображение сжимающим? Является ли оно сжимающим на каком-нибудь подпространстве этого пространства? Ответ полностью обоснуйте.
6. Укажите способ решения уравнения  $x - \cos x = 0$  на отрезке  $[0, \pi]$ , основанный на методе последовательных приближений, использующем теорему о сжимающем отображении. Прделайте две итерации, начиная с точки  $x_0 = \pi / 2$ .
7. Напишите интегральное уравнение, решение которого эквивалентно решению задачи Коши  $y' = x^2 y, y(1) = 3$ . Начиная с функции  $\varphi_0 \equiv 3$ , проделайте две итерации метода последовательных приближений.
8.  $x \rightarrow Ax + b$  является сжимающим. Здесь  $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 3/5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
9. Дайте определение сжимающего и квазисжимающего отображений. Выясните характер отображения  $x \rightarrow e^{-x}$  на каждом из отрезков  $[0, 1]$  и  $[1/2, 1]$ . Можно ли применять метод последовательных приближений поиска неподвижной точки этого отображения, начиная с произвольной точки отрезка  $[0, 1]$  ?

Образцы заданий для контрольной работы №2 и экзамена.

1. Сформулируйте задачу Коши для системы из двух уравнений первого порядка. Сформулируйте теорему существования и единственности. (2)
2. Что такое функция Ляпунова. Сформулируйте теорему об устойчивости по Ляпунову, использующую функцию Ляпунова, для неподвижной точки. (2)
3. Сформулируйте и докажете теорему о структуре решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. (4)
4. Решите уравнение:  $y'' + y' - 6y = \frac{1}{e^x + 1}$ .
5. Найти фундаментальный набор решений системы  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = -3x - y \end{cases}$  :
6. Найти все положения равновесия системы  $\begin{cases} \dot{x} = y - x - 1 \\ \dot{y} = \ln(x^2 - y) \end{cases}$ , исследовать их на устойчивость. Нарисовать схематично фазовые картинки в окрестностях положения равновесия. Сформулировать необходимые теоремы.
7. Сформулировать и доказать теорему о размерности пространства решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка (свести к теореме существования и единственности).
8. Описать и обосновать метод вариации постоянных для дифференциального уравнения третьего порядка.
9. Показать, что однородная система трех линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, не имеющая положений равновесия, кроме начала координат, имеет хотя бы одну траекторию, лежащую на прямой.

10. Написать линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами наименьшего порядка, решениями которого являются функции  $2e^x \cos 2x - 1, -e^x \sin 2x - 1, \sin x - 1$ . Обосновать.
11. Показать, пользуясь определением, что решение  $x = e^t, y = e^t$  системы  $\dot{x} = y, \dot{y} = x$  не является устойчивым по Ляпунову.

7. **Итоговая сумма** баллов для каждого студента складывается из результатов по следующим видам работ:

- две письменные контрольные работы;
- письменные теоретические микро-контрольные работы;
- выполнение домашней работы в среде Mathcad (или иной)???
- письменный экзамен.