

## ФИНАНСОВАЯ ЭКОНОМИКА

Д. А. Герцекович<sup>1</sup>,  
Иркутский ГУ (Иркутск, Россия)

### ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ПО КОМПЛЕКСУ ЭФФЕКТИВНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

*Приводится схема предварительной обработки исторических данных. Излагается алгоритм оптимизации длины исторической выборки. По прогностическим моделям оптимальной сложности оцениваются ожидаемые доходности и риски на основе принципа внешнего дополнения и принципа комбинирования решений. Предложены новый способ генерации эффективных портфелей с учетом кросс-корреляционных связей и алгоритм формирования инвестиционного портфеля оптимальной сложности на основе принципа комбинирования решений.*

**Ключевые слова:** модель Марковица, оптимальный портфель, доходность, риск, принцип комбинирования решений, принцип внешнего дополнения, оптимальная длина исторической выборки.

### CONSTRUCTION OF OPTIMAL INVESTMENT PORTFOLIO BASED ON EFFICIENT PORTFOLIOS COMPLEX

*The paper presents the scheme for preliminary processing of historical records, provides the algorithm for historical sample length optimization, estimates expected returns and risks by prognostic models of optimal complexity, drawing on the principle of integrated decisions. The author offers a new method to generate efficient portfolios taking into account cross correlation links and construction of investment portfolio of optimal complexity based on the principle of integrated decisions.*

**Key words:** Markowitz model, optimal portfolio, return, risk, principle of integrated decisions, principle of external addition, optimal length of historical selection.

Теория инвестиций с середины прошлого столетия претерпела значительные изменения.

- В первую очередь, это расширение списка активов. К общепринятым ранее финансовым инструментам, таким как: акции, об-

---

<sup>1</sup> Герцекович Давид Арташевич, к.т.н., доцент; e-mail: davidgerc@yahoo.com

лигации, иностранная валюта и др., — добавились производные финансовые инструменты: опционы, фьючерсы, свопы, варранты, индексы и т.д. Увеличение исходного числа финансовых инструментов предоставило возможность значительно обогатить проводимые стратегии управления капиталом.

- Во-вторых, применение, кроме традиционного уровня доходности, другого инвестиционного критерия — уровня риска.
- И, наконец, появление математической модели портфельного анализа, в которой Г. Марковиц предложил в качестве количественной меры ожидаемых доходности и риска одновременно анализировать математическое ожидание и дисперсию, а также учитывать коррелированность анализируемых финансовых инструментов. Тем самым, портфельный анализ пришел на смену изолированному анализу отдельных финансовых инструментов исключительно на предмет их ожидаемой доходности.
- Дальнейшее развитие это направление получило в работах У. Шарпа, Д. Тобина, Г. Линтнера, Г. Моссина, М. Шоулса, Ф. Блека, Р. Мертона и мн. др.

Настоящая работа являет собой попытку дальнейшего развития этого направления. Формирование оптимального инвестиционного портфеля по Г. Марковицу сопряжено со следующими трудностями:

А) Доходности по каждому финансовому инструменту вычисляются по крайним значениям: цена открытия в рассматриваемом временном интервале (Open, начальное благосостояние) и цена закрытия (Close, конечное благосостояние), — что снижает эффективность прогнозов, полученных по моделям, построенным на их основе. Так, например, на фондовом рынке такого рода трудности создают тестирующие продажи пакетов акций небольших объемов, по ценам значительно отличающимся от текущих. Качество синтезированных прогнозов можно повысить, применяя медианные оценки цен.

В) Линии уровня, построенные для целевых функций, коэффициенты которых определены по историческим данным низкого качества, становятся «толстыми». Линия градиента в этом случае трансформируется в конус, так как все линии «начинаются» в начале координат, а угол в вершине конуса будет тем больше, чем больше погрешности оценки средней доходности по каждому активу, если рассматривается задача максимизации доходности, либо погрешности оценки средней дисперсии, если минимизируется уровень риска.

С) Грани области допустимых решений практически «размываются», их угловые точки становятся близки между собой, что приводит к тому, что инвестор получает некоторое число практически равноправных оптимальных решений [Зайцев, 2007; Зайцев, Варюхин, 2007]. Очевидно, сказанное выше не исключает многозначность решений, обусловлен-

ную перпендикулярностью линии градиента к одному из ребер области допустимых решений для случая двух переменных или к ее грани, если число переменных более двух.

Проиллюстрируем сказанное выше в пунктах А), В) и С) следующим сравнением. Пусть требуется изготовить вращающийся светильник в форме шара, каждая грань которого представляет собой фрагмент зеркала. Назначение этого светильника — отражение падающих на него лучей света. Предположим далее, что мы по каким-либо причинам не располагаем возможностью изготовить каждую грань этого светильника требуемой формы (например, ввиду дефицита времени) и поэтому нашли следующий выход: просто разобьем большое зеркало, а из получившихся осколков попытаемся склеить требуемый светильник шаровидной формы. Очевидно следующее: полученный таким образом светильник не будет иметь правильной формы, так как он будет иметь грани различных размеров и форм. Геометрия каждой грани будет далека от идеальной. Более того, попытка склеить такие осколки приведет к тому, что швы, т.е. ребра светильника, также создадут определенные трудности, так как они тоже не будут выполнять поставленную задачу, потому что линии соединения не будут прямыми и будут размытыми (толстыми). Полученный таким образом светильник не даст должного эффекта, так как отраженные световые сигналы будут либо практически сливаться, либо их будет значительно меньше (искажение требуемой геометрии). Кроме того, его разные по площади грани будут давать лучи разной яркости.

Д) Портфельная теория Г. Марковица базируется на предположении о том, что доходность финансового инструмента в ближайшем инвестиционном горизонте с определенной вероятностью будет равняться его средней арифметической величине, вычисленной по историческим данным. Очевидно, что использование прогнозных оценок ожидаемой доходности приемлемого качества безусловно повысит эффективность формируемых инвестиционных портфелей.

Для преодоления перечисленных выше проблем предлагается алгоритм, включающий следующие шаги.

**1. Предварительная обработка исторических данных** имеет целью привести в соответствие имеющиеся данные к требованиям количественных методов, а именно — объективность, сопоставимость, полнота, однородность и устойчивость.

Исторические данные представляют собой массив размерности  $m \times n$ , где  $n$  (число столбцов) — число рассматриваемых финансовых инструментов. Здесь каждый столбец матрицы представляет собой временной ряд наблюдений за доходностью данного актива,  $m$  — длина этого ряда (число строк матрицы), а его элементы характеризуют динамику его доходности в некоторые равноотстоящие моменты времени

(бары). В набор могут входить любые виды финансовых инструментов и активов: обыкновенные акции, привилегированные акции, облигации, товарные, финансовые фьючерсы, опционы, индексы, недвижимость, валюты, биржевые товары, золото, нефть и многое другое. Таким образом, предполагается, что инвестор располагает широким выбором финансовых инструментов и представительной выборкой исторических данных, т.е. анализируемый рынок является зрелым.

Статистическая обработка, прежде всего, включает в себя:

1. *Исключение выбросов.* Сюда относится исключение грубых ошибок (при наборе или передаче данных, их считывании) или тех данных, которые имели место быть, но их присутствие в массиве исторических данных только негативно скажется на последующих результатах. Характерный пример: значительные изменения курсов валют «семьи» американского доллара во время террористической атаки на башни-близнецы в Нью-Йорке 11 сентября 2001 г. Да, действительно, курсы изменились, но это изменение не показало изменения соотношения экономик стран, а было обусловлено сиюминутной реакцией рынка на произошедшие события. И на самом деле, в достаточно короткие сроки (порядка двух суток) курсы (с некоторыми поправками) восстановили свои прежние значения. Поставленная задача «ревизии» исторических данных может быть решена несколькими способами. Из простейших это:

- графическая визуализация анализируемых данных средствами MS EXCEL — например, посредством точечных диаграмм,
- фильтрация (например, курс обследуемого актива может принимать значения только в определенных пределах и т.д.),
- применение известных статистических методов (например, правило «трех сигм») и т.д.

2. *Заполнение пропусков.* Исторические данные представляют собой временные ряды. Тогда изначальное отсутствие данных, вызванное, например, отсутствием торгов, или их исключение одним из алгоритмов, описанных в предыдущем пункте, приводит к тому, что в исходном временном ряде появляется «разрыв/разрывы». Инвесторы-практики для решения этой проблемы обычно применяют следующие методики:

А) отсутствующие данные заполняются путем «протягивания» данных ближайшего предшествующего временного интервала. Такой подход базируется на следующем утверждении: не было торгов, значит, цена (курс) не изменилась;

В) отсутствие данных обусловлено выбраковкой некоторых значений. Здесь, как и в предыдущем пункте, можно воспользоваться как «протяжкой» данных, так и применить методы интерполяции. Понятно, что готовых рецептов здесь нет, каждый использует тот подход, который считает наиболее подходящим. Некоторые исследователи используют методы генерации повторной выборки [Efron, 1979].

## **II. Вычисление ожидаемых доходностей и риска по каждому финансовому инструменту.**

1. *Построение прогностических моделей.* На основе методов автоматического синтеза эмпирических моделей оптимальной сложности [Герцекович, 2015] строятся модели авторегрессии для прогноза ожидаемых значений доходности и риска по каждому финансовому инструменту. В основу этих методов положены: метод всех возможных регрессий [Дрейпер, Смит, 1973], принцип внешнего дополнения [Ивахненко, 1975] и принцип комбинирования решений [Витинский, 1973; Растригин, Эренштейн, 1975; Nelson, 1972] и многое другое.

Матрица исторических данных в хронологическом порядке разбивается на три непересекающиеся подсистемы:  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ . Синтез модели (ее построение) осуществляется на  $q_1$  (обучающая подсистема) и  $q_2$  (проверочная подсистема). На  $q_3$  (экзаменационная подсистема) выполняется ее верификация, т.е. оценка пригодности по данным, которые не использовались при их построении.

Результирующая модель становится более эффективной, чем подмодели, ее составляющие. Срабатывает эффект, подобный «чуду Марковица» при формировании инвестиционных портфелей.

2. *Оптимизация длины обучающей выборки.* Для повышения качества прогноза используется процедура, предназначенная для учета эффекта «старения» исторических данных [Гершенгорн, 1977; Герцекович, 2012].

Алгоритм поиска оптимальной длины обучения модели работает следующим образом: последовательно наращивая длину обучающей выборки, в качестве оптимальной выбирается такая, которая дает наиболее точные прогнозы на независимом материале, т.е. на основе принципа внешнего дополнения [Ивахненко, 1975].

3. *Верификация моделей.* Построенные модели для каждого финансового инструмента последовательно верифицируются на последовательности  $q_3$ . Экзамен осуществляется следующим образом. Обобщенная модель испытывается по первому (в хронологическом порядке) наблюдению из  $q_3$ , результаты прогноза запоминаются, а данное наблюдение включается в обучающую последовательность. С учетом вновь поступившей информации уточняются коэффициенты моделей, входящих в обобщенную модель, а на основании качества прогноза уточняются веса  $W_i$ , характеризующие вклад каждой подмодели. После чего модель верифицируется по следующему наблюдению и т.д. — по всем наблюдениям из  $q_3$ . Таким образом, в процессе прогноза осуществляется самонастройка как моделей оптимальной сложности, входящих в обобщенную модель, так и весов  $W_i$ . Этот метод представляет собой двухуровневую самообучающуюся систему синтеза прогностических моделей: на первом уровне осуществляется выбор наиболее перспективных подмоделей, а на втором определяется оптимальное подмножество подмоделей и вклад каждой из них в результирующий прогноз.

Основные критерии оценки пригодности модели на  $q_3$  [Герцекович, 2012]:

А) анализ автокоррелированности остатков по критерию Дарбина—Уотсона [Доугерти, 1997; Магнус и др., 2005]. Если гипотеза о коррелированности остатков не отклоняется, то следует ревизовать структуру синтезируемой модели (например, в модели авторегрессии увеличить число лаговых переменных), протестировать модель с большим временным интервалом и т.д.;

В) проверка предположения о том, что дисперсия остатков остается неизменной на протяжении всей таблицы исторических данных, т.е. имеет место «одинаковый разброс» (гомоскедастичность). Проверка осуществляется с помощью ранговой корреляции Спирмена, т.е. оценивается теснота корреляции между остатками и входными аргументами.

С) оценка относительной погрешности результатов прогноза;

Д) погрешности эмпирических коэффициентов, вычисленные с 95%-ным уровнем доверительной вероятности, должны быть меньше соответствующих модулей коэффициентов;

Е) линейный коэффициент корреляции Пирсона между вычисленными и табличными значениями прогнозируемой переменной;

Ф) критерий эффективности модели [Наставление по службе прогнозов, 1972];

Г) тест Чоу [Доугерти, 1997; Магнус, Катышев, Пересецкий, 2005; Уотшем, Паррамоу, 1999].

Очевидно, будет справедливим также требовать, чтобы соответствующие значения перечисленных выше критериев были достаточно близки на  $q_1$ ,  $q_1 + q_2$  и  $q_1 + q_2 + q_3$ . Последнее требование означает, что синтезированная модель должна «одинаково» хорошо (плохо) работать на разных частях исторических данных.

4. *Расчет ожидаемых значений доходности и риска.* Следуя модели Г. Марковица для каждого финансового актива, вычислим ожидаемую доходность. Как отмечалось выше, все модели проверяются на  $q_3$ .

По *пригодным моделям* вычисляется прогноз ожидаемых значений доходности и риска на величину инвестиционного горизонта, а для тех финансовых инструментов, модели которых *не отвечают необходимым критериям пригодности*, в качестве ожидаемых значений доходности и риска принимаются соответственно: простая средняя доходностей, вычисленная по «очищенным» историческим данным, и соответствующее среднеквадратическое отклонение. Предложенный (компромиссный) подход позволяет значительно улучшить результаты портфельного анализа.

### **III. Формирование подмножества финансовых инструментов по результатам корреляционного анализа.**

1. *Первоначальная корректировка списка анализируемых финансовых инструментов.* Проанализируем полученные оценки ожидаемых доход-

ностей. Исключим из анализа на данном шаге формирования инвестиционного портфеля те активы, у которых на рассматриваемом интервале времени средняя доходность меньше нуля. На примере динамики доходности акций известных компаний [Зайцев, Варюхин, 2007]: APPLE (AP), BOEING (BO), BP AMOCO (BP), DEBEERS (DB), DOW CHEM (DO), DU PONT (DP), EXXON (EX), FIAT (FI), FORD (FO), GENERAL ELECTRIC(GE), GENERAL MOTORS (GM), INTEL (IN), LOCKHEED (LM), MICROSOFT (MS), PEPSICO (PEP) за 1990–2000 гг. (табл. 1). Средняя доходность за анализируемый период компании FIAT оказалась меньше нуля, и, следовательно, при формировании инвестиционного портфеля на ближайший инвестиционный период (например, один год) она из числа рассматриваемых исключается.

Следует подчеркнуть, что изменение конъюнктуры рынка в дальнейшем может в значительной мере изменить оценки средней доходности, и, следовательно, исключенные на предыдущих этапах портфельного анализа активы потенциально могут быть позднее возвращены в первоначальный список для последующего анализа.

2. *Корреляционный анализ исторических данных.* Далее, по предварительно очищенной матрице проводится полный корреляционный анализ всех пар финансовых инструментов, позволяющий уточнить их список и оценить тесноту связи между ними. Обработывается матрица, число строк (число наблюдений) в которой оптимизировано в соответствии с учетом эффекта «старения информации». Для выполнения поставленной задачи использовался линейный коэффициент корреляции Пирсона.

Таблица 1

Доход по акциям компаний, %

Год	AP	BO	BP	DB	DO	DP	EX	FI	FO	GE	GM	IN	LM	MS	PEP
1990	13	10	20	-1	-24	1	8	-39	-36	-12	-7	-3	-21	58	34
1991	36	0	-12	68	14	30	16	-16	-11	21	-11	11	45	106	18
1992	13	-22	-28	-59	15	12	1	-23	75	25	9	74	17	38	33
1993	-46	8	40	64	13	1	5	24	47	20	68	72	35	-12	-2
1994	15	19	35	11	13	14	-4	62	-14	-7	-28	0	-2	54	-12
1995	4	63	30	33	16	32	28	-17	7	50	35	95	76	38	57
1996	-33	33	46	9	22	46	22	-5	13	50	21	108	22	83	9
1997	-29	11	23	-29	22	31	29	16	36	43	10	28	8	82	26
1998	92	-25	14	-26	0	-4	23	4	31	23	27	41	9	80	9
1999	202	4	40	83	30	6	7	-8	-13	48	25	33	-62	44	-16
2000	-67	61	-22	2	-15	-27	14	-10	-15	14	-28	-10	56	-39	23
D сред	18	15	17	14	10	13	14	-1	11	25	11	41	17	48	16

В качестве еще одного примера приведем результаты полного корреляционного анализа по динамике курсов основных валютных пар рынка FOREX. Анализируются данные 2004 г., полученные от брокерской конторы Refko (refko.com). Временной интервал (бар) 10 минут. Обработка данных производилась с помощью надстройки «Анализ данных» MS EXCEL, меню «Корреляция». В результате была получена следующая симметричная квадратная матрица (табл. 2).

Таблица 2

**Результаты корреляционного анализа курсовой динамики валютных пар**

Валютные пары	<i>GBP /JPY</i>	<i>GBP /USD</i>	<i>EUR /JPY</i>	<i>EUR /USD</i>	<i>USD /CHF</i>	<i>USD /JPY</i>	<i>GBP /CHF</i>	<i>EUR /CHF</i>	<i>EUR /GBP</i>	<i>CHF /JPY</i>
<i>GBP/JPY</i>	1	0,27	0,52	-0,04	-0,01	0,49	0,25	-0,13	-0,38	0,49
<i>GBP/USD</i>	0,27	1	0,51	<b>0,84</b>	<b>-0,81</b>	-0,71	-0,31	-0,11	0,30	0,48
<i>EUR/JPY</i>	0,52	0,51	1	0,68	-0,67	-0,67	-0,57	-0,12	0,59	<b>0,88</b>
<i>EUR/USD</i>	-0,04	<b>0,84</b>	0,68	1	<b>-0,95</b>	-0,78	-0,69	-0,08	0,77	0,60
<i>USD/CHF</i>	-0,01	<b>-0,81</b>	-0,67	<b>-0,95</b>	1	0,72	<b>0,81</b>	0,39	-0,71	-0,74
<i>USD/JPY</i>	0,49	-0,71	-0,67	-0,78	0,72	1	0,45	0,00	-0,54	-0,07
<i>GBP/CHF</i>	0,25	-0,31	-0,57	-0,69	<b>0,81</b>	0,45	1	0,53	<b>-0,85</b>	-0,72
<i>EUR/CHF</i>	-0,13	-0,11	-0,12	-0,08	0,39	0,00	0,53	1	-0,01	0,50
<i>EUR/GBP</i>	-0,38	0,30	0,59	0,77	-0,71	-0,54	<b>-0,85</b>	-0,01	1	0,50
<i>CHF/JPY</i>	0,49	0,48	<b>0,88</b>	0,60	-0,74	-0,07	-0,72	0,50	0,50	1

Результаты проведенного корреляционного анализа характеризуют согласованность/рассогласованность динамики во времени доходности финансовых инструментов и, следовательно, служат приемлемой основой для формирования оптимального инвестиционного портфеля. В табл. 2 выделены наиболее значимые коэффициенты корреляции, отражающие наиболее тесную связь. Валютные пары *GBP/JPY*, *USD/JPY*, *EUR/CHF* наименее коррелированы с другими парами и между собой, т.е. «ведут себя независимо от других». Тогда как пары *EUR/USD*, *USD/CHF*, *GBP/CHF*, *EUR/GBP*, напротив, достаточно тесно коррелированы между собой. В частности, между валютными парами *EUR/USD*, *USD/CHF* корреляция составляет  $-0,95$ , что свидетельствует о том, что на анализируемом временном интервале курсовая динамика этих пар разноразнаправлена с почти функциональной зависимостью.

Резюмируя, можно сказать, что внутри представленного набора валютные пары: присутствует выраженный кластер, содержащий четыре валютные пары: *EUR/USD*, *USD/CHF*, *GBP/CHF*, *EUR/GBP*. Вышеперечисленные пары примечательны тем, что составляют две зеркальные

пары и могут использоваться осторожными инвесторами при построении хеджевых стратегий [Герцекович, 2012]. Аналогичное исследование показало наличие кластера, содержащего три финансовых инструмента, при анализе курсовой динамики акций компаний из табл. 1: DU PONT, GENERAL ELECTRIC и INTEL.

Полученные результаты корреляционного анализа были бы более представительны, если бы существовала возможность вычислить коэффициенты корреляции между каждой парой финансовых инструментов при постоянстве других, тогда оценки тесноты связи будут более достоверными. Однако исторические данные задаются «природой», т.е. получены по схеме пассивного эксперимента. Роль менеджера-практика в этом случае сводится к пассивной «регистрации» результатов. Получить же из них репрезентативную выборку заданной длины невозможно, так как в реальных задачах  $m$  может достигать 250 (в среднем), а  $n$  колеблется в пределах от 20 до 50 и даже более.

Как показывает практика исследований финансового рынка, ситуация, когда внутри выбранного списка финансовых инструментов можно выделить непересекающиеся кластеры, не является исключением, а, напротив, достаточно распространенной [Герцекович, 2012]. Выделить кластер можно и другими методами, в частности, с помощью кластерного анализа [Труон, 1939; Дюран, Оедд, 1977; и мн. др.]. На компьютере кластерный анализ можно выполнить, например, с помощью широко известных пакетов SPSS, STATISTICA и многих других, а можно и в MS EXCEL оценить наличие кластеров среди финансовых инструментов либо поискать аналоги между точками отсчета членов временных рядов, например, методом ближайшего соседа (<http://exceltable.com/otchet/y/kak-sdelat-klasternyy-analiz>).

Многие авторы, в частности [Зайцев, 1977; Зайцев, Варюхин, 2007] и др., отмечают, что в практических задачах поиска оптимального решения почти всегда существует достаточно большое число практически равноправных решений. Эти решения дают вполне приемлемые результаты и, кроме того, предоставляют менеджеру возможность выбора среди них наиболее приемлемого с точки зрения его опыта, интуиции и т.д. Преимущества очевидны, но есть и существенный недостаток. Для портфельного менеджера наличие кластера достаточно тесно кросс-коррелированных финансовых инструментов внутри анализируемого набора означает на практике, что поиск оптимального решения является далеко не тривиальной задачей, а требует определенного опыта.

В данной задаче (задаче синтеза оптимального инвестиционного портфеля), когда некоторое число финансовых инструментов достаточно тесно коррелированы между собой, просматривается прямая аналогия с проблемой выбора наилучшего уравнения регрессии для слу-

чая многих переменных. Действительно, если построенная эмпирическая модель включает в себя некоторое число коррелированных входных аргументов, то полученное прогностическое уравнение не будет иметь прогностической ценности. Полученная в этом случае система нормальных уравнений является плохо обусловленной [Тихонов, Арсенин, 1986], и, следовательно, найденные по методу наименьших квадратов эмпирические коэффициенты будут вычислены с большими погрешностями, что априори исключает применение таких соотношений для выработки прогнозов. Действительно, с помощью соотношений такого рода можно выработать некую прогностическую оценку, но дальнейшая верификация этих прогнозов показывает их полную несостоятельность, так как очевидно, какого качества результаты можно ожидать от уравнений, погрешности коэффициентов которых превосходят модули самих коэффициентов. Другими словами, в этих уравнениях не определен даже знак влияния некоторых слагаемых, не говоря уже о количественных оценках.

С позиции портфельного анализа наличие некоторого числа тесно (положительно) коррелированных активов в инвестиционном портфеле значительно увеличивает риск портфеля в целом [Уотшем, Паррамоу, 1999]. Таким образом, попытка включить все активы, входящие в кластер, приводит к:

- 1) формированию портфеля с более высоким уровнем ожидаемого риска;
- 2) синтезу весов для каждого актива с большими погрешностями.

В качестве выхода можно либо априори оставить в задаче портфельного анализа только один актив из кластера (например, лучший по величине средней доходности или по уровню риска), либо попытаться адекватно объединить активы кластера в коллектив с целью оптимальным образом учесть особенности каждого из них.

#### **IV. Генерация подмножеств финансовых инструментов. Построение эффективного портфеля для каждого подмножества.**

1. *Генерация подмножеств финансовых инструментов.* Для улучшения свойств матрицы разнесем коррелированные финансовые инструменты по непересекающимся подмножествам. Пусть  $n$  — общее число анализируемых финансовых инструментов. Рассмотрим далее следующие случаи:

А) среди анализируемого набора финансовых инструментов кластеры не выявлены. Тогда результирующим будет один, исходный набор финансовых инструментов, т.е. в этом случае решается задача формирования оптимального инвестиционного портфеля в классической постановке;

В) проведенный анализ показал наличие одного выявленного кластера. Пусть  $p$  — число инструментов, входящих в данный кластер.

Тогда  $n - p$  — число независимых инструментов. Здесь  $n$  — обновленное значение числа анализируемых инструментов после завершения всех вышеизложенных шагов по обработке исходных исторических данных. Следует подчеркнуть, что, исходя из определения кластера,  $p > 1$ .

Процедура генерации подмножеств финансовых инструментов формулируется следующим образом. Последовательно к каждому финансовому инструменту из кластера коррелированных добавляются оставшиеся  $m - p$  инструменты. Таким образом, общее число подмножеств инструментов будет равняться  $p$ . На примере рынка FOREX (табл. 2): всего инструментов (валютных пар)  $n = 10$ ,  $p = 4$ . Для примера фондового рынка (табл. 1) из первоначального списка в пятнадцать инструментов анализируется четырнадцать:  $n = 14$ ,  $p = 3$ ;

С) выявлено два кластера. Пусть  $p_1$  — число инструментов, входящих в первый кластер, а  $p_2$  — число инструментов, входящих во второй кластер. Тогда подмножества формируются так: последовательно к каждой возможной паре из найденных кластеров добавляется оставшиеся  $m - p_1 - p_2$  инструментов и т.д. для произвольного числа кластеров.

2. *Построение эффективных портфелей.* Не сужая общности, все дальнейшее изложение ведется для случая поиска максимума доходности при ограничении на уровень риска. Для каждого набора решается задача оптимизации, описанная ниже.

Целевая функция: максимум доходности; ограничения: все веса неотрицательны и меньше единицы, сумма весов равна единице, а риск не превосходит некоторого, наперед заданного порога.

Полученные эффективные портфели (например, с помощью надстройки «Поиск решения» MS EXCEL) можно ранжировать по рассчитанной величине их доходности. Для рассматриваемых примеров соответственно будет построено три эффективных портфеля (табл. 1) и четыре для примера рынка FOREX (табл. 2). Такое разнесение коррелированных финансовых инструментов позволяет повысить качество синтезируемых решений, так как улучшает качественные характеристики области допустимых решений и линии градиента в свете указанных выше проблем. Причем, чем теснее взаимосвязи внутри кластера и чем менее коррелирован набор инструментов, входящих в кластер, с остальными инструментами, тем более оправданно применение предложенного способа формирования множества эффективных портфелей.

Очевидно, что классическая постановка модели Марковица вытекает из изложенного подхода как частный случай для случая, когда среди исходного набора финансовых инструментов нет тесно коррелированных (нет кластера).

## **V. Формирование оптимального портфеля на основе принципа комбинирования эффективных портфелей.**

Эффективные портфели объединяются в коллектив для оптимального учета достоинств каждого из числа  $\kappa$  пригодных. Под объединением эффективных портфелей понимается суммирование доходностей, полученных по эффективным портфелям из числа рассматриваемых. Объединение осуществляется в полном соответствии с изложенным выше принципом комбинирования в задаче учета эффекта старения информации.

Вклад каждого эффективного портфеля в результирующий портфель определяется как величина, прямо пропорциональная доходности. Веса определяются с учетом следующих ограничений:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\kappa} w_i &= 1, \\ w_i &\geq 0, \\ w_i &< 1.\end{aligned}$$

Здесь  $\kappa$  — число эффективных портфелей, входящих в инвестиционный портфель,  $w_i$  — вес (вклад)  $i$ -го актива.

## **VI. Динамическая корректировка структуры инвестиционного портфеля и весов (вкладов), входящих в него активов.**

Анализ состояния портфеля и оценка эффективности его функционирования внутри инвестиционного горизонта осуществляются с заданной регулярностью и включают в себя следующие пункты.

1. *Мониторинг структуры портфеля и уточнение весов (вкладов) входящих в него активов.* По историческим данным с учетом вновь поступившей (свежей) информации проводится оценка необходимости пересмотра структуры портфеля и вкладов входящих в него активов. Проводимый анализ имеет целью выявление таких активов, показатели эффективности которых (доходность и/или риск) оказались значительно ниже ожидаемых. В результате такого анализа (в общем случае) отыскивается некоторое число активов-аутсайдеров. Далее с учетом вновь поступившей информации проводится анализ активов, не вошедших в портфель на предыдущем этапе анализа. Таким образом выявляются активы-лидеры. Если активы-лидеры имеют показатели, превосходящие по своим параметрам (доходность, риск) значения активов-аутсайдеров, то можно полагать, что исследуемый портфель возможно улучшить. Однако вышесказанное не означает безусловную немедленную корректировку исследуемого портфеля.

2. *Определение точки входа.* «Физическое» формирование портфеля на начальном этапе, т.е. открытие соответствующих транзакций и, в слу-

чае необходимости, его последующая корректировка осуществляются только на основе результатов, полученных с помощью количественных методов технического анализа. В качестве входной информации используются результаты динамики доходности и риска как по портфелю в целом, так и по каждому активу в частности. Для оценки целесообразности открытия транзакций используются следующие алгоритмы: методы синтеза эмпирических моделей оптимальной сложности, *ADX*, *MACD*, *RSI* [Герцекович, 2008]. Результирующий торговый сигнал формируется на основе принципа комбинирования сигналов, полученных по вышеперечисленным алгоритмам. Если среди полученных сигналов согласия нет, то открытие транзакции переносится на более поздний срок.

3. *Определение точки выхода*. Закрытие транзакции, т.е. вывод какого-либо актива из портфеля, осуществляется на основе нескольких критериев, основные из которых:

- а) выход по *Take Profit*, когда решение о закрытии позиции (о ликвидации портфеля) с прибылью принимается при благоприятном движении курса;
- в) выход по *Stop Loss*. Оценка неблагоприятного развития событий осуществляется на основе денежной остановки и по динамической (следающей) остановке *ATR Trailing Stop*. Так, если вновь обратиться к табл. 1, то необходимо отметить, что далеко не каждый здравомыслящий инвестор, опираясь на представленные данные о доходности компании APPLE в рассматриваемом временном промежутке, сочтет целесообразным включить в портфель акции этой компании, так как дисперсия доходности компании APPLE в несколько раз превосходит значения этого показателя для других компаний при сравнимых значениях доходности.

**Заключение.** В статье изложен алгоритм формирования инвестиционного портфеля оптимальной сложности. К достоинствам которого можно отнести следующие положения:

1. Оптимизация длины обучающей выборки по критерию эффективности вырабатываемых прогнозов.
2. Компромиссный подход к задаче оценки ожидаемых доходности и риска.
3. Способ формирования подмножеств финансовых инструментов, основывающийся на разнесении тесно коррелированных финансовых инструментов по непересекающимся подмножествам.
4. Синтез оптимального портфеля на основе принципа комбинирования эффективных портфелей.

Если в анализируемом исходном наборе нет тесно коррелированных финансовых инструментов, то предложенный способ реализует классическую модель Марковица формирования оптимального инвестиционного портфеля, в противном случае (в наборе присутствует кластер

тесно коррелированных инструментов) синтезируется более сложный, более эффективный портфель. Повышение инвестиционных качеств результирующего портфеля обеспечивается как вышеперечисленными мерами, так и посредством оптимального учета особенностей каждого актива из входящих в кластер.

В дальнейшем предполагается:

- с помощью переборных алгоритмов автоматизировать а) генерацию подмножеств финансовых инструментов и б) построение соответствующих эффективных портфелей;
- модифицировать описанный выше этап оптимизации длины обучающей выборки. Ранее оптимизация проводилась по критерию эффективности синтезируемых прогнозов. В дальнейшем предполагается апробировать другой критерий, а именно величину временного интервала (бара), и их число уточнять по критерию результативности сформированного инвестиционного портфеля. Причем инвестиционные качества портфеля должны оцениваться только на «свежих» данных.

### Список литературы

1. *Витинский Ю. И.* Цикличность и прогнозы солнечной активности. — Л.: Наука, 1973. — 258 с.
2. *Герцегович Д. А.* Финансовые рынки: система игры на противофазе. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2012. — 156 с.
3. *Герцегович Д. А.* Корректировка прогнозов курсов взаимосвязанных валютных пар на основе систем балансовых соотношений // Мир экономики и управления. — 2015. — Т. 15. — № 1. — С. 60–66.
4. *Гершенгорн Г. И.* Пакет программ для построения эмпирических дифференциальных уравнений // В сб.: Долгосрочные прогнозы природных явлений. — Новосибирск: Наука, 1977. — С. 133–137.
5. *Доугерти К.* Введение в эконометрику. — М.: ИНФРА-М, 1997. — 402 с.
6. *Дрейпер Н.* Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. — М.: Статистика, 1973. — 392 с.
7. *Дюран Б.* Кластерный анализ / Б. Дюран, П. Одедд; пер. с англ. — М.: УРСС, 1977. — 128 с.
8. *Зайцев М. Г.* Методы оптимизации управления для менеджеров: компьютерно ориентированный подход: учеб. пособие. — 3-е изд., испр. — М.: Дело, 2007. — 304 с.
9. *Зайцев М. Г.* Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учеб. пособие / М. Г. Зайцев, С. Е. Варюхин. — М.: Дело, 2007. — 664 с.
10. *Ивахненко А. Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. — Киев: Техника, 1975. — 312 с.
11. *Магнус Я. Р.* Эконометрика. Начальный курс: учебник / Я. Р. Магнус, П. К. Катыхов, А. А. Пересецкий. — 7-е изд., испр. — М.: Дело, 2005. — 504 с.

12. Наставление по службе прогнозов. Ч. I. — Л.: Гидрометеоиздат, 1972. — 135 с.
13. *Растрюгин Л. А.* Принятие решений коллективом решающих правил в задачах распознавания образов / Л. А. Растрюгин, Р. Х. Эренштейн // *Автоматика и телемеханика*. — 1975. — № 9. — С. 133–144.
14. *Тихонов А. Н.* Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 264 с.
15. *Уотшем Т. Дж.* Количественные методы в финансах / Т. Дж. Уотшем, К. Паррамоу. — М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. — 527 с.
16. *Black F.* The CAPM: some empirical test / F. Black, M. Jensen, M. Scholes // *Studies in the theory of capital markets*. — 1972. — P. 79–121.
17. *Efron B.* Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife // *Annals of Statistics*. — 1979. — Vol. 7. — No. 1. — P. 1–26.
18. *Nelson C. R.* The prediction performance of the ERB-MITTPENN model of the U. S. economy // *American Economic Review*. — 1972. — Vol. 62. — No. 5. — P. 902–917.
19. *Tryon R. C.* Cluster Analysis. — N.Y.: McGraw-Hill, 1939. — 347 p.

### **The List of References in Cyrillic Transliterated into Latin Alphabet**

1. *Vitinskij Ju. I.* Ciklichnost' i prognozy solnechnoj aktivnosti. — L.: Nauka, 1973. — 258 s.
2. *Gercekovich D. A.* Finansovyje rynki: sistema igry na protivofaze. — Irkutsk: Izd-vo Irkut. gos. un-ta, 2012 — 156 s.
3. *Gercekovich D. A.* Korrektirovka prognozov kursov vzaimosvjazannyh valjutnyh par na osnove sistem balansovyh sootnoshenij // *Mir jekonomiki i upravlenija*. — 2015. — T. 15. — № 1. — S. 60–66.
4. *Gershengorn G. I.* Paket programm dlja postroenija jempiricheskikh differencial'nyh uravnenij // V sb.: *Dolgosrochnye prognozy prirodnyh javlenij*. — Novosibirsk: Nauka, 1977. — S. 133–137.
5. *Dougerti K.* Vvedenie v jekonometriku. — M.: INFRA-M, 1997. — 402 s.
6. *Drejper N.* Prikladnoj regressionnyj analiz / N. Drejper, G. Smit. — M.: Statistika, 1973. — 392 s.
7. *Djuran B.* Klasternyj analiz / B. Djuran, P. Odedd // *Per. s angl.* — M.: URSS, 1977. — 128 s.
8. *Zajcev M. G.* Metody optimizacii upravlenija dlja menedzherov: Komp'juterno-orientirovannyj podhod: ucheb. posobie. 3-e izd., ispr. — M.: Delo, 2007. — 304 s.
9. *Zajcev M. G.* Metody optimizacii upravlenija i prinjatija reshenij: primery, zadachi, kejsy: ucheb. posobie / M. G. Zajcev, S. E. Varjuhin. — M.: Delo, 2007. — 664 s.
10. *Ivahnenko A. G.* Dolgosrochnoe prognozirovanie i upravlenie slozhnymi sistemami. — Kiev: Tehnika, 1975. — 312 s.
11. *Magnus Ja. R.* Jekonometrika. Nachal'nyj kurs: uchebnik / Ja. R. Magnus, P. K. Katyshev, A. A. Pereseckij. — 7-e izd., ispr. — M.: Delo, 2005. — 504 s.
12. Наставление по службе прогнозов. Ч. I. — Л.: Гидрометеоиздат, 1972. — 135 с.

13. *Rastrigin L. A.* Prinjatje reshenij kolektivom reshajushhih pravil v zadachah raspoznavanija obrazov / L. A. Rastrigin, R. H. Jerenshtejn // Avtomatika i telemekhanika, 1975. — № 9. — S. 133–144.
14. *Tihonov A. N.* Metody reshenija nekorrektnyh zadach / A. N. Tihonov, V. Ja. Arsenin. — M.: Nauka, 1979. — 264 s.
15. *Uotshem T. Dzh.* Kolichestvennye metody v finansah / T. Dzh. Uotshem, K. Parramou. — M.: Finansy, JuNITI, 1999. — 527 s.