Евгений Евгеньевич Слуцкий

Евгений Евгеньевич Слуцкий (1880–1948) *– российский и советский математик, статистик, экономист. Родился в 1880 г. в Ярославской губернии, в возрасте шести лет переехал вместе с семьей в Киев. В 1905 г. Слуцкий поступил на юридический факультет Киевского университета и окончил его в 1911 г. с золотой медалью за сочинение на тему «Теория предельной полезности». В 1917 г. сдал экзамены на степень магистра политической экономии и статистики в Московском университете. В 1912 г. после публикации книги «Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения» был приглашен на работу в Киевский коммерческий институт. В 1915 г., работая в Киеве, Слуцкий опубликовал в итальянском журнале статью «К теории [сбалансированного] бюджета потребителя», где предложил уравнение, смысл которого состоит в том, что изменение спроса на некоторый товар при изменении его цены складывается из влияния непосредственного изменения спроса и косвенного влияния в результате переключения спроса на другие товары («уравнение Слуцкого»). В 1926 г. Слуцкий переехал в Москву и приступил к работе в Центральном статистическом управлении, а чуть позднее – в Конъюнктурном институте. В 1927 г. в издаваемом Конъюнктурным институтом журнале «Вопросы конъюнктуры» была напечатана статья Е. Е. Слуцкого «Сложение случайных причин как источник циклических процессов», а спустя 10 лет англоязычная версия этой статьи была опубликована в журнале «Econometrica». Эта статья Слуцкого до настоящего времени остается наиболее цитируемой русскоязычной научной статьей по экономике.*

К ТЕОРИИ [СБАЛАНСИРОВАННОГО] БЮДЖЕТА ПОТРЕБИТЕЛЯ[1]

1. Предварительные соображения

[1] Современная теория ценности представляется на первый взгляд как бы разделом психологии; это усложняет вопрос о применении математических методов в экономике. Ввиду больших сомнений в возможности решения всех проблем, относящихся к измеримости психических явлений, открывается поэтому обширное поле для споров. Даже если оставить в стороне расхождения во мнениях среди последователей гедонистического направления (scuola

[1] Текст статьи публикуется по изданию: *Слуцкий Е. Е.* Экономические и статистические произведения: Избранное [перевод и предисловие П. Н. Клюкина]. — М.: Эксмо, 2010. С. 448–485. Оригинал статьи был опубликован в 1915 г. на итальянском языке (*Slutsky Eugen.* Sulla teoria del bilancio del consumatore // Giornale degli economisti. 1915. P. 1–26). Перевод статьи на русский язык впервые был подготовлен и опубликован Н. С. Четвериковым в 1963 г., а в 2010 г. перевод был сверен с итальянским оригиналом и отредактирован П. Н. Клюкиным. Читателям журнала «Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика» предлагается именно версия перевода 2010 г., за исключением сносок с комментариями переводчика и редактора, опущенных из-за ограниченного объема журнала.

edonistica), самый фундамент этого построения подвергся сильным нападкам; поэтому сомнительно, можно ли сейчас считать положение этой теории господствующим, несмотря ни то что противники ее далеки от согласия между собой. Но если мы возьмем за основу теории понятие удовольствия и неудовольствия или понятие желания, то окажемся на позициях, открытых сильным нападкам. Изучая соответственные проблемы, мы должны будем распространить наше исследование на всю обширную область психологии и философии без надежды добиться в настоящее время или же в более или менее близком будущем таких результатов, которые могли бы сгладить глубокие различия между ныне существующими взглядами. Отсюда следует, что если мы хотим подвести под экономическую науку (la scienza economica) надежную базу, то мы должны сделать ее совершенно независимой от психологических утверждений и философских гипотез. С другой стороны, так как в основе современной экономии лежит фундаментальное понятие полезности, представляется неуместным обойти всякие связи, существующие между наблюдаемыми и измеримыми фактами (fatti visibili e misurabili) поведения людей и психическими явлениями, которые представляются как их регуляторы. Поэтому определение полезности должно быть построено так, чтобы сделать его логически независимым от всякой спорной гипотезы или понятия, однако [при этом] не исключая возможности сколь угодно углубленного исследования тех соотношений, которые существуют между поведением индивида и его психическим бытием (la vita psichica).

Наиболее строгая концепция полезности принадлежит [В.] Парето [2].

Совершенно формальный характер этой концепции и полная независимость от какой-либо философской или психологической гипотезы позволяют видеть в ней прочную базу для построения нашей теории. Все же эту концепцию нельзя рассматривать как достаточно хорошо определенную (ben definita). Строго говоря, она состоит не из одного понятия, а из двух различных понятий, которые представляются между собой внутренне не связанными. Первым из них является понятие полезности (ofelimità) как удовольствия, которое испытывает индивидуум от добавочной дозы какого-либо данного блага. Это понятие чисто психологическое и не отличается от обычного, достаточно спорного, гедонистического понятия Госсена, Джевонса и других. В теории Парето это первое понятие остается, однако, почти без всякого применения.

Совсем иное дело — другое понятие, а именно понятие функции показателя полезности (una funzione indice di utilità). Оно представляется счастливо [найденным] (felice) построением, совершенно строгим и абстрактным. Мы используем его как основу (al principio) для наших рассуждений, но нужно заметить, что, придерживаясь определения Парето, мы не сможем найти ни одной точки соприкосновения между экономией и психологией; в силу этого по какой-либо частной функции (in una funzione individuata), основанной на эмпирических данных, невозможно восстановить с однозначной определенностью функцию Парето. Несмотря на это, мы возьмем за исходную точку это [второе] понятие; впоследствии мы увидим, что окажется возможным дойти до другого, лучшего определения.

2. Функция полезности

Оттолкнемся от следующего определения: полезность какой-либо комбинации благ есть величина, которая обладает свойством принимать тем большие значения, чем в большей мере эта комбинация оказывается предпочтительной для рассматриваемого индивида.

Под предпочтительной комбинацией мы подразумеваем такую, к которой индивид переходит, покидая другую, в том случае, если он имеет возможность выбора между двумя комбинациями. Только в том случае, если индивид, располагая комбинацией A, не переходит к комбинации B и, обратно, — располагая B, не переходит к A, — полезность двух комбинаций должна рассматриваться как имеющая одну и ту же величину.

Анализ определения полезности приводит к следующим заключениям: прежде всего, ясно, что субъект все время (sempre) стремится отбросить одну комбинацию, чтобы перейти к другой, полезность которой выше. Это предложение, являющееся самоочевидным следствием самого определения, можно рассматривать как положение (teorema), [справедливое] без ограничений. Кроме того, ясно, что единственно возможное состояние, в котором бюджет индивида мог бы оставаться неизменным (immobile), хотя бы на короткое время — это то, в котором теперешняя полезность [бюджета потребителя] обладает одинаковой или наибольшей величиной среди всех ближайших к нему состояний. Такое состояние, если [оно] наступает, можно назвать состоянием равновесия. Оно будет *устойчивым*, если всякое отступление от него стремится уменьшить полезность, и *неустойчивым* в противном случае. Однако на практике, когда каждый индивидуальный бюджет [3] подвергается бесчисленным воздействиям, которые непрестанно нарушают его равновесие, очевидно, могут существовать фактически *одни лишь устойчивые бюджеты*; поэтому выяснение условий устойчивости представляет собой задачу величайшей важности в теории индивидуальных бюджетов.

Что касается функции полезности, то отметим, что ее можно логически рассматривать как эмпирически данную, невзирая на то, что эксперименты, с помощью которых ее можно было бы непосредственно построить, практически неосуществимы. Лишь после того, как теория бюджета [потребителя] будет развита полностью, можно будет приступить к разрешению проблемы определения функции полезности при помощи доступных с практической точки зрения средств, таких как изменения спроса в виде функции дохода и цен.

Каковы бы ни были данные, используемые для построения функции полезности, имеются случаи (и они являются преобладающими), когда эта функция не может быть определена однозначно. Этот вопрос был изучен Парето, и мы не собираемся производить полного пересмотра его выводов; попытаемся лишь установить условия однозначной определяемости второй производной от функции полезности. Как будет видно далее, эта проблема тесно связана с проблемой возможности установить соответствие между формальной и психологической точками зрения на проблему полезности.

Итак, установим те предпосылки, на которых построена теория бюджета [потребителя]:

1) предпосылка непрерывности как самой функции полезности, так и ее производных, по крайней мере, первых двух порядков;
2) предпосылка, что характер функции полезности не претерпевает изменений в течение рассматриваемого промежутка времени;

(Обе эти предпосылки, вероятно, окажутся приближенно осуществленными в опыте, если мы вместо отдельного индивида рассмотрим целую группу, применяя при исследовании статистические методы.)

3) предпосылка, что прирост полезности при переходе от одной комбинации благ к другой не зависит от способа перехода. На языке математики это сводится к условию:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1},$$

и мы впоследствии увидим, как это можно проверить эмпирически.

Поскольку мы намерены исследовать проблему в наиболее общем виде, функция полезности не должна быть подчинена никаким дальнейшим ограничениям. Если мы положим $U = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, (где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — количества различных благ, потребленных субъектом за данный интервал времени, а U — полезность, полученная самим субъектом при посредстве данной комбинации благ), то предельная полезность какого-либо блага, например блага i, представится первой частной производной $u_i = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}$.

[4] Мы вправе считать ее всегда положительной, если, как в настоящем исследовании, ограничиваемся теорией бюджета *потребителя*, и поэтому рассматриваем лишь те блага, которые желательны в положительном смысле слова. Под желательностью (desiderabilità) блага подразумеваем тот факт, что индивид предпочитает наличие самого блага или увеличение [количества] блага его отсутствию.

Производные второго порядка той же функции показывают зависимость предельной полезности данного блага от количества его же самого или же от количества другого блага:

$$u_{ii} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2},\ u_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Что касается закона Госсена (о насыщении потребностей), то мы должны рассматривать его просто как эмпирическое обобщение, которое до сего времени лишено строгого доказательства. Поэтому мы им пренебрегаем; и будем рассматривать блага двоякого рода: такие, предельная полезность которых снижается с увеличением их количества ($u_{ii} < 0$), которые мы будем называть благами *насыщающими* (sazianti), и такие, предельная полезность которых в тех же условиях увеличивается ($u_{ii} > 0$), которые назовем благими *ненасыщающими* (non sazianti).

3. Об устойчивости равновесия бюджета потребителя

Пусть s — доход какого-либо индивида, $p_1, p_2, \ldots, p_n$— цены благ, которые он купил, $x_1, x_2, \ldots, x_n$— купленные им количества. Тогда имеем:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = s. \tag{1}$$

Мы уже видели, что для устойчивости бюджета нужно, чтобы функция полезности имела наибольшую величину; речь идет, очевидно, о той наибольшей величине, которую можно совместить с уравнением (1). Известно, однако, что из того же условия (codesta condizione) получаются:

1. Уравнения:

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \ldots = \frac{u_n}{p_n} = u', \tag{2}$$

где u' представляет собой предельную полезность денег.

2. Неравенство:

$$d^2U = u_{11} dx_1^2 + u_{22} dx_2^2 + \ldots + 2u_{12} dx_1 dx_2 + \ldots < 0. \tag{3}$$

Если положим, что:

$$dx_i = c_{i1} d\xi_1 + c_{i2} d\xi_2 + \ldots + c_{in} d\xi_n, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} c_{ik} &= 0 \text{ при } i > k, \\ c_{ik} &= 1 \text{ при } i = k, \end{aligned} \tag{5}$$

и подставим эти значения в (4) и (3), можно будет коэффициенты c_{ik} определить таким образом, чтобы коэффициенты всех произведений [в (3)] оказались равными нулю.

Таким путем получим:

[5]
$$d^2U = A_1 d\xi_1^2 + A_2 d\xi_2^2 + \ldots + A_n d\xi_n^2, \tag{6}$$

где величины $d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_n$ связаны между собой линейным уравнением:

$$B_1 d\xi_1 + B_2 d\xi_2 + \ldots + B_n d\xi_n = 0. \tag{7}$$

Чтобы определить коэффициенты $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в виде функций от c_{ik}, продифференцируем уравнение (1) и подставим на место $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ их выражения, взятые из (4). Приняв во внимание условия (5), получим:

$$\begin{cases} B_1 = p_1 \\ B_2 = p_1 c_{12} + p_2, \\ B_3 = p_1 c_{13} + p_2 c_{23} + p_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n = p_1 c_{1n} + p_2 c_{2n} + \ldots + p_{n-1} c_{n-1,n} + p_n. \end{cases} \tag{8}$$

Как вычислить c_{ik}, будет показано в следующем параграфе. Из анализа формулы (6) можно легко сделать следующие выводы:

1. *Если все величины $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отрицательны, то и d^2U тоже отрицательно;*
2. *Если две или больше величин среди $A_1, A_2, \ldots, A_n$ положительны, то d^2U не может быть отрицательным для всех [возможных] значений $d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_n$;*
3. *Если среди величин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лишь одна A_i положительна, то этот случай требует дальнейшего исследования.*

Положим, что:

$$A_i > 0, A_1 < 0, A_2 < 0, \ldots, A_{i-1} < 0, A_{i+1} < 0, \ldots, A_n < 0.$$

Если $d\xi_i = 0$, то $d^2U < 0$; поэтому остается рассмотреть лишь тот случай, когда $d\xi_i$ отлично от нуля.

В этом случае выражения (6) и (7) можно разделить соответственно на $d\xi_i^2$ и на $d\xi_i$, получаем:

$$d^2U = d\xi_i^2(A_1\eta_1^2 + A_2\eta_2^2 + \ldots + A_{i-1}\eta_{i-1}^2 + A_i + A_{i+1}\eta_{i+1}^2 + \ldots + A_n\eta_n^2) < 0 \qquad (9)$$

и:

$$B_1\eta_1 + B_2\eta_2 + \ldots + B_{i-1}\eta_{i-1} + B_i + B_{i+1}\eta_{i+1} + \ldots + B_n\eta_n = 0, \qquad (10)$$

где:

$$\eta_k = \frac{d\xi_k}{d\xi_j}.$$

Из (9) выводим, что d^2U может всегда оставаться отрицательным лишь в том случае, если наибольшее значение величины

$$A_1\eta_1^2 + A_2\eta_2^2 + \ldots + A_{i-1}\eta_{i-1}^2 + A_i + A_{i+1}\eta_{i+1}^2 + \ldots + A_n\eta_n^2 \qquad (11)$$

[6] отрицательно. Обозначим значение выражения (11) для краткости символом Y и, продифференцировав вспомогательное выражение:

$$Z = Y - 2\lambda(B_1\eta_1 + B_2\eta_2 + \ldots + B_{i-1}\eta_{i-1} + B_i + B_{i+1}\eta_{i+1} + \ldots + B_n\eta_n),$$

получим:

$$\frac{1}{2}\frac{dZ}{d\eta_1} = A_1\eta_1 - \lambda B_1 = 0,\ \frac{1}{2}\frac{dZ}{d\eta_2} = A_2\eta_2 - \lambda B_2 = 0, \text{ и т.д.};$$

отсюда:

$$\eta_1 = \lambda\frac{B_1}{A_1},\ \eta_2 = \lambda\frac{B_2}{A_2}, \ldots,\ \eta_{i-1} = \lambda\frac{B_{i-1}}{A_{i-1}},\ \eta_{i+1} = \lambda\frac{B_{i+1}}{A_{i+1}}, \ldots,\ \eta_n = \lambda\frac{B_n}{A_n}. \qquad (12)$$

Подставляя эти значения в (10), найдем λ:

$$\lambda = -\frac{B_i}{\frac{B_1^2}{A_1} + \frac{B_2^2}{A_2} + \ldots + \frac{B_{i-1}^2}{A_{i-1}} + \frac{B_{i+1}^2}{A_{i+1}} + \ldots + \frac{B_n^2}{A_n}}. \qquad (13)$$

Подстановка же (12) и (13) в (11) даст наибольшее значение Y в виде:

$$Y_{\max} = A_i + \lambda^2 \left(\frac{B_1^2}{A_1} + \frac{B_2^2}{A_2} + \ldots + \frac{B_{i-1}^2}{A_{i-1}} + \frac{B_{i+1}^2}{A_{i+1}} + \ldots + \frac{B_n^2}{A_n} \right) =$$

$$= A_i \frac{\dfrac{B_1^2}{A_1} + \dfrac{B_2^2}{A_2} + \ldots + \dfrac{B_n^2}{A_n}}{\dfrac{B_1^2}{A_1} + \dfrac{B_2^2}{A_2} + \ldots + \dfrac{B_{i-1}^2}{A_{i-1}} + \dfrac{B_{i+1}^2}{A_{i+1}} + \ldots + \dfrac{B_n^2}{A_n}}. \tag{14}$$

Отсюда легко усмотреть, что если A_i положительно, то может быть отрицательным только в том случае, если:

$$\Omega = \frac{B_1^2}{A_1} + \frac{B_2^2}{A_2} + \ldots + \frac{B_n^2}{A_n} > 0. \tag{15}$$

Таким образом, мы определили все условия, при соблюдении которых бюджет устойчив. Я предлагаю назвать *нормальным* такой бюджет, для которого все A_i меньше нуля. Он всегда устойчив, если первое условие равновесия (2) соблюдено, и мы имеем $\Omega < 0$.

Напротив, назовем бюджет анормальным, для которого лишь одна из величин A_i положительна. Условия его устойчивости даются соотношениями (2) и (15), т.е. первым условием равновесия и неравенством $\Omega > 0$.

Наконец, если две или больше величин A_i положительны, то бюджет ни в каком случае не может быть устойчивым.

4. Определение величин c_{ik}, A_i и B_i

[7] Из (4) следует, что:

$$dx_i^2 = \sum_k (c_{ik}^2 d\xi_k^2) + \sum_{k} \sum_{l} (c_{ik} c_{il} d\xi_k d\xi_l)$$

$$k \neq l$$

$$dx_i dx_j = \sum_k (c_{ik} c_{jk} d\xi_k^2) + \sum_{k} \sum_{l} (c_{ik} c_{jl} d\xi_k d\xi_l).$$

$$k \neq l$$

Подставляя это выражение в (3), получаем коэффициент при $d\xi_i^2$:

$$\begin{gathered} A_i = c_{1i}\left(u_{11}c_{1i} + u_{12}c_{2i} + \ldots + u_{1n}c_{ni}\right) + \\ c_{2i}(u_{21}c_{1i} + u_{22}c_{2i} + \ldots + u_{2n}c_{ni}) + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ c_{ni}(u_{n1}c_{1i} + u_{n2}c_{2i} + \ldots + u_{nn}c_{ni}) = 0 \end{gathered} \tag{16}$$

и половину коэффициента от $d\xi_i d\xi_j$:

$$A_{ij} = c_{1i}\left(u_{11}c_{1j} + u_{12}c_{2j} + \ldots + u_{1n}c_{nj}\right) + \tag{17}$$
$$c_{2i}(u_{21}c_{1j} + u_{22}c_{2j} + \ldots + u_{2n}c_{nj}) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$c_{ni}(u_{n1}c_{1j} + u_{n2}c_{2j} + \ldots + u_{nn}c_{nj}) = 0.$$

Припоминая условия (5), получим из (17) следующую систему из $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений:

[число уравнений]

$$[n-1]\begin{cases} u_{11}c_{12} + u_{12} = 0 & \text{ибо } A_{12} = 0, \\ u_{11}c_{13} + u_{12}c_{23} + u_{13} = 0 & \text{ибо } A_{13} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u_{11}c_{1n} + u_{12}c_{2n} + u_{13}c_{3n} + \ldots + u_{1n} = 0 & \text{ибо } A_{12} = 0, \end{cases}$$

$$[n-2]\begin{cases} u_{11}c_{12} + u_{12} = 0 & \text{ибо } A_{23} = 0, \\ u_{11}c_{13} + u_{12}c_{23} + u_{13} = 0 & \text{ибо } A_{24} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u_{11}c_{1n} + u_{12}c_{2n} + u_{13}c_{3n} + \ldots + u_{1n} = 0 & \text{ибо } A_{2n} = 0, \end{cases} \tag{18}$$

[2]

$$\begin{cases} u_{n-2,1}c_{1,n-1} + u_{n-2,2}c_{2,n-1} + \ldots + u_{n-2,n-2}c_{n-2,n-1} + u_{n-2,n-1} = 0 & \text{ибо } A_{23} = 0, \\ u_{n-2,1}c_{1,n} + u_{n-2,2}c_{2,n} + \ldots + u_{n-2,n-1}c_{n-1,n} + u_{n-2,n} = 0 & \text{ибо } A_{24} = 0, \end{cases}$$

$$[1]\left\{u_{n-1,1}c_{1,n} + u_{n-1,2}c_{2,n} + \ldots + u_{n-1,n-1}c_{n-1,n} + u_{n-1,n} = 0 \right. \qquad \text{ибо } A_{23} = 0,$$

[8] Эта система составлена из различных независимых друг от друга линейных систем (I, $A_{12} = 0$; II, $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$; III, $A_{14} = 0$, $A_{24} = 0$, $A_{34} = 0$; и т.д.), которые легко решаются.

Составим [определитель]:

$$R_1 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1i} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i1} & u_{i2} & \ldots & u_{ii} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

где $u_{kl} = u_{lk}$; и пусть $R_{i(kl)} = R_{i(lk)}$— миноры от R_i. Из (18) получаем:

$$c_{ij} = \frac{R_{j(ij)}}{R_{j(jj)}} = \frac{R_{j(ij)}}{R_{j-1}}. \tag{20}$$

Возвращаясь к (16), заметим, что в силу условий (5) все строки от $(i + 1)$ до n аннулируются (si annulano), а в силу (18) аннулируются также и строки от 1 до $(i - 1)$. Отсюда имеем:

$$A_i = u_{i1}c_{1i} + u_{i2}c_{2i} + \ldots + u_{ii} = \frac{1}{R_{i-1}}\left(u_{i1}R_{i(i1)} + u_{i2}R_{i(i2)} + \ldots + u_{ii}R_{i(ii)}\right) = \frac{R_i}{R_{i-1}}. \quad (21)$$

Если затем положим, что:

$$H_{i(j)} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1,j-1} & p_1 & u_{1,j+1} & \ldots & u_{1i} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2,j-1} & p_2 & u_{2,j+1} & \ldots & u_{2i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i1} & u_{i2} & \ldots & u_{i,j-1} & p_i & u_{i,j+1} & \ldots & u_{ii} \end{vmatrix} =$$
$$= p_1R_{i(1j)} + p_2R_{i(2j)} + \ldots + p_iR_{i(ij)}, \quad (22)$$

то найдем с помощью (8):

$$B_i = \frac{1}{R_{i-1}}\left(p_1R_{i(1i)} + p_2R_{i(2i)} + \ldots + p_iR_{i(ii)}\right) = \frac{H_{i(i)}}{R_{i-1}}. \quad (23)$$

Примем во внимание, что формулы (21) и (23) сохранят всю свою общность, если положим $1 = R_0$; в таком случае (как это непосредственно следует из (8) и (16), получим $A_1 = \frac{R_1}{R_0} = u_{11}$ и $B_1 = \frac{H_{1(1)}}{R_0} = p_1$.

5. Определение значения Ω

Подставляя выражения (21) и (23) в (15), получаем:

$$\Omega = \frac{H_{1(1)}^2}{R_0R_1} + \frac{H_{2(2)}^2}{R_1R_2} + \ldots + \frac{H_{n(n)}^2}{R_{n-1}R_n}. \quad (24)$$

[9] Обозначая эту величину символом Ω_n, покажем, что ее можно представить в более симметричной форме. Начнем с того, что положим:

$$M_i = \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_i \\ p_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{2i} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_i & u_{i1} & u_{i2} & \cdots & u_{ii} \end{vmatrix} = p_1H_{i(1)} + p_2H_{i(2)} + \ldots + p_iH_{i(i)}. \quad (25)$$

Тогда будем иметь:

$$\Omega_2 = \frac{H_{1(1)}^2}{R_0R_1} + \frac{H_{2(2)}^2}{R_1R_2} = \frac{p_1^2}{u_{11}} + \frac{\left(p_2u_{11} - p_1u_{12}\right)^2}{u_{11}\left(u_{11}u_{22} - u_{12}^2\right)} = \frac{p_1^2u_{22} + p_2^2u_{11} - 2p_1p_2u_{12}}{u_{11}u_{22} - u_{12}^2} = -\frac{M_2}{R_2}. (26)$$

Предыдущий, только что найденный результат можно обобщить. Для этого достаточно показать, что если он верен для Ω_i, то он будет справедлив и для Ω_{i+1}; так что:

$$\Omega_{i+1}=\frac{H_{1(1)}^2}{R_0R_1}+\frac{H_{2(2)}^2}{R_1R_2}+\ldots+\frac{H_{i(i)}^2}{R_{i-1}R_i}+\frac{H_{(i+1),(i+1)}^2}{R_iR_{i+1}}=$$

$$=-\frac{M_i}{R_i}+\frac{H_{(i+1),(i+1)}^2}{R_iR_{i+1}}=-\frac{M_iR_{i+1}-H_{(i+1),(i+1)}^2}{R_iR_{i+1}}. \tag{27}$$

Чтобы преобразовать числитель в другую форму, применим известную формулу теории определителей:

$$\Delta_{ij}\Delta_{kl}-\Delta_{ik}\Delta_{jl}=\Delta\Delta_{(ij)(kl)}, \tag{28}$$

где величины, стоящие в левой части (del primo membro), — миноры первого порядка определителя Δ (первый значок соответствует вычеркиваемой строке, а второй — столбцу), а $\Delta_{ij(kl)}$— минор второго порядка, получающийся путем зачеркивания строк i и κ и столбцов j и l.

Обозначим затем через $M_{i(kk)}$ и через $M_{i(kl)}$ миноры [определителя] M_i, корреспондирующие соответственно с элементами u_{kk} и u_{kl}, а через $M_{i(00)}$, $M_{i(01)}$, $M_{i(02)}$,..., а также $M_{i(00)}$, $M_{i(10)}$, $M_{i(20)}$,..., — миноры первой строки и первого столбца.

Имеем:

$$\begin{cases} M_i=M_{(i+1),(i+1,i+1)}, \\ R_i=M_{i(00)}=M_{(i+1),(i+1,i+1)(00)}, \\ H_{(i+1),(i+1)}=-M_{(i+1),(0,i+1)}=-M_{(i+1),(i+1,0)}. \end{cases} \tag{29}$$

Пользуясь этой [символьной] нотацией и вспоминая (28), легко найдем:

[10] $$M_iR_{i+1}-H_{(i+1),(i+1)}^2=M_{(i+1),(i+1,i+1)}M_{(i+1),(00)}-M_{(i+1),(i+1,0)}M_{(i+1),(i+1,0)}= \tag{30}$$

$$=M_{i+1}M_{(i+1),(i+1,i+1)(00)}=M_{i-1}R_i;$$

а отсюда, подставляя в (27) предыдущее значение (valore), [получаем]:

$$\Omega_{i+1}=-\frac{M_{i+1}}{R_{i+1}}. \tag{31}$$

Мы уже видели, что эта формула правильна для Ω_2; тем самым доказана ее справедливость (validità generale) [дли любого n]. Таким образом:

$$\Omega_n=-\frac{M_n}{R_n}, \tag{32}$$

или более кратко:

$$\Omega=-\frac{M}{R}. \tag{32'}$$

6. Изменения в индивидуальном спросе

Из (2) следует, что:

$$u_1=p_1u',\ u_2=p_2u',\ldots,\ u_n=p_nu'. \tag{33}$$

Беря производные по s, получим:

$$\begin{cases} u_{11}\dfrac{\partial x_1}{\partial s}+u_{12}\dfrac{\partial x_2}{\partial s}+\ldots+u_{1n}\dfrac{\partial x_n}{\partial s}=p_1\dfrac{\partial u'}{\partial s}, \\ u_{21}\dfrac{\partial x_1}{\partial s}+u_{22}\dfrac{\partial x_2}{\partial s}+\ldots+u_{2n}\dfrac{\partial x_n}{\partial s}=p_2\dfrac{\partial u'}{\partial s}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n1}\dfrac{\partial x_1}{\partial s}+u_{n2}\dfrac{\partial x_2}{\partial s}+\ldots+u_{nn}\dfrac{\partial x_n}{\partial s}=p_n\dfrac{\partial u'}{\partial s}. \end{cases} \tag{34}$$

Решая эту систему [линейных уравнений], получаем:

$$\frac{\partial x_i}{\partial s}=\frac{H_{n(i)}}{R_n}\frac{\partial u'}{\partial s}. \tag{35}$$

Дифференцируя теперь [обе части] уравнения (1) по s, имеем:

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial s}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial s}+\ldots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial s}=1; \tag{36}$$

и заменим затем $\dfrac{\partial x_1}{\partial s},\dfrac{\partial x_2}{\partial s},\ldots,\left[\dfrac{\partial x_n}{\partial s}\right]$ на выражения, взятые из (35):

$$\frac{\partial u'}{\partial s}=\frac{R_n}{p_1H_{n(1)}+p_2H_{n(2)}+\ldots+p_nH_{n(n)}}=-\frac{R_n}{M_n}=\frac{1}{\Omega}. \tag{37}$$

[11] Поэтому [из (35)] получаем:

$$\frac{\partial x_i}{\partial s}=-\frac{H_{n(i)}}{M_n}=\frac{M_{n(0i)}}{M_n}. \tag{38}$$

Невозможно сформулировать никакого точного и достоверного (vera) утверждения для всех случаев относительно знака этого выражения. Мы знаем лишь, что значение $\dfrac{\partial x_i}{\partial s}$ может быть как положительным, так и отрицательным; и опыт подтверждает, что в действительности имеют место оба эти случая. Отсюда представляется необходимым установить [такую] классификацию благ: те, количества которых увеличиваются с ростом дохода, назовем *относительно необходимыми* (relativamente indispensabili), а те, количества которых уменьшаются мри росте дохода, — *относительно не необходимыми* (relativamente dispensabili).

Для примера предположим, что бедная семья вследствие увеличения уровня дохода потребляет больше мяса, сахара, чая и меньше хлеба и картофеля. Первые продукты следует поэтому рассматривать как относительно необходимые, вторые же — как относительно не необходимые для данной семьи.

Принимая во внимание формулу (37) и припоминая обсуждение проблемы устойчивости, мы непосредственно заключаем, что в случае нормального бюджета предельная полезность денег должна падать при увеличении дохода и расти с его уменьшением. В случае анормального бюджета происходит обратное.

7. Изменения спроса как функции цены

Беря производные от уравнений (33) по p_i, получаем:

$$\begin{cases} u_{11}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_i}+u_{12}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_i}+\ldots+u_{1n}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_i}=p_1\dfrac{\partial u'}{\partial p_i}, \\ u_{21}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_i}+u_{22}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_i}+\ldots+u_{2n}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_i}=p_2\dfrac{\partial u'}{\partial p_i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{i1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_i}+u_{i2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_i}+\ldots+u_{in}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_i}=p_i\dfrac{\partial u'}{\partial p_i}+u' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_i}+u_{n2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_i}+\ldots+u_{nn}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_i}=p_n\dfrac{\partial u'}{\partial p_i}, \end{cases} \tag{39}$$

[12] и поэтому:

$$\begin{cases} R_n\dfrac{\partial x_i}{\partial p_i}=H_{n(i)}\dfrac{\partial u'}{\partial p_i}+u'R_{n(ii)}, \\ R_n\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i}=H_{n(j)}\dfrac{\partial u'}{\partial p_i}+u'R_{n(ij)}. \end{cases} \tag{40}$$

Дифференцируя далее обе части (1) по p_i, имеем:

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial p_i}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial p_i}+\ldots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial p_i}=-x; \tag{41}$$

и подставляя (40) в (41), введем в целях симметрии обозначение $-M_{n(0i)}$ вместо $H_{n(i)}$ и получаем:

$$\frac{\partial u'}{\partial p_i}=\frac{u'M_{n(0i)}-x_iR_n}{M_n}. \tag{42}$$

Подставляя затем найденное предыдущее выражение в (40), находим:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}=u'\frac{R_{n(ii)}M_n+M^2_{n(0i)}}{R_nM_n}-x_i\frac{M_{n(0i)}}{M_n}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i}=u'\frac{R_{n(ij)}M_n+M_{n(0i)}M_{n(0j)}}{R_nM_n}-x_j\frac{M_{n(0j)}}{M_n}. \tag{44}$$

С помощью преобразований, аналогичных примененным в п. 5, можно заметно упростить эти выражения. На самом деле, имеем:

$$R_{n(ii)}M_n+M^2_{n(0i)}=M_{n(00)(ii)}M_n+M_{n(0i)}M_{n(0i)}=M_{n(00)}M_{n(ii)}=R_nM_{n(ii)};$$

$$R_{n(ij)}M_n+M_{n(0i)}M_{n(0j)}=M_{n(00)(ij)}M_n+M_{n(0i)}M_{n(0j)}=M_{n(00)}M_{n(ij)}=R_nM_{n(ij)},$$

получаем для (43) и (44):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial p_i} = u' \dfrac{M_{ii}}{M} - x_i \dfrac{M_{0i}}{M}, \\ \dfrac{\partial x_j}{\partial p_i} = u' \dfrac{M_{ij}}{M} - x_i \dfrac{M_{0j}}{M}; \end{cases} \tag{45}$$

[13] т.е., основываясь на (38):

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = u' \frac{M_{ii}}{M} - x_i \frac{\partial x_i}{\partial s}, \tag{46}$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = u' \frac{M_{ij}}{M} - x_i \frac{\partial x_j}{\partial s}. \tag{47}$$

8. Зависимость спроса на какое-либо благо от его цены

Изучим теперь формулу (46) и начнем с доказательства того, что всегда справедливо неравенство:

$$\frac{M_{ii}}{M} < 0. \tag{48}$$

Для этого нам необходимо проанализировать в отдельности оба случая бюджета: нормального и анормального.

I. *Бюджет нормальный*. Пользуясь обозначениями п. 5, [формулами (32) и (21)], имеем:

$$\frac{\Omega_{n-1}}{\Omega_n} = \frac{M_{n-1}}{M_n} \frac{R_n}{R_{n-1}} = \frac{M_{n-1}}{M_n} A_n.$$

Так как [при нормальном бюджете] все A_i отрицательны, а также отрицательны как Ω_{n-1}, так и Ω_n, то должно быть:

$$\frac{M_{n-1}}{M} < 0.$$

II. *Бюджет анормальный*. Будем различать два случая:

α) если $A_n > 0$, то $\Omega_{n-1} < 0$, $\Omega_n > 0$; и поэтому $\dfrac{M_{n-1}}{M} < 0$,

β) если $A_n > 0$, то $\Omega_{n-1} > 0$, $\Omega_n > 0$; и поэтому $\dfrac{M_{n-1}}{M} < 0$.

Ясно, что порядок рассмотрения благ безразличен; поэтому благо со значком *i* может быть поставлено после блага со значком *n*. И тогда получим:

$$M_n = \left(0, u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{nn}\right) = \left(0, u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{i-1,i-1}, u_{i+1,i+1}, \ldots, u_{nn} u_{ii}\right),$$
$$M_{n(ii)} = \left(0, u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{i-1,i-1}, u_{i+1,i+1}, \ldots, u_{nn}\right),$$

что при каждом значении для нового расположения системы занимает место M_{n-1}. Поэтому окажется $\dfrac{M_{n-1}}{M} < 0$.

Таким образом, мы легко можем вывести из (46) следующие *законы спроса*:

[14] I. *Спрос на благо, относительно необходимое* $\left(\frac{\partial x_i}{\partial s} > 0\right)$, *с необходимостью всегда нормален, т.е. уменьшается, если цены на него возрастают, и увеличивается, если цены падают;*

II. *Спрос на благо, относительно не необходимое* $\left(\frac{\partial x_i}{\partial s} < 0\right)$, *может в некоторых определенных случаях быть анормальным, т.е. увеличиваться с возрастанием цены и уменьшаться с ее понижением.*

Теперь положим [в (46) и (47)]:

$$k_{ii} = u'\frac{M_{ii}}{M} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i} + x_i\frac{\partial x_i}{\partial s}, \tag{49}$$

$$k_{ij} = u'\frac{M_{ij}}{M} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i\frac{\partial x_j}{\partial s}. \tag{50}$$

Можно показать, что неравенство (48) имеет вполне определенный экономический смысл. На самом деле, если цены увеличиваются на dp_i, то величину $x_i dp_i$ можно назвать *кажущимся убытком* (disavanzo apparente), так как для того, чтобы иметь возможность купить те же количества всех тех же благ, что и раньше, доход должен увеличиться на $ds = x_i dp_i$. Но индивид для того, чтобы иметь возможность сохранить неизменным (immutato) свой прежний бюджет, не должен, однако, считать его предпочтительным по сравнению со всеми другими. Будут иметь место различные остаточные изменения (variazioni residue) в спросе:

$$\begin{cases} dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial p_i}dp_i + \dfrac{\partial x_i}{\partial s}ds = \left(u'\dfrac{M_{ii}}{M} - x_i\dfrac{\partial x_i}{\partial s}\right)dp_i + \dfrac{\partial x_i}{\partial s}(x_i dp_i) = u'\dfrac{M_{ii}}{M}dp_i = k_{ii}dp_i \\ dx_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial p_i}dp_i + \dfrac{\partial x_j}{\partial s}ds = \left(u'\dfrac{M_{ij}}{M} - x_j\dfrac{\partial x_j}{\partial s}\right)dp_i + \dfrac{\partial x_j}{\partial s}(x_i dp_i) = u'\dfrac{M_{ii}}{M}dp_i = k_{ii}dp_i. \end{cases} \tag{51}$$

Увеличение цены dp_i, сопровождаемое увеличением дохода, равным кажущемуся убытку, можно назвать *компенсированным изменением* (variazione compensata) цены. В этом случае k_{ii} и k_{ij} можно рассматривать как остаточные изменения спроса на каждое скомпенсированное изменение цены, и их можно назвать *остаточной изменчивостью* (variabilità residue) соответственно x_i и x_j.

Принимая эту терминологию, можно выразить неравенство (48) в следующей форме:

III. *Остаточная изменчивость какого-либо блага в случае компенсированного изменения его цены всегда отрицательна*. Иначе говоря:

$$k_{ii} = u'\frac{M_{ii}}{M} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i} + x_i\frac{\partial x_i}{\partial s} < 0. \tag{52}$$

[15] Например, после вздорожания хлеба заработная плата возрастает лишь в размере, равном кажущемуся убытку, спрос же на хлеб со стороны рабочих не может остаться на первоначальном уровне, он понизится.

В заключение заметим, что если $\frac{\partial x_i}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial x_i}{\partial s}$ имеют противоположные знаки, то формула (52) распадется на следующие неравенства между численными значениями производных:

1-й случай $\frac{\partial x_i}{\partial s} > 0$, $\frac{\partial x_i}{\partial p_i} < 0$; 2-й случай $\frac{\partial x_i}{\partial s} > 0$, $\frac{\partial x_i}{\partial p_i} < 0$.

[Учитывая (52), получаем]

$$\left|\frac{\frac{\partial x_i}{\partial p_i}}{\frac{\partial x_i}{\partial s}}\right| > x_i, \tag{53}$$

$$\left|\frac{\frac{\partial x_i}{\partial p_j}}{\frac{\partial x_i}{\partial s}}\right| > x_i. \tag{54}$$

Последние формулы принадлежат к соотношениям такого рода, которые до сих нор почти не подвергались исследованию в общественной науке (scienza sociale); т.е. к таким, которые количественным образом определяются среди эмпирически измеримых данных (fatti empirici misurabili); поэтому их можно *проверить* (verificate) с помощью наблюдений реально существующих бюджетов.

9. Зависимость спроса на одно благо от цены другого

Согласно (47):

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = u'\frac{M_{ij}}{M} - x_i\frac{\partial x_j}{\partial s},\ \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = u'\frac{M_{ij}}{M} - x_j\frac{\partial x_i}{\partial s}.$$

Так как M_{ij} равно M_{ji}, то, очевидно, $k_{ij} = k_{ji}$; или:

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_j\frac{\partial x_j}{\partial s} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j\frac{\partial x_i}{\partial s}. \tag{55}$$

Это важное соотношение может быть названо *законом взаимозаменяемости* (legge di riversibilità) остаточных изменений и выражено в следующей форме.

Остаточная изменчивость блага j в случае компенсированного изменения цены p_i равна остаточной изменчивости блага i в случае компенсированного изменения цены p_j.

[Выражение] (55) входит в указанную выше группу количественным образом определимых соотношений между величинами, которые могут быть установлены наблюдением (quantità osservabili). Его эмпирическое подтверждение особенно желательно, так как им будет показано соответствие гипотезы действительности, или, по крайней мере, [ее] правдоподобие, что приращения полезности не зависят от способа изменения (variazione). Ясно, в самом деле, что если эта гипотеза не соответствует реальным явлениям (fenomeni reali) бюджета,

[16] то u_{ij} окажется не равным u_{ji}, а также и M_{ij} окажется не равным M_{ji}, и закон взаимозаменяемости не будет обнаружен.

Продолжая исследование, напишем:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_1} = u' \frac{M_{1i}}{M} - x_1 \frac{\partial x_i}{\partial s},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_2} = u' \frac{M_{2i}}{M} - x_2 \frac{\partial x_i}{\partial s},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_n} = u' \frac{M_{ni}}{M} - x_n \frac{\partial x_i}{\partial s}.$$

Умножая эти равенства соответственно на $p_1, p_2, \dots, p_n$ и складывая их, получаем:

$$p_1 \frac{\partial x_i}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_i}{\partial p_2} + \dots + p_n \frac{\partial x_i}{\partial p_n} = \frac{u'}{M}\left(p_1 M_{1i} + p_2 M_{2i} + \dots + p_n M_{ni}\right) -$$

$$-\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n\right)\frac{\partial x_i}{\partial s}.$$

Прибавив к многочлену в первой скобке $0 \times M_{0i}$, получим сумму миноров определителя M, соответствующих элементам столбца (i), умноженных на элементы столбца (0). Сумма эта, следовательно, равна нулю; и мы получаем следующее интересное соотношение:

$$p_1 \frac{\partial x_i}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_i}{\partial p_2} + \dots + p_n \frac{\partial x_i}{\partial p_n} = -s \frac{\partial x_i}{\partial s}. \tag{56}$$

Далее, на основании (55) напишем:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = x_i \frac{\partial x_j}{\partial s} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial s},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} - \frac{\partial x_k}{\partial p_i} = x_i \frac{\partial x_k}{\partial s} - x_k \frac{\partial x_i}{\partial s}.$$

Умножая первое уравнение на x_k, а второе на x_j и вычитая второе произведение из первого, выводим:

$$x_k\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right) - x_j\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_k} - \frac{\partial x_k}{\partial p_i}\right) =$$

$$x_j\left(x_k \frac{\partial x_i}{\partial s} - x_j \frac{\partial x_k}{\partial s}\right) = x_i\left(\frac{\partial x_k}{\partial p_j} - \frac{\partial x_j}{\partial p_k}\right);$$

[17] отсюда получим

$$\frac{1}{x_i x_j}\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{1}{x_j x_k}\frac{\partial x_j}{\partial p_k} + \frac{1}{x_k x_i}\frac{\partial x_k}{\partial p_i} = \frac{1}{x_i x_k}\frac{\partial x_i}{\partial p_k} + \frac{1}{x_k x_j}\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{1}{x_j x_i}\frac{\partial x_j}{\partial p_i}. \tag{57}$$

Это *циклическое соотношение* (relazione ciclica) можно обобщить на любое число благ. В самом деле, положим $\xi_{ij} = \dfrac{\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}}{x_i x_j}$ и напишем:

$$\begin{aligned}
&\xi_{12} + \xi_{21} + \xi_{31} = \xi_{13} + \xi_{32} + \xi_{21},\\
&\xi_{13} + \xi_{34} + \xi_{41} = \xi_{14} + \xi_{43} + \xi_{31},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\xi_{1,n-1} + \xi_{n-1,n} + \xi_{n,1} = \xi_{1,n} + \xi_{n,n-1} + \xi_{n-1,1},
\end{aligned}$$

складывая предыдущие равенства, находим:

$$\xi_{12} + \xi_{23} + \xi_{34} + \ldots + \xi_{n-1,n} + \xi_{n,1} = \xi_{1,n} + \xi_{n,n-1} + \ldots + \xi_{32} + \xi_{21}. \tag{58}$$

10. Теория бюджета [потребителя] в случае, когда предельная полезность каждого блага является функцией количества лишь этого блага

Этот частный случай имел особо важное значение в истории экономической науки, заложив первое основание теории предельной полезности. Все авторы, разрабатывавшие теорию бюджета [потребители], считали необходимым допускать так называемый закон насыщения потребностей (закон Госсена), но они не могли придать своим результатам общего значения (validità generale). Этот закон Госсена все еще остается тем, чем он был всегда: т.е. эмпирическим положением, а не строго доказанной истиной (una verità dimostrata); и многие авторы при случае выражали сомнение в его общей значимости (validità generale). По общему мнению, если и существуют *исключения* из этого закона, то они редки; однако следует отметить, что законы природы (leggi naturali), допускающие исключения и расходящиеся [с ходом] некоторых вещей (divergono qualche cosa), мало чем отличаются от правил грамматики. С точки зрения логики нельзя назвать *законом* то правило, которое допускает исключения, — несущественно, будет ли их много или мало — при условиях или обстоятельствах *неизвестных* (ignote). Кроме того, в нашем случае сомнительно, чтобы исключения были столь редкими, как хотят в этом уверить; ибо этот аргумент никогда не подвергался [18] исследованию на основе научно поставленных (ordinate scientificamente) эмпирических наблюдений. И мы полагаем, что специальные исследования, в особенности касающиеся жизни и работы (al lavoro) беднейших классов, будут вознаграждены неожиданными результатами.

Проводимые в этом направлении исследования нуждаются в лежащей в их основе теории (la base di una teoria), которая до сих пор почти совершенно отсутствовала. Насколько нам известно, единственным автором, изучавшим теорию спроса на блага ненасыщающие, был Умберто Риччи (Umberto Ricci). Пользуясь математическим анализом, он пришел к заключению, что спрос на благо ненасыщающее увеличивается с ростом цены, если:

$$\frac{p_1^2}{u_{11}}+\frac{p_2^2}{u_{22}}+\ldots+\frac{p_n^2}{u_{nn}}<0.$$

Но ввиду того, что, как мы увидим, левая часть (primo membro) этого неравенства есть не что иное, как наш критерий устойчивости, естественно, что бюджет Риччи оказывается неустойчивым. Так что вследствие роста цены и нарушения равновесия он не будет стремиться приближаться к сместившемуся положению (al punto spostato) наименьшей полезности, а [будет стремиться] к тому, чтобы от него удаляться. Поэтому, согласно теории равновесия, результат Риччи относится к такому случаю, который не может осуществиться в действительности (nella realità), а потому не соответствует истине (al vero).

Развивая общую теорию, мы теперь без труда найдем теоретическое выражение и для рассматриваемого случая.

Из фундаментального выражения условий устойчивости [(3)]:

$$d^2U=u_{11}dx_1^2+u_{22}dx_2^2+\ldots+u_{nn}dx_n^2<0,$$

с очевидностью вытекает, что:

I. Бюджет устойчив, если все u_{ii} отрицательны;

II. Если только одно из u_{ii} положительно, бюджет устойчив в случае, когда $\Omega>0$, и неустойчив, когда $\Omega<0$;

III. Бюджет никогда не будет устойчивым, если более чем одно из u_{ii} положительно.

Применим метод п. 5 для определения Ω; а именно тот, который облегчает вывод общей формулы, принимая во внимание, что все $u_{ij}=0$. Отсюда имеем:

$$M=\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ p_1 & u_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ p_2 & 0 & u_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n & 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}=u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}\left(\frac{p_1^2}{u_{11}}+\frac{p_2^2}{u_{22}}+\ldots+\frac{p_n^2}{u_{nn}}\right),$$

$$R=\begin{vmatrix} u_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}=u_{11}u_{22}\ldots u_{nn},$$

[19] и как следствие

$$\Omega=\frac{M}{R}=\frac{p_1^2}{u_{11}}+\frac{p_2^2}{u_{22}}+\ldots+\frac{p_n^2}{u_{nn}}. \tag{59}$$

Аналогично получаем:

$$H_i=-M_{0i}=u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}\frac{p_i}{u_{ii}},$$

$$M_{ii} = -u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}\frac{\Omega - \dfrac{p_i^2}{u_{ii}}}{u_{ii}},$$

$$M_{ij} = u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}\frac{p_i p_j}{u_{ii}u_{jj}},$$

а отсюда [из формул (38), (46), (47)]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial s} = \dfrac{p_i}{u_{ii}\Omega} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial p_i} = \dfrac{u'\left(\Omega - \dfrac{p_i^2}{u_{ii}}\right) - p_i x_i}{u_{ii}\Omega} \\ \dfrac{\partial x_j}{\partial p_i} = -\dfrac{p_j(u_i + x_i u_{ii})}{u_{ii}u_{jj}\Omega}. \end{cases} \qquad (60)$$

Анализ полученной формулы приводит к следующим заключениям.

Если бюджет [потребителя] *нормальный*, то спрос на каждое благо увеличивается вместе с возрастанием дохода и уменьшается с ростом цены на это благо. Если бюджет является *анормальным*, то приращение дохода означает (determina) возрастание спроса для благ ненасыщающих и его уменьшение — для благ насыщающих. Кроме того, с увеличением цены блага ненасыщающего спрос на него должен всегда уменьшаться; противоположное может иметь место только в случае блага насыщающего. Насыщающие блага в рассматриваемом случае являются относительно не необходимыми (relativamente dispensabili), и результат согласуется с общими законами спроса, выведенными ранее.

11. Определение (возможное с помощью количественных эмпирических данных) второй производной от функции полезности

Величины $\dfrac{\partial x_1}{\partial s}, \dfrac{\partial x_2}{\partial s}, \ldots, \dfrac{\partial x_n}{\partial s}$ и все количества вида $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_i}$ и $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}$ могут быть определены наблюдениями над реально существующими бюджетами; поэтому мы их будем рассматривать как данные, эмпирически [20] измеримые, и воспользуемся ими для определения u_{ii} и u_{ij}. С помощью принятой ранее системы символьной нотации и выполнения формул (38), (49) и (50) находим:

$$\begin{cases} M_{0i} = M\dfrac{\partial x_i}{\partial s}, \\ M_{ii} = \dfrac{M}{u'}k_{ii}, \\ M_{ij} = \dfrac{M}{u'}k_{ij}. \end{cases} \qquad (61)$$

Обозначая далее символом Δ определитель, образованный из миноров от M, найдем из известной формулы теории определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R & M_{01} & M_{02} & \dots & M_{0n} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n0} & M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix} = M^n \tag{62}$$

и

$$0 = \frac{\Delta_{00}}{M^{n-1}}, p_i = \frac{\Delta_{0i}}{M^{n-1}}, u_{ii} = \frac{\Delta_{ii}}{M^{n-1}}, u_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{M^{n-1}}. \tag{63}$$

Подставим в Δ выражения для миноров, взятые из (61):

$$\Delta = \begin{vmatrix} R & M\frac{\partial x_1}{\partial s} & M\frac{\partial x_2}{\partial s} & \dots & M\frac{\partial x_n}{\partial s} \\ M\frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{M}{u'}k_{11} & \frac{M}{u'}k_{12} & \dots & \frac{M}{u'}k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M\frac{\partial x_n}{\partial s} & \frac{M}{u'}k_{n1} & \frac{M}{u'}k_{n2} & \dots & \frac{M}{u'}k_{nn} \end{vmatrix} = \frac{M^{n+1}}{u'^{n-1}} \begin{vmatrix} \frac{R}{u'M} & \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s} & k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}. \tag{64}$$

Полагая, для краткости:

$$\theta = \frac{-R}{u'M} = \frac{1}{u'\Omega} \tag{65}$$

[21]

$$N = \begin{vmatrix} -\theta & \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s} & k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}, \tag{66}$$

получаем из (62) и (64): $\Delta = \frac{M^{n+1}}{u'^{n-1}} N = M^n$; а отсюда:

$$M = \frac{u'^{n-1}}{N}. \tag{67}$$

Применяя тот же прием к минорам [определителя] Δ, находим:

$$\Delta_{00} = \frac{M^n}{u'^n} N_{00}, \Delta_{0i} = \frac{M^n}{u'^{n-1}} N_{0i}, \Delta_{ii} = \frac{M^n}{u'^{n-2}} N_{ii}, \Delta_{ij} = \frac{M^n}{u'^{n-2}} N_{ij}.$$

Подставляя эти значения в (63) и учитывая (67), получаем:

$$0=\frac{N_{00}}{u'N},p_i=\frac{N_{0i}}{N},u_{ii}=u'\frac{N_{ii}}{N},u_{ij}=\frac{N_{ij}}{N}. \tag{68}$$

Введем теперь величины:

$$P=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s} & k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{и } Q=\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{11} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix}, \tag{69}$$

которые можно полностью выразить с помощью эмпирических данных. Ввиду того, что $Q=N_{00}=0$, как это следует из (68), находим [с учетом (66)] следующие окончательные формулы:

$$u_{ii}=u'\left(\frac{P_{ii}}{P}-\theta\frac{Q_{ii}}{P}\right), \tag{70}$$

$$u_{ij}=u'\left(\frac{P_{ij}}{P}-\theta\frac{Q_{ij}}{P}\right). \tag{71}$$

Чтобы показать, что это решение является окончательным, нужно доказать невозможность получить θ как функцию эмпирических данных.

Для этого предположим, что верно противное. Тогда [22] вторую производную функции полезности можно было бы выразить как функцию от u' и от количеств благ $x_1,x_2,\ldots,x_n$; и мы имели бы:

$$u_{i1}=u'\phi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$
$$u_{i2}=u'\phi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{in}=u'\phi_n(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Кроме того, так как всегда возможно (по крайней мере, в теории) найти функции индивидуального спроса, то цены могли бы быть выражены как эмпирические функции количеств $x_1,x_2,\ldots,x_n$. И можно написать, что:

$$u_i=u'p_i=u'f(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{72}$$

Обозначая далее через ψ_k отношение (quoziente) $\dfrac{\phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i1}}{u_i} = \dfrac{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_1}}{u_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}(\lg u_i) = \psi_1, \\ \dfrac{u_{i2}}{u_i} = \dfrac{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_2}}{u_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\lg u_i) = \psi_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{u_{in}}{u_i} = \dfrac{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_n}}{u_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}(\lg u_i) = \psi_n. \end{cases} \quad (73)$$

Если наша гипотеза, что полезность не зависит от способа изменения, соответствует действительности, то должны существовать, как это легко показать, равенства вида $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}$ и т.д.; и функция $\lg u_i$ может быть определена при помощи известного приема интегрирования полного дифференциала:

$$d(\lg u_i) = \psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2 + \ldots + \psi_n dx_n.$$

Таким образом, получается, что:

$$\lg u_i = \Psi(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \lg C;$$
$$u_i = Ce^{\Psi}, \quad (74)$$

где С — постоянная интегрирования, не зависящая от $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Если за единицу измерения принять предельную полезность денег, соответствующую какому-нибудь определенному состоянию бюджета, напр[имер] такому, в котором $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, и положить для краткости: $\Psi_0 = \Psi(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $f_0 = f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, [23] то будем иметь:

$$u' = \frac{u_i}{p_i} = \frac{Ce^{\Psi_0}}{f_0} = 1;$$

а отсюда $C = f_0 e^{-\Psi_0}$.

Таким образом, получается решение:

$$u_i = f_0 e^{\Psi - \Psi_0}. \quad (75)$$

Зная, кроме того, все предельные полезности как функции от $x_1,x_2,\ldots,x_n$, возможно было бы найти общую полезность (l'utilità totale), применяя тот же метод к уравнениям:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = u_1, \frac{\partial U}{\partial x_2} = u_2, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n} = u_n.$$

Постоянная интегрирования нашлась бы из уравнения:

$$U_0 = \Phi(0,0,\ldots,0) = 0.$$

Итак, мы видим, что если положить θ известной, то все предельные полезности и сама функции полезности могли бы быть однозначно определены как функции от эмпирических данных. Однако, поскольку этот вопрос полностью выяснен в исследованиях В. Парето, мы знаем, что когда все предельные полезности составляют, по предположению, функции от всех благ, то из этого невозможно получить однозначное решение (la determinazione univoca). Поэтому заключаем, что невозможно также определить и [величину] θ, и что ее нужно рассматривать как совершенно произвольную функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

12. О понятии полезности

То определение полезности, которое было дано в п. 2, будучи сформулировано в виде чисто эмпирического понятия, может служить нам основой для законченной (dell'intera) теории бюджета. Однако, поскольку остаются неопределенными величины предельных полезностей и их изменения, связанные с изменениями в количествах благ, обнаруживается неустранимое расхождение между двумя точками зрения на проблему полезности. В самом деле, поскольку величина θ произвольна, мы можем объяснять наблюдаемые и измеримые факты человеческого поведения (fatti visibili e misurabili della condotta umana), приписывая величине: $u_{ij} = \frac{P_{ij}}{P} - \theta \frac{Q_{ij}}{P}$ или величине: $u_{ii} = \frac{P_{ii}}{P} - \theta \frac{Q_{ii}}{P}$ любое значение по своему желанию: большее или меньшее, положительное или отрицательное. Окажется позволительно, таким образом, связать все факты моего экономического [24] поведения с какой угодно гипотезой относительно зависимости, скажем, например, между количеством яблок, мною съеденных, и предельной полезностью бумаги, на которой я собираюсь писать; предположим, что с потреблением одного лишнего яблока в месяц полезность листа бумаги увеличивается в тысячу раз или же становится в тысячу раз меньшей. Оба допущения придадут определенные значения всем величинам u_{ii} и u_{ij}; и между обоими способами *объяснения* (spiegazione) не окажется никакого противоречия с действительными фактами поведения (fatti reali della condotta).

Не будет противоречия и между психологическим понятием полезности и результатами, к которым мы пришли, так как ясно, что наше определение полезности (*indice di ofelimità* Парето) совершенно чуждо психологии. Однако такой вывод нас нс удовлетворяет; потому что, придерживаясь полной логической независимости *методов* экономической науки от методов психологии, мы все же не в состоянии отрицать существование полнейшей взаимозависимости между *фактами*, изучаемыми обеими дисциплинами.

Поэтому нам представляется необходимым дополнить формальное понятие полезности так, чтобы поставить в тесную связь точку зрения экономической науки с точкой зрения психологической науки на проблему полезности. И мы как раз предлагаем рассмотреть, не явится ли приемлемым следующее определение.

Полезность какой-либо комбинации благ представляет собой величину, обладающую следующими свойствами: она является большей для комбинации, которой индивид оказывает предпочтение; и *ее изменения непосредственно ощущаются субъектом*.

Для нашей теперешней цели представляется излишним более глубокое исследование характера *проявления* (manifestazioni) полезности в сознании; поэтому мы откладываем эту задачу на дальнейшее изучение. На основании предыдущего определения мы можем сказать: если индивид после увеличения количества блага α не замечает никакого изменения (modiltcazione) в своем субъективном отношении к благу β, то предельная полезность этого последнего не претерпела ощутимой вариации, и здесь имеет место приближенное равенство: $u_{\alpha\beta} = 0$.

Под [выражением] «отсутствие изменения в субъективном отношении к благу» мы имеем в виду объединить все возможные психические явления (fenomeni psichici): удовлетворение (piacere), полученное посредством (mediante) потребления, огорчение от потери, интенсивность желания обладания и т.д. Не должно быть никакого изменения (modificazione) такого рода, потому что [в этом случае] допустимо заявлять о полной независимости предельной полезности одного блага от количества другого блага.

Добавление, предложенное выше к определению полезности, заметно изменяет его с математической точки зрения; потому что делает определенными все величины, о которых идет речь. На самом деле, получив θ из уравнения $u_{\alpha\beta} = 0$, мы можем подставить его значение в выражения всех других производных второго порядка и с помощью метода предыдущего параграфа — найти предельную полезность и функцию полезности.

Все же сомнительно, можно ли принять предложенное определение. [25] Так как если предположить, что индивид не обнаруживает зависимости не только между благом α и благом β, но также и между благами γ и δ, ε и ς, и т.д., то получается:

$$\begin{cases} u_{\alpha\beta} = \dfrac{u'}{P}\left(P_{\alpha\beta} - \theta Q_{\alpha\beta}\right) = 0 \\ u_{\gamma\delta} = \dfrac{u'}{P}\left(P_{\gamma\delta} - \theta Q_{\gamma\delta}\right) = 0 \\ u_{\varepsilon\varsigma} = \dfrac{u'}{P}\left(P_{\varepsilon\varsigma} - \theta Q_{\varepsilon\varsigma}\right) = 0, \end{cases} \tag{76}$$

откуда вытекает, что:

$$\theta = \frac{P_{\alpha\beta}}{Q_{\alpha\beta}} = \frac{P_{\gamma\delta}}{Q_{\gamma\delta}} = \frac{P_{\varepsilon\varsigma}}{Q_{\varepsilon\varsigma}} = \ldots$$

Подтвердит ли опыт эти соотношения? В этом вся проблема.

13. О сознательности экономического поведения

Попытаемся проникнуть (penetrare) в смысл этого вопроса. Все экономисты, которые его обсуждали, считали возможным рассматривать предельную полезность как подчиненную (но крайней мере, в большинстве случаев) закону Госсена, как в случае зависимости, так и в случае независимости от количеств других благ; они классифицировали случаи зависимости, различая блага дополняющие и блага конкурирующие (beni complementari e beni concorrenti). Все это построение рушится, если оно остается вне связи с формальным определением полезности; так как из фактов поведения (fatti della condotta) невозможно вывести (dedurre) характер (т.е. знак) второй производной от [функции] полезности.

Если, напротив, мы убеждены, что предельная полезность любого блага убывает с увеличением его количества; что, скажем, напр[имер], сахар и чай, соль и мясо и т.д. суть [блага] дополняющие (complemenlari), между тем как свинина и баранина, как правило, [блага] конкурирующие (concorrenti) и т.д., — то очевидно (ovvio), что такого рода убеждения должны быть основаны (fondarsi) только на какой бы то ни было *внутренней очевидности* (evidenza interna), а не на фактах хозяйственного поведения (fatti della condotta economica). Всеобщность таких убеждений дает право назвать их *верой в сознательность экономического поведения* (fede nella consapevolezza della condotta economica). И действительно, по общему мнению, причины, направляющие (guidati) нас, или хотя бы факторы, им аналогичные (fattori ad esse paralleli), более или менее отчетливо (chiaramente) проявляются в нашем сознании (consapevolezza), таким образом, что позволяют нам воспринимать увеличение или уменьшение (1'incremento e il decremento) их интенсивности.

Допуская, по гипотезе, истинность таких утверждений, наши формулы позволяют вывести (derivarne) из них следующие законы:

I. *Если индивид* (un individuo) *не чувствует* (percepisce) *никакого изменения* (modificazione) *в своем субъективном отношении к благу* α *при вариации количества блага* β*, и то же самое— по отношению к* γ *при вариации количества* δ*, и то же самое— по отношению к* ε *при вариации количества* ς *и т.д., то должны соблюдаться равенства:*

$$\frac{P_{\alpha\beta}}{Q_{\alpha\beta}}=\frac{P_{\gamma\delta}}{Q_{\gamma\delta}}=\frac{P_{\varepsilon\varsigma}}{Q_{\varepsilon\varsigma}}......$$

[26] II. Если это утверждение истинно, то можно вычислить θ и подставить его значение в формулы для u_{ii} и u_{ij}. Тогда, *в случае благ, которые, на основании внутренней очевидности, нужно рассматривать как насыщающие, должно иметь место соответственно:*

$$\frac{P_{ii}}{P}-\theta\frac{Q_{ii}}{P}>0,\text{ или же }\frac{P_{jj}}{P}-\theta\frac{Q_{jj}}{P}>0.$$

III. Кроме того, *в случае пар благ, которые па основании внутренней очевидности рассматриваются как дополняющие или же конкурирующие, должно иметь место соответственно:*

$$\frac{P_{ij}}{P}-\theta\frac{Q_{ij}}{P}>0,\text{ или же }\frac{P_{kl}}{P}-\theta\frac{Q_{kl}}{P}>0.$$

Предыдущие утверждения можно разработать на эмпирическом материале, и мы здесь вновь настаиваем на настоятельной необходимости перейти от отвлеченных схем (schemi astratti) к положительным исследованиям в области, охватывающей теорию бюджета [потребителя]. Только таким образом возможно разрешить искомые проблемы, только таким путем можно проверить определенные формулы. Но для иных проблем (как, например, тех, которые относятся к положениям, высказанным чуть выше) нет надежд получить эмпирические данные для решения. Вычисление значения определителей P и Q и их миноров могло бы удасться лишь в том случае, если бы мы знали количества *всех* благ, потребленных индивидом, и *всех* вариаций в спросе на *каждое* из благ, вызванных изменением (modificazioni) дохода и цен на *все* эти блага.

Очевидно, что невозможно получить все эти величины из наблюдений над существующими бюджетами; поэтому единственный путь, который остается, — это путь *эксперимента*; при его посредстве можно было бы создать совокупность схожих с бюджетом [потребителя] условий и таким путем либо подтвердить, либо опровергнуть изложенные нами законы.

Такое предприятие вполне окупило бы затраченные усилия, поскольку результаты экспериментов привели бы к подтверждению законов; и, кроме этого прямого преимущества, мы добились бы большего по мере продвижения вперед в исследовании точки зрении психологии на полезность. Если вместо того окажется, что законы нс подтверждаются экспериментально, то мы придем к выводам важнейшего значения не столько для экономической науки, сколько для психологии и морали; в таком случае было бы доказано, что раз вариации в величине полезности не ощущаются субъектом, причины, управляющие поведением людей (la condotta umana), не только по своей природе уклоняются от нашего сознании, но даже косвенно на нем не сказываются (indirettamente si manifestanto ad essa).

Эти проблемы слишком сложны для того, чтобы мы здесь пытались сформулировать их в адекватной форме, не говоря уже об их разрешении. Все же надеемся, что нам удалось пролить свет на их связь с теорией бюджета [потребителя] (teoria del bilancio) и показать необходимость дальнейшего развертывания этой теории с использованием надлежащих методов экспериментальной науки.