УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МИКРОЭКОНОМИКЕ

Часть 1
Основы теории спроса и предложения. Теория производства

В. А. Чахоян
А. В. Киреев

Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова
Экономический факультет

В. А. Чахоян, А. В. Киреев

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МИКРОЭКОНОМИКЕ

Часть 1

Основы теории спроса и предложения. Теория производства

Москва
2026

УДК 330.101.542
ББК 65.012.1
Ч26

Чахоян В. А., Киреев А. В.

Ч26 **Курс лекций по Микроэкономике.** Часть 1 (Основы спроса и предложения) — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2026. — 112 с. — URL: https://www.econ.msu.ru/elibrary/is/bef/#top

ISBN 978-5-907909-10-6

Курс лекций, представленный в данной работе, соответствует последней версии Программы по курсу Микроэкономика (промежуточный уровень), который читается в Школе бакалавров экономическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова. В этой версии Программы реализован «сквозной подход» к изложению материала курса.

Курс Микроэкономики можно разделить на три части, и данная публикация посвящена начальной, первой. Курс начинается с определения объекта, предмета и метода микроэкономики, после чего уделяется особое внимание математическому инструментарию, используемому в экономической теории и в микроэкономическом анализе, в частности. Это позволяет увидеть и понять особенности формирования экономических показателей. Далее переходим к изучению рынка, обоснованию принятого подхода к его моделированию и оценке возможностей регулирования (раздел 2). В последнем разделе (раздел 3) первой части курса лекций излагается Теория производства. Этот раздел содержит такие важные темы курса, как Производственная функция, Теория затрат и Теория фирмы.

Всего в первой части курса лекций отражены 13 лекций. Во второй части будет изложена Теория потребления и далее (третья часть) рассмотрены различные рыночные структуры, Теория общего равновесия и те экономические явления, которые препятствуют его достижению и поддержанию.

УДК 330.101.542
ББК 65.012.1

ISBN 978-5-907909-10-6

Содержание

Предисловие

Курс лекций, представленный в данной работе, соответствует последней версии Программы по курсу Микроэкономика (промежуточный уровень), который читается в Школе бакалавров экономическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова. В течение многих лет на факультете читались два курса по микроэкономике: Микроэкономика-1 и Микроэкономика-2. Такое деление изучаемого материала неизбежно приводило к повторам и «напоминаниям» студентам пройденного ранее. Но в рамках существовавшей ранее структуры учебного плана трудно было прийти к согласию между преподавателями, ведущими занятия по микроэкономике, в том, что следует осваивать темы курса на нужном уровне с первого чтения. И лишь пару лет назад мы стали преподавать единый курс микроэкономики промежуточного уровня, учитывая, что студенты нашего факультета осваивают нужные для экономистов разделы математики и способны применять свои знания при изучении экономической теории.

Хочется отметить, что в течение многих лет на кафедре «Математические методы анализа экономики» (ММАЭ) формировались курсы математических дисциплин именно для экономистов, с учетом математического аппарата, применяемого при моделировании экономических процессов. Поэтому студенты нашего факультета способны **осваивать** те модели, которые включены в курс микроэкономики, а **не просто знать** об их существовании.

На кафедре ММАЭ работали известные экономисты-математики такие, как Черемных Ю. Н., Воркуев Б. Л., научные работы которых и формы организации взаимодействия со студентами мы используем при чтении данного курса.

Курс начинается с определения объекта, предмета и метода микроэкономики, после чего уделяется особое внимание математическому инструментарию, используемому в экономической теории и в микроэкономическом анализе, в частности. Это позволяет увидеть и понять особенности формирования экономических показателей.

Далее переходим к изучению рынка, обоснованию принятого подхода к его моделированию и оценке возможностей регулирования *(раздел 2)*.

В последнем разделе *(раздел 3)* **первой части** курса лекций излагается Теория производства. Этот раздел содержит такие важные темы курса, как *Производственная функция, Теория затрат* и *Теория фирмы*.

Всего в **первой части** курса лекций отражены 13 лекций. **Во второй части** будет изложена *Теория потребления* и далее (**третья часть**) рассмотрены различные *рыночные структуры, Теория общего равновесия* и те экономические явления, которые препятствуют его достижению и поддержанию.

РАЗДЕЛ 1

Введение в микроэкономику (лекции 1, 2)

ТЕМА 1

Объект, предмет, метод (методы исследования)

1.1. Экономика, как наука

Слово «экономика» имеет два основных значения. Под экономикой понимается, с одной стороны, хозяйство, функционирующее на определенной территории (страны, республики, района,...). С другой стороны, экономика — наука, изучающая законы функционирования этого хозяйства.

Само слово «экономика» произошло от греческого слова *oikonomos*, которое переводится как «ведение домашнего хозяйства». Вроде бы существует огромная разница между ведением отдельного домашнего хозяйства и управлением экономической системой общества. Однако, поразмыслив, можно отметить, что в рамках отдельного домашнего хозяйства и хозяйства страны приходится решать множество подобных проблем.

Экономическая подсистема общества должна удовлетворять потребности людей данного общества в экономических благах, количество которых, имеющееся в распоряжении общества, всегда ограничено. Отметим, что экономическое благо в условиях товарного производства приобретает форму товара или услуги.

Основные вопросы, которые необходимо решать как в рамках отдельного домашнего хозяйства, так и в рамках экономической системы общества (хозяйства), можно упрощенно сформулировать следующим образом:

- Какие товары и услуги производить?
- Каким способом производить нужные товары и услуги?
- Кто будет получателем и потребителем произведенных товаров и услуг?

Почему возникает необходимость решения названных вопросов?

Для создания экономических благ необходимы ресурсы времени, трудовые, природные, финансовые (денежные) и материальные. Количество ресурсов, которыми располагает общество в любой момент времени, ограничено. Поэтому требуется управление ресурсами общества для производства необходимых обществу экономических благ.

Экономика, как наука, (экономическая теория) изучает, каким образом в обществе, располагающем ограниченными ресурсами, решаются названные выше вопросы и ищет наилучшие способы их решения с тем, чтобы экономическая система могла наиболее полно удовлетворить потребности людей в экономических благах.

Методы, которыми решаются три фундаментальные проблемы экономики (*что, как и для кого производить*), зависят от того, как устроена экономическая система.

Экономическая система — определенный способ организации экономической жизни, который определяет методы, которыми решаются перечисленные выше проблемы экономики.

В экономической теории выделяют традиционную, административно-плановую и рыночную экономики. В *традиционной* экономике принятие решений по основным экономическим вопросам опирается на обычаи и традиции, в *административно-плановой* (командной) системе, основанной на *государственной форме собственности*, централизованном планировании, жестком подчинении всех экономических ячеек центру, решения принимаются центром (государством).

В *рыночной экономике*, капитал и земля находятся в *собственности отдельных лиц*, а ограниченные ресурсы распределяются с помощью рынка. Фирмы сами решают, кого принять на работу и что производить, а домашние хозяйства сами решают на кого работать и как расходовать свои доходы. Фирмы и покупатели взаимодействуют на рынке. Характерная черта рыночной экономики-конкуренция. Производители конкурируют между собой за ресурсы и покупателей, потребители конкурируют за право купить товар.

И несмотря на то, что каждый из экономических агентов преследует свой личный интерес, рыночный механизм позволяет согласовать интересы производителей и потребителей, организует экономическую деятельность.

Основные вопросы, которые изучаются в современной экономической теории, рассматриваются прежде всего для рыночной экономики.

Экономическая теория подразделяется на две основные области: микроэкономику и макроэкономику. Начнем изучение экономической теории с микроэкономики.

В микроэкономике рассматривается деятельность отдельных экономических агентов.

Экономический агент — это субъект экономических отношений, принимающий участие в производстве, распределении, обмене и потреблении экономических благ.

Основные экономические агенты в микроэкономике это — потребители (домашние хозяйства) и производители (фирмы).

В микроэкономике основное внимание уделяется вопросам принятия решений экономическими агентами, их взаимодействию в конкурентной среде друг с другом и экономическим агентом «государство». Кроме того, изучаются вопросы оценки экономической эффективности принимаемых решений с точки зрения общества в целом.

При исследовании названных проблем наряду с такими общенаучными методами научного исследования экономических процессов и явлений, как анализ синтез, дедукция, индукция, абстракция, важное место занимает моделирование, в рамках которого активно используются *экономико-математические* модели.

Для построения экономико-математических моделей экономисты применяют, как классический, так и современный математический инструментарий: теория множеств, функция одной и многих переменных, линия уровня функции и частная производная функции многих переменных, полный дифференциал, градиент, эластичность функции одной и двух переменных, методы решения оптимизационных задач, задач на условной экстремум и метод Лагранжа, случайная величина и ее распределения, теория игр.

Рассмотрим подробнее основные математические показатели, которые применяются экономистами для характеристики экономических процессов, и широко используются в микроэкономике.

1.2. Математический инструментарий микроэкономики

1.2.1. Средние и предельные величины в экономическом анализе

Экономические величины меняются, как правило, **не** независимо друг от друга: объем выпускаемой фирмой продукции зависит от количества используемых факторов производства, прибыль зависит от затрат на производство продукции и рыночной цены продукции.

Будем использовать понятие *функции* для описания этих зависимостей. Это может быть функция одной или нескольких переменных. Ограничим наш анализ функцией одной и двух переменных. Тогда в качестве примеров таких функций можно назвать следующие: $\boldsymbol{L = F(Q)}$ — затраты труда L (*Labor*) есть функция от объема выпускаемой продукции (Q — *quantity*)), $\boldsymbol{TC = F(Q)}$ — общие затраты TC (*Total costs*) производителя некоторой продукции зависят от объема производимой продукции (Q). Выручка фирмы TR (*Total revenue*) зависит от объема продаж произведенной продукции (Q) и от рыночной цены этой продукции (p), т.е. $\boldsymbol{TR = F(p,Q)}$. Данный перечень можно продолжить, но нам достаточно этих примеров для того, чтобы ввести определение суммарной величины.

Под ***суммарной*** (*общей*) ***величиной*** ($\boldsymbol{F(x)}$) будем понимать функцию независимых переменных (одной или нескольких). Как правило, в экономике, это *абсолютная* величина.

Однако, для исследования экономических явлений и принятия решений нам недостаточно суммарных величин. Действительно, мало знать во сколько денежных единиц (далее ДЕ) обошлось производство Q единиц продукции, надо знать средние затраты на одну единицу продукции, чтобы, сравнив их с рыночной ценой, понять прибыльно или нет наше производство, если-да, то какую прибыль приносит продажа одной произведенной продукции. Поэтому экономисты обращаются к средним величинам (показателям).

Средняя величина (***AF***(***x***)) может быть определена как отношение значения суммарной величины к значению независимой переменной (***A*** — это первая буква слова ***Average***).

Согласно введенному определению, $AF(x_0)=\dfrac{F(x_0)}{x_0}=Ay$, если $y=F(x)$, т.е. средняя величина есть среднее значение функции при некотором значении аргумента. С другой стороны, она величина *относительная*, так как получена путем деления (отношения) абсолютных величин.

Кроме суммарной м средней величин для принятия решений экономисты используют *предельные* величины.

Под предельной величиной (***MF***(***x***)) понимается изменение суммарной величины, обусловленное изменением независимой переменной на единицу (***M*** — это первая буква слова ***Marginal***). Согласно введенному определению, $MF(x_0)=\dfrac{\Delta F(x_0)}{\Delta x_0}=My$, если $y=F(x)$. Если $F(x)$ непрерывная, то $MF(x_0)=\dfrac{dF(x)}{dx}(x_0)$.

1.2.2. Соотношение между суммарными, средними и предельными величинами и их графическая интерпретация

Из определений суммарной, средней и предельной величин следуют следующие соотношения между ними: $F(x)=x\,AF(x)$, $F(x)=\int MF(x)dx$. Так что, если мы знаем, как изменяется средняя или предельная величина, то можем оценить значение суммарной величины при определенном значении независимой переменной. С другой стороны, зная зависимость $F(x)$, т.е. характер изменения суммарной величины, можно получить оценку средней и предельной величины при любом допустимом значении независимой переменной.

На рисунках *1а)* и *1б)* отражены графики средней и предельной величин для случая, когда $F(x)$ является функцией одной переменной. На первом рисунке значению независимой переменной $\boldsymbol{x_0}$ соответствует величина среднего значения функции $AF(x_0)$, а величина суммарной величины оценивается площадью цветного прямоугольника, т.е. $F(x_0) = x_0 AF(x_0)$. На рисунке *1б)* приведен график предельной величины. Знание $MF(x)$ позволяет оценить суммарную величину при любом значении независимой переменной.

Так, например, если значение независимой переменной равняется $\boldsymbol{x_0}$, то суммарная величина $F(x_0)$, может быть найдена как интегральная площадь $F\left(x_0\right)=\int_0^{x_0} MF\left(x\right)dx$. На графике *1б)* она заштрихована снизу от линии $MF\left(x\right)$.

Мы убедились, что знание средней и предельной величины при некотором значении независимой величины позволяет оценить суммарную величину. Покажем, что знание суммарной величины помогает оценить аналитически и графически среднюю и предельную величины.

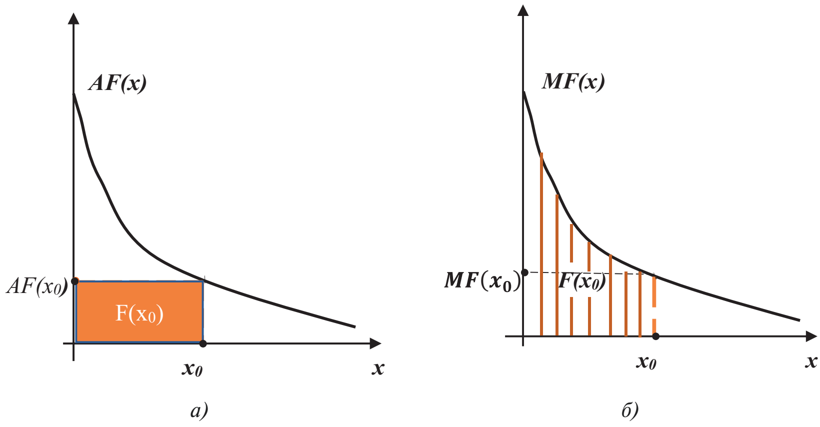


Рис. 1. Определение по средней величине суммарной (а), определение по предельной величине суммарной (б)

На рисунке 2 видим график некоторой суммарной величины $\boldsymbol{F(x)}$. Среднее значение этой величины при значении независимой переменной равным $\boldsymbol{x_0}$ равняется тангенсу угла α, так как согласно определению $AF(x_0)=\dfrac{F(x_0)}{x_0}$, а предельное- тангенсу угла β, так как согласно определению для непрерывной функции $MF(x_0)=\dfrac{dF(x)}{dx}(x_0)$.

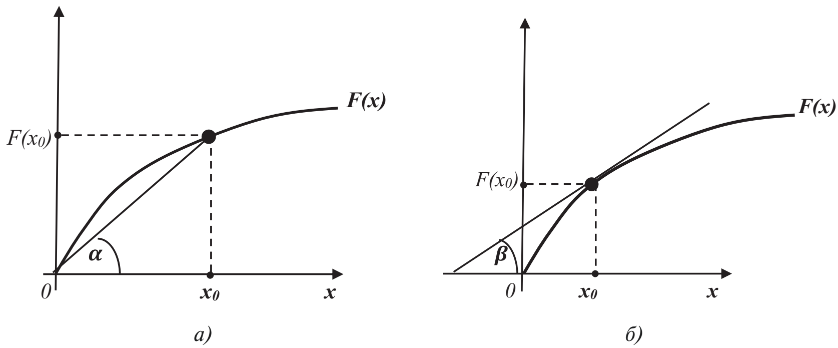


Рис. 2. Определение по суммарной величине средней (а), определение по суммарной величине предельной (б)

1.2.3. Эластичность функции одной переменной и функции многих переменных

При исследовании зависимостей между экономическими величинами всегда возникает вопрос о том, как изменяется значение показателя-функции при изменении показателя, который является независимой переменной. В одном случае изменение независимой переменной может вызывать существенное изменение значения функции, в другом — незначительное. С помощью какого показателя можно оценить это влияние изменения независимой переменной? Может *производная* функции поможет получить оценку реакции значения функции на изменение независимой переменной?

Да, производная функции отражает скорость изменения ее значения при изменении независимой переменной. Но она имеет размерность.

А экономистам часто приходится сравнивать ситуации на рынках, количества товаров на которых измеряются в разных единицах. Поэтому, если мы хотим понять, как повышение цены на рынке картофеля и на рынке косметического крема на 10 ДЕ повлияет на объем продаж в натуральном выражении, то нам нужен безразмерный показателей, который позволит оценить, на каком рынке наше решение оказало или окажет более сильное воздействие.

Формализуем эту проблему. Допустим независимая переменная получила приращение Δx, которое вызвало определенную величину $\Delta F(x)$. Как уже было сказано, величина $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$, отражающая влияние на значение функции приращения независимой переменной на одну единицу, имеет размерность, которая является помехой для сравнения значений этого показателя для разных совокупностей. Это касается и производной $\frac{dF(x)}{dx}$.

А вот если измерить Δx и $\Delta F(x)$ в процентах, мы получим безразмерный показатель:

$$\frac{\Delta F(x)\%}{\Delta x\%}.$$

Он показывает на сколько процентов изменяется значение функции при изменении аргумента на один процент. И его можно использовать для ответа на вопрос на каком рынке наше решение об изменении цены на одинаковую величину окажет более сильное воздействие.

Определение. ***Коэффициентом эластичности*** функции одной переменной $y = F(x)$ называется показатель

$$E_x(y) = \frac{\Delta F(x)\%}{\Delta x\%}. \tag{1}$$

Таким образом, коэффициент ***эластичности функции по аргументу*** (*эластичность функции*) показывает, на сколько процентов изменяется значение функции при изменении аргумента на 1%.

Упростив выражение (1), можно получить формулу (**2**) для расчета коэффициента эластичности, которая называется ***«формула точечной эластичности»***.

Действительно, согласно определению,

$$E_x(y)=\frac{\Delta F(E)\%}{\Delta E\%}=\frac{\Delta F(x)*100*x}{F(x)*\Delta x*100}=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}*\frac{x}{F(x)},\text{ т.е.}$$

$$E_x(y)=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}*\frac{x}{F(x)} \qquad (2)$$

Если разброс значений аргумента и функции не мал, и нужно оценить эластичность при изменении аргумента от x_1 до x_2, а функции от $F(x_1)$ до $F(x_2)$, то можно рассчитывать эластичность в точке $\bar{x}$, которая лежит на отрезке $[x_1, x_2]$, допустим, в середине этого отрезка, т. е. $\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$. Тогда формула (2) преобразуется в ***формулу дуговой эластичности*** (3), в которой вместо точки $(x, F(x))$ будет точка с координатами $(\bar{x},\bar{F}(x))$,

$$\text{где } \bar{F}(x)=\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}.$$

$$E_x(y)=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}*\frac{\bar{x}}{\bar{F}(x)}=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}*\frac{x_1+x_2}{F(x_1)+F(x_2)}. \qquad (3)$$

И, наконец, если $\Delta x\to 0$, то формула точечной эластичности (1) преобразуется в формулу ***предельной точечной эластичности*** (4).

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}*\frac{x}{F(x)}\right)=\frac{x}{F(x)}*\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{x}{F(x)}*\frac{dF(x)}{dx}$$

$$\text{или } E_x(y)=\frac{dF(x)}{dx}*\frac{x}{F(x)}. \qquad (4)$$

Можно обобщить понятие эластичности функции по аргументу на случай функции ***n*** переменных. Пусть $y=F(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$.В этом случае изменение любой из переменных может оказывать влияние на значение функции. Поэтому можно оценить влияние изменения, допустим ***i***-й независимой переменной на изменение функции с помощью *коэффициента эластичности функции по* ***i****-й переменной*.

Обозначим этот коэффициент через $\boldsymbol{E_{x_i}\left(y\right)}$. Тогда формула (1) примет следующий вид:

$$E_{x_i}\left(y\right)=\frac{\Delta F\left(x\right)\%}{\Delta x_i\%}. \tag{1.A}$$

Коэффициент (1.А) ***эластичности функции по*** $\boldsymbol{x_i}$ (i-й независимой переменной) показывает, на сколько процентов изменяется значение функции при изменении ***i****-й* независимой переменной на 1%.

Для расчета коэффициента ***эластичности функции по*** $\boldsymbol{x_i}$ можно пользоваться формулами (2)-(4), рассматривая в качестве аргумента одну из ***n*** независимых переменных.

Отметим некоторые свойства коэффициента эластичности и покажем, что существуют функции, для которых значение коэффициента эластичности является постоянным.

Свойства коэффициента эластичности.

1. Коэффициент эластичности величина безразмерная.
2. Коэффициент эластичности равен отношению *предельного* значения функции *к ее среднему* значению.
3. Если коэффициент эластичности по модулю больше 1, то функция *эластична* по аргументу (при изменении *аргумента* на 1%, *значение функции* изменяется более, чем на 1%)
4. Если коэффициент эластичности равен 1, то в этой точке изменение аргумента на 1% ведет к изменению функции также на 1 % (*единичная эластичность*).
5. Если коэффициент эластичности по модулю меньше 1, то функция *не эластична* по аргументу (при изменении аргумента на 1%, *значение функции* изменяется менее чем на 1%).
6. Функция с бесконечной эластичностью во всех точках называется *совершенно эластичной*.
7. Функция с нулевой эластичностью во всех точках называется *совершенно неэластичной*.

Свойства 1,3–7 не требуют доказательства, а вот в наличии *свойства 2* можно легко убедиться. Покажем, что в некоторой (произвольной) точке x_0 из области определения функции $y = F(x)$ имеет место $E_x(y) = \frac{My}{Ay}(x_0) = \frac{\boldsymbol{MF(x_0)}}{\boldsymbol{AF(x0)}}$.

Для этого обратимся к формуле (4) $E_x(y) = \frac{dF(x)}{dx} * \frac{x}{F(x)}$ и запишем ее в эквивалентной форме

$$E_x(y) = \frac{\frac{dF(x)}{dx}}{\frac{F(x)}{x}}(x_0) = \frac{MF(x_0)}{AF(x0)}. \quad (5)$$

Формулу (5) мы будем в дальнейшем часто использовать для оценки эластичности различных суммарных величин.

Далее рассмотрим функцию $y = Ax^{\alpha}$ $(A$ и $\alpha \in R)$. Покажем, что для этой функции $E_x(y) = \alpha$ в любой точке области определения. Воспользуемся формулой предельной точечной эластичности (4).

$$E_x(y) = \frac{dF(x)}{dx} * \frac{x}{F(x)} = \frac{A\alpha x^{\alpha-1}}{Ax^{\alpha}} * x = \alpha.$$

Таким образом, мы выделили класс функций с постоянной эластичностью. Степенная функция является функцией с постоянной эластичностью, равной показателю степени.

Математики доказали, что если для некоторой функции выполняется свойство постоянности эластичности, то она является степенной.

1.2.4. Графическая интерпретация эластичности функции одной переменной

При решение некоторых задач экономисты обращаются к графическим иллюстрациям.

В этом случае знание графической оценки эластичности может помочь в обосновании рассматриваемых решений. На рисунке 3 отражены те необходимые вспомогательные построения, которые нужны для графической оценки эластичности.

Покажем, что для убывающей функции эластичность в точке С можно оценить как отношение длин отрезков СВ и СА, т.е. $E_{x=E_0}(y) = -\frac{|CB|}{|CA|}$.

Действительно, $E_x(y) = \frac{\boldsymbol{MF}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{AF}(\boldsymbol{x}_0)}$ согласно свойству эластичности 2. А согласно геометрической интерпретации предельного и среднего значений функции в точке: $E_x(y) = -\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = -\frac{|Cx_0|}{|x_0A|}\frac{|0x_0|}{|Cx_0|} = -\frac{|0x_0|}{|x_0A|}$. Треугольники $F(x_0)$, B, C и x_0, C, A подобны, (см. рисунок *3а*) следовательно $\frac{|0x_0|}{|x_0A|} = \frac{|CB|}{|CA|}$ и $E_{x=E_0}(y) = -\frac{|CB|}{|CA|}$ (минус перед дробью, так как $\frac{dF(x)}{dx}(C) = -\tan\beta$).

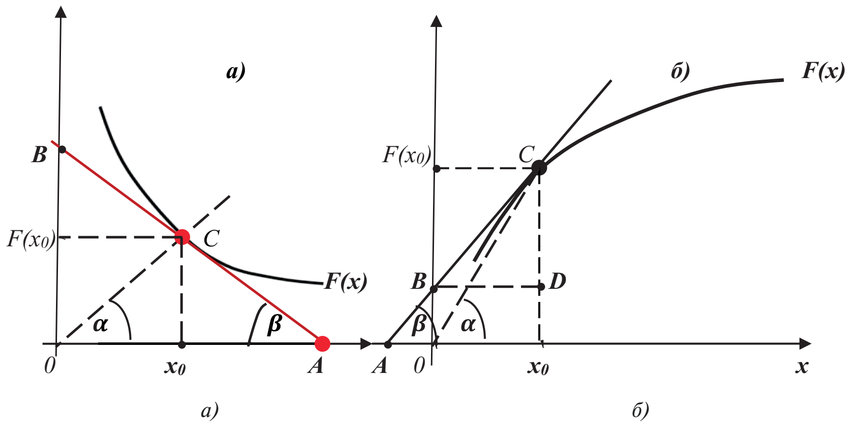


Рис. 3. Определение эластичности убывающей функции (а), определение эластичности возрастающей функции (б)

Аналогичные рассуждения проведем для возрастающей функции. $E_x(y) = \frac{\boldsymbol{MF}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{AF}(\boldsymbol{x}_0)} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{|Cx_0|}{|x_0A|}\frac{|0x_0|}{|Cx_0|}$. В этом случае рассмотрим подобные треугольники: ΔACx_0 и ΔBCD. Из подобия следует, что $\frac{|0x_0|}{|x_0A|} = \frac{|CB|}{|CA|}$.

Следовательно, $E_x(y) = \frac{|CB|}{|CA|}$.

Пользуясь полученными оценками эластичности (не зная координаты точки С), можно сказать, что на рисунке *3а*) эластичность функция в точке *С* близка к единице, а на рисунке *3б*) функция неэластична в точке *С*.

Вопросы для повторения

1. Что такое экономическая система? Какие виды экономических систем выделяют в экономической теории?
2. Объект экономической теории? Приведите пример предмета изучения экономической теории.
3. Какие методы применяются в экономической теории?
4. Если $AP(Q)$ — средний надой молока от одной коровы в сутки, где Q- количество коров в стаде, запишите математически суммарное количество молока $TP(Q)$, получаемое в сутки.
5. На рисунке 4 изображен график суммарного надоя молока в зависимости от количества коров в стаде. Пусть $Q = 30$. Отразите на графике средний надой от одной коровы данного стада и надой от одной дополнительной коровы.

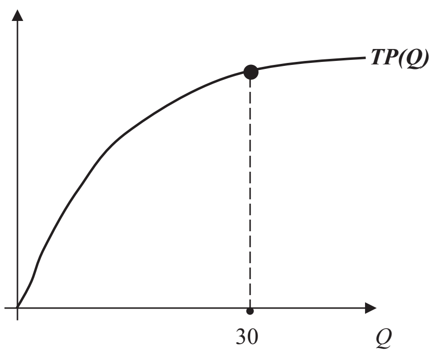


Рис. 4. Кривая зависимости суммарного надоя молока от количества коров

6. В каких единицах измеряется эластичность функции по аргументу? На что указывает знак коэффициента эластичности?

7. При каких значениях коэффициента эластичности считается, что функция не эластична по аргументу, а при каких эластична? Приведите пример функции с постоянной эластичностью.
8. Если известен график зависимости среднего надоя молока от одной коровы в сутки $AP(Q)$ (см. рис. 5), то как можно графически определить суммарный надой молоко от 30 коров?

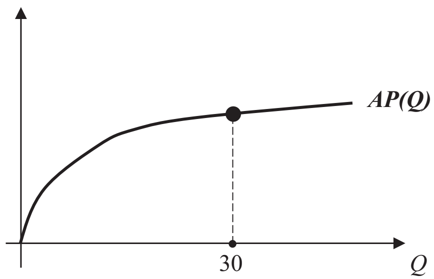


Рис. 5. Кривая зависимости среднего надоя молока от количества коров

9. Допустим, зависимость объема производства стиральных машин от количества работников описывается формулой $Q = L^{1/2}$. Чему равняется эластичность производства по числу работников (по труду) при $L = 25$? При $L = 100$?
10. Оцените графически эластичен ли объем выпуска (надоя молока) на графике рисунка 4 при Q=30. (сделайте необходимые построения и воспользуйтесь результатами ответа на вопрос 5).

Основная литература

1. *Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* Микроэкономика. СПб: Питер, 2011, глава 2.
2. *Замков О.О, Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике, главы 5 и 6. М., Дело и Сервис, 2004.

РАЗДЕЛ 2

Рынок. Спрос и предложение. Рыночное равновесие. Регулирование рынка

(лекции 3-5)

ТЕМА 2

Рынок (и его моделирование). Рыночный спрос и рыночное предложение

В современной экономике рынок принимает самые разнообразные формы. У многих станций метро мы можем приобрести мясо и фрукты на продуктовом рынке, выбирая из того, что предлагают продавцы, расплачиваясь с ними непосредственно. С другой стороны, мы можем заказать нужные нам товары в интернет-магазинах, не видя продавца, и произвести оплату заказанных товаров либо сразу или по прибытии товаров через банк-онлайн, либо наличными. Мы покупаем мороженое в ларьках, покупаем или (и) продаем ценные бумаги на фондовой бирже. Можно привести и другие примеры осуществления актов купли-продажи товаров или услуг.

Рис. 6. Продуктовый рынок,
киоск с мороженым и Амстердамская фондовая биржа

Однако, то общее, что присутствует во всех перечисленных примерах рынка — это покупатель и продавец, между которыми совершаются сделки, то есть осуществляется взаимодействие между данными экономическими агентами, благодаря которому можно сказать, что существует рынок, допустим, пищевых продуктов, мороженого или акций. Поэтому можно ввести следующее определение рынка.

***Рынок* — это форма взаимодействия между покупателями (домашними хозяйствами) и продавцами (фирмами) товаров и услуг.**

Для моделирования взаимодействия между покупателями и продавцами формализуем принятие решений каждым из них. Будем считать, что решения и действия покупателей описывается понятием «спрос», а продавцов-понятием «предложение».

2.1. Индивидуальный спрос покупателя на товар. Рыночный спрос

Опишем спрос отдельного покупателя с помощью *функции спроса*. Для этого сначала введем понятие *величины спроса*. Обозначим ее через Q_d.

Под ***величиной спроса*** отдельного покупателя будем понимать то количество товара или услуги (*в натуральном измерении*), которое потребитель **желает** и **может** купить в течение определенного периода времени (дня, месяца, года) при данной цене товара или услуги.

Величина спроса зависит от множества факторов, то есть, говоря языком математики, является функцией многих переменных.

$$\boldsymbol{Q_d = f(p, p_{др}, M, \text{Вкусы, Мода, Ожидания потребителя},\ldots)}. \qquad (6)$$

Очевидно, что исследование этой зависимости -не простая задача для экономиста. Поэтому можно зафиксировать значения всех переменных, кроме цены данного товара и перейти к описанию зависимости величины спроса только от цены данного товара.

$$Q_d = f(p) \text{ или } Q_d = Q(p). \qquad (7)$$

Зависимость (7) называется *линией спроса* (кривой спроса) и может быть задана тремя способами: аналитически, графически и таблично. Например, $Q_d\left(p\right)=\dfrac{10}{p}$ или график на рисунке 7, по двум заданным точкам которого (0;700) и (2100;0) можно восстановить вид линии спроса: $Q = 2100 - 3p$.

В таблице 1 представлена дискретная зависимость величины спроса на холодильники от уровня цен. Такое представление зависимости величины спроса от уровня цен часто называют *шкалой спроса*.

Во всех трех видах представления зависимости величины спроса от цены просматривается обратная зависимость величины спроса от цены, что и утверждает ***закон спроса.***

Закон спроса говорит о том, что **зависимость** между величиной спроса и ценой **обратная**, т.е. с *ростом цены* величина спроса уменьшается и, наоборот, при *понижении цены* величина спроса растет.

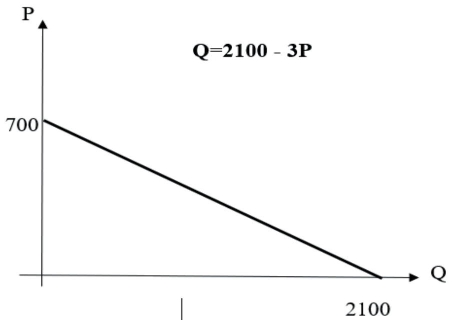


Рис. 7. Линейная линия спроса

Таблица 1

Цена (тыс. руб.)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Величина спроса на холодильники (штук)	820	720	570	450	350	260	190	110	60	30	10

К причинам, обусловливающие закон спроса можно отнести следующие: эффект нового покупателя (ценовой барьер), эффект замещения, эффект дохода.

После того, как мы ввели понятие *величины спроса* и зависимости ее от множества факторов, можно ввести понятие ***спроса***.

Спрос **—** это **вид зависимости** величины спроса от значений всех факторов, которые на нее влияют.

Если выражаться языком математики, ***спрос*** **— вид функции** (6) или (7), а ***величина спроса*** **—** это **значение функции** при определенных значениях независимых переменных.

Все факторы (переменные), оказывающие влияние на величину спроса, кроме цены данного товара, называются ***неценовыми факторами*** (детерминантами) спроса. Понятно, что изменение их величины может менять расположение линии спроса, сдвигая ее либо вверх, либо вниз.

Пусть, спрос на жилье описывается как функция двух переменных: цены (p) (тыс. руб. за 1 кв. м.) и дохода потребителя (M) (тыс. руб.). $Q_d = M - 10p$. Если доход потребителя в прошедшем году составил, например, 2000000 рублей (2000 тыс. руб.), тогда уравнение спроса примет вид: $Q_d = 2000 - 10p$. Это значит, что при цене, допустим, равной 192 тыс. руб. за 1 кв. м. (p = 192), данный потребитель может позволить себе купить жилье площадью 80 кв. м. Однако, если его доход вырастет на 20, то при той же цене он сможет приобрести 100 кв. м. Хотя может случиться так, что он не станет увеличивать приобретаемую площадь жилья, так как планирует потратить дополнительный доход на другие нужды.

Поэтому мы утверждаем, что изменение величины неценового фактора спроса (дохода) может увеличить спрос, то есть при каждой возможной цене потребитель будет спрашивать большую площадь жилья, но возможно и нет. На рисунке 8 приведен график спроса на жилье $Q_d = 2000 - 10p$.

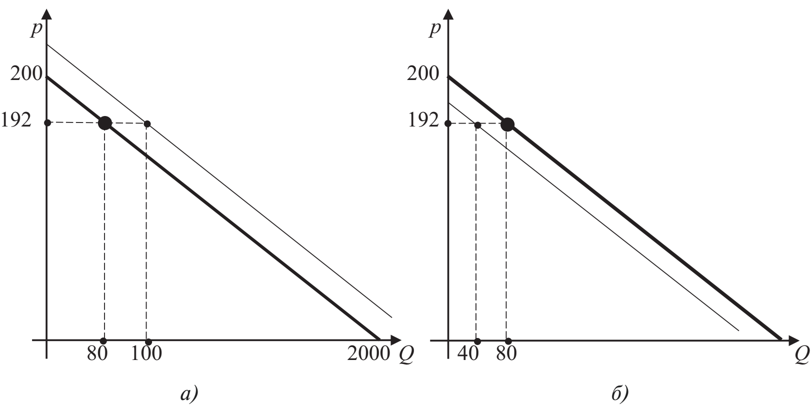


Рис. 8. Влияние изменения дохода на величину спроса на жилье

На рисунке *8а*) показано, что увеличение дохода потребителя на 20 меняет уравнение спроса. При $M = 2020$ $Q_d = 2020 - 10p$, что означает сдвиг исходной линии спроса вверх и рост величины спроса при цене равной 192 до 100. На рисунке *8б*) показано, что уменьшение дохода потребителя на 40 меняет уравнение спроса. При $M = 1960$ $Q_d = 1960 - 10p$, что означает сдвиг исходной линии спроса вниз и уменьшение величины спроса при цене равной 192 до 40.

Рыночный спрос — это агрегированный спрос всех потребителей товара (услуги) рынок которого мы рассматриваем. Чтобы сформировать рыночный спрос располагая данными об индивидуальных спросах надо определить суммарное количество товара, которые может быть куплено при любой возможной цене. Покажем на примере линейных функций спроса, как можно это сделать.

Допустим, спрос одной (однородной) группы потребителей описывается зависимостью $Q_d^1 = b_1 - a_1 p$, а второй — уравнением $Q_d^2 = b_2 - a_2 p$ $\left(a_1 \geq 0, b_1 \geq 0, a_2 \geq 0, b_2 \geq 0\right)$. Надо сложить эти две функции и описать аналитически рыночную функцию спроса. Прежде, чем описать аналитически функцию суммарного спроса, обратимся к графикам этих функций. На рисунке 9 в одной системе координат пунктирными линиями изображены обе функции спроса. Они обозначены (1) и (2).

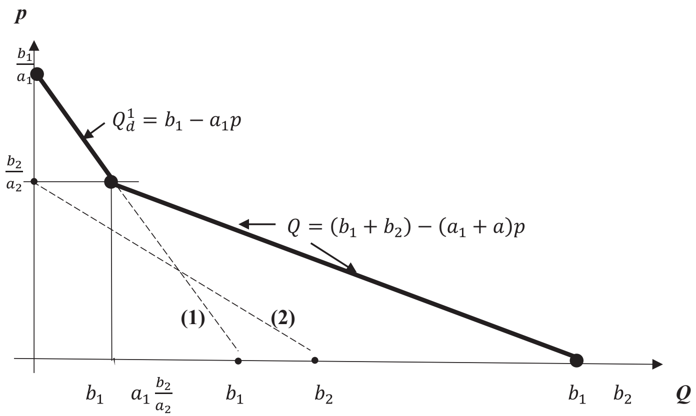


Рис. 9. Сложение двух линейных функций спроса: $Q_d^1 = b_1 - a_1 p$ и $Q_d^2 = b_2 - a_2 p$

После того, как мы объединили графики (1) и (2) исходных функций спроса, можно описать суммарный спрос аналитически. Обозначим величину суммарного или рыночного спроса через Q.

$$Q = \begin{cases} (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)p, 0 \le p \le \dfrac{b_2}{a_2} \\ b - a_1 p, \qquad \dfrac{b_2}{a_2} \le p \le \dfrac{b_1}{a_1} \\ 0, \qquad p \ge \dfrac{b_1}{a_1} \end{cases}$$

2.2. Индивидуальное предложение товара. Рыночное предложение

Теперь обратимся к другой стороне рыночного взаимодействия — продавцам (производителям). Введем понятие *величины предложения*, а затем определим «предложение».

Под ***величиной предложения*** (*Qs*) понимается такое **количество товара**, которое производитель (или продавец) **желает** и **может произвести** (продать) и предложить на рынок по данной цене в течение определенного периода времени.

Обозначим величину предложения через *Qs* и зададимся вопросом, от чего зависит величина предложения. Также, как и величина спроса, она зависит от многих факторов, то есть математически может быть описана как функция многих переменных.

$$Qs = \varphi\ (p,\ p_{рес},\ p_{др},\ \textit{Изменение технологии, Налоги и дотации, Ожидания изменения цен...}), \qquad (8)$$

где p — цена товара, рынок которого рассматривается, $p_{рес}$ — цена ресурса (или ресурсов), $P_{др}$ — цена другого товара (или других товаров).

Если мы зафиксируем значения всех факторов, кроме цены данного товара, то получим уравнение зависимости величины предложения товара от его цены. Эта зависимость называется *линией предложения*.

$$Q_s = \varphi\ (P) \text{ или } Q_s = Q(P) \qquad (9)$$

Зависимость величины предложения от цены (9) также как и зависимость величины спроса от цены (7) можно задать такими же тремя способами.

Закон предложения говорит о том, что изменение величины предложения товара находится **в прямой зависимости** от изменения цены этого товара: *с ростом цены растет и величина предложения и наоборот, чем ниже цена, тем меньше величина предложения.*

Действие закона предложения обусловлено прежде всего тем, что по возросшей цене производители захотят произвести больше изделий, «эффектом нового продавца», обусловленного превышением возросшей цены над величиной издержек производства тех производителей, которым было невыгодно производить.

Теперь можно ввести определение предложения. как и в случае спроса.

Предложение – это **вид зависимости** величины предложения от значений всех факторов, которые на нее влияют.

Одним словом, *предложение* это вид функции φ, а *величина предложения* — это ее значение при определенных величинах переменных. Все переменные, кроме цены данного товара, будем называть *неценовыми детерминантами* (факторами) предложения. Их изменение может влиять на расположение линии предложения.

Действительно, пусть $\boldsymbol{Q_s}$ — это количество молока (в литрах), p — цена одного литра, p_{pec} — это цена корма (неценовой фактор предложения). Если цена на корм для животных упадет, то фермеры могут увеличить поголовье стада и, следовательно, объем предлагаемого к продаже молока и, наоборот при росте цен на корма количество предлагаемого к продаже молока, может сократиться. Такие решения отразятся на сдвиге исходной линии предложения Qs (см. рис.10).

В первом случае (см. *10а*) при любой цене величина предложения возрастет (например, при цене $\hat{p}$ до Q_1) и линия предложения сдвигается вправо вниз и занимает положение Q_s^1.Предложение растет. Во втором случае (см. *10б*) при любой цене величина предложения уменьшается (например, при цене $\hat{p}$ до Q_2) и линия предложения сдвигается влево вверх и занимает положение Q_s^2. Предложение падает.

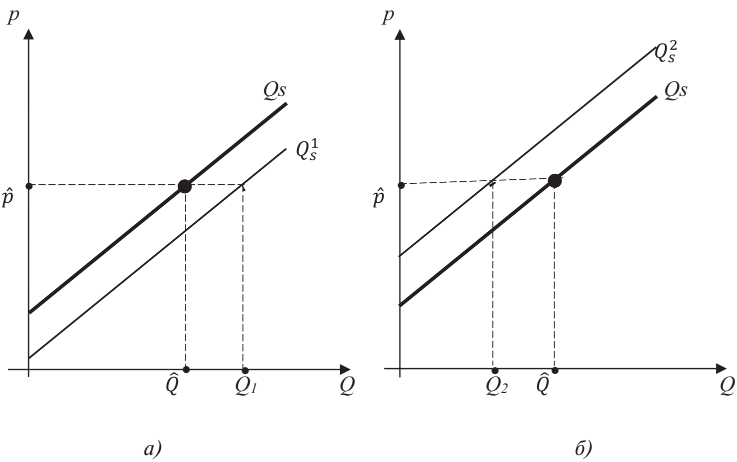


Рис. 10. Влияние неценового фактора на предложение:
а) — рост предложения, б) — уменьшение предложения

Рыночное предложение – это агрегированное предложение всех продавцов (производителей) товара (услуги), рынок которого мы рассматриваем. Чтобы сформировать рыночное предложение, располагая данными об индивидуальном предложении отдельных производителей, надо определить суммарное количество товара, которое может быть предложено для продажи при любой возможной цене. Покажем на примере линейных функций предложения, как можно сформировать рыночное предложение.

Допустим, предложение одной (однородной) группы описывается зависимостью

$$Q_s^1 = d_1 + c_1 p,$$

а второй — уравнением $Q_s^2 = d_2 + c_2 p$ $\left(c_1 \geq 0, d_1 \leq 0, c_2 \geq 0, d_2 \leq 0\right)$. Надо сложить эти две функции и описать аналитически функцию рыночного предложения.

Прежде, чем описать аналитически функцию суммарного предложения, обратимся к графикам этих функций. На рисунке *11* пунктирными линиями изображены функции предложения $Q_s^1 = d_1 + c_1 p$ и $Q_s^2 = d_2 + c_2 p$, сплошной жирной линией функция суммарного, рыночного, предложения ***Qs***, которую аналитически можно представить нижеследующим образом.

$$\boldsymbol{Qs} = \begin{cases} 0\ , & 0 \le p \le \dfrac{d_1}{c_1} \\ d_1 + c_1 p, & \dfrac{d_1}{c_1} \le p \le \dfrac{d_2}{c_2} \\ d_1 + d_2 + (c_1 + c_2)\,p, & p \ge \dfrac{d_2}{c_2} \end{cases}$$

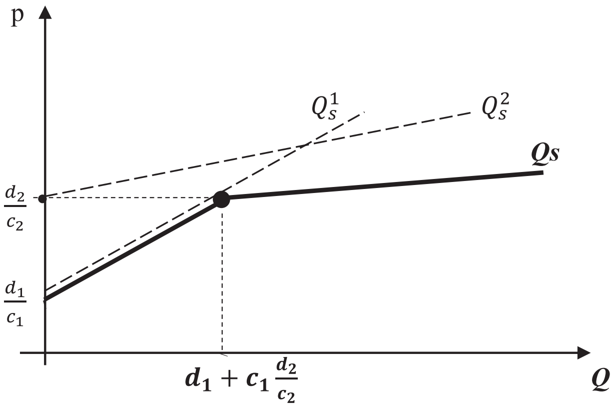


Рис. 11. Сложение двух линейных функций предложения: $Q_s^1 = d_1 + c_1 p$ и $Q_s^2 = d_2 + c_2 p$

ТЕМА 3

Рыночное равновесие

3.1. Понятие и характеристики рыночного равновесия. Равновесие по Вальрасу и по Маршаллу

Проведя анализ спроса и предложения, правомерно поставить вопрос о том, какой будет цена и какое количество товара будет продано-куплено в результате взаимодействия продавцов и покупателей? Если никакие внешние силы не вмешиваются во взаимодействие продавцов и покупателей, то на рынке должно установиться равновесие.

Рыночное равновесие – это такая ситуация на рынке некоторого товара (услуги), когда **цена устанавливается на таком уровне**, что **потребители** покупают столько продукции, сколько желали, а **продавцы** продают столько единиц продукции, сколько планировали.

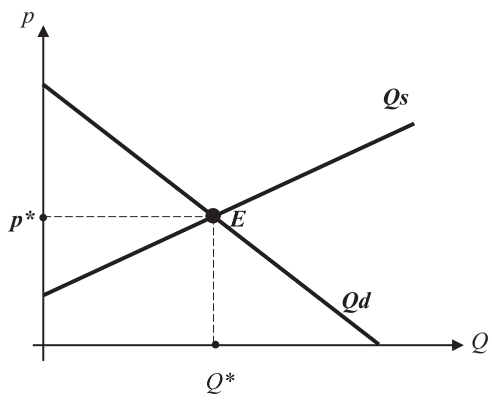


Рис. 12. Рыночное равновесие

Равновесие характеризуется двумя параметрами: равновесной ценой (обозначим ее p^*) и объемом покупок-продаж (обозначим его величину через Q^*). На графике (см. рис.12), где изображены линии рыночного спроса и рыночного предложения, равновесию соответствует точка пересечения этих линий. Обозначим ее через ***E***.

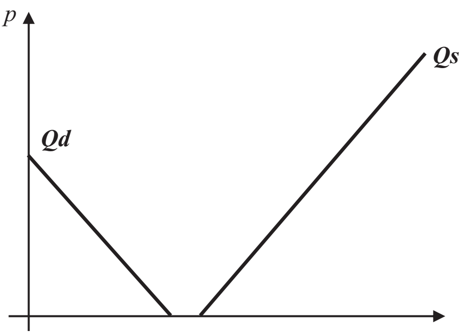


Рис. 13. Отсутствие равновесия

Рыночное равновесие — это благоприятная ситуация для участников рынка. Ни у покупателей, ни у продавцов нет внутренних стимулов к ее изменению. Однако, такой ситуации может и не быть. На рисунке 13 приведен пример, когда равновесия не существует: линии спроса и предложения не пересекаются. На рисунке 14 приведены графические примеры ситуаций, когда равновесие существует. Но оно не единственное. В случае 14*а*) существует определенный интервал цен, для которого может быть куплено (продано) одинаковое количество товара. В случае 14*б*), наоборот, по единственной цене может быть куплено (продано) не единственное количество товара.

При любой цене отличной от равновесной рынок не сбалансирован, а у покупателей и продавцов имеются стимулы к изменению ситуации. Если, например, реальная рыночная цена $\boldsymbol{p_1}$ выше равновесной, то величина спроса Q_1^d меньше величины предложения Q_1^s. Избыточное предложение в объеме $Q_1^s - Q_1^d$ (см. рис.*15а*) будет оказывать понижающее давление на цену через конкуренцию продавцов. Когда величина избыточного предложения станет нулевой, будет достигнуто равновесие (p^*, Q^*). Такой подход называют равновесием по Вальрасу. При моделировании рынка он использовал зависимости объемов спроса и предложения от цены $Q_1^d(p) 8\ Q_1^s(p)$. Такие функции спроса и предложения называются ***прямыми.*** Вальрас сосредоточил внимание на объемах спроса и предложения при данных ценах. Поэтому функции спроса и предложения у него имеют вид: $Q_D(p)$, $Q_S = Q_S(p)$.

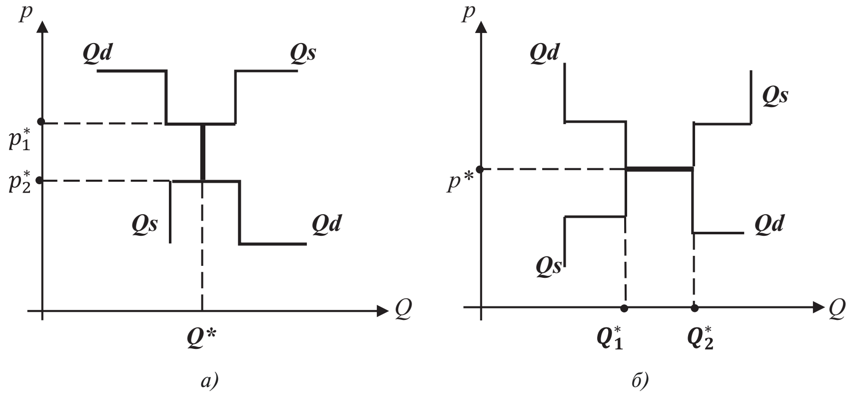


Рис. 14. Неединственность рыночного равновесия

Другой подход к описанию равновесия принадлежит Маршаллу, который при моделировании рынка использовал ***обратные*** функции спроса $P_d(Q)$ и предложения $P_s(Q)$ и считал, что равновесие на рынке складывается под влиянием разности между ценами спроса и предложения. Так если рыночный объем предложения ниже равновесного $Q_1 < Q^*$ (см. рис. *15б*), то цена спроса будет выше цены предложения, $p_1^d > p_1^s$, что будет стимулировать продавцов увеличивать объем предложения. Превышение цены спроса над ценой предложения будет оказывать повышающее воздействие на величину предложения.

И, наоборот, если объем предложения превышает равновесный $Q_2 > Q^*$, то цена предложения превышает цену спроса и конкуренция продавцов приведет к уменьшению объема продаж до равновесного уровня. При равновесном объеме покупок-продаж цена спроса совпадает с ценой предложения и равняется равновесной.

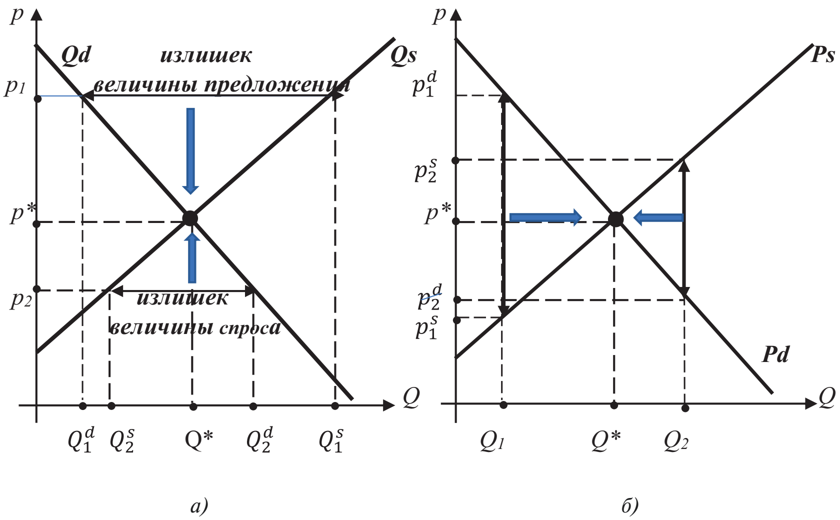


Рис. 15. Равновесие по Вальрасу а) и Маршаллу б).

Отметим, что, когда в современной экономической теории говорится о функциях спроса и предложения, по умолчанию, подразумеваются *прямые функции* (согласно Вальрасу), а при их графическом изображении на вертикальной оси откладываются цены (согласно Маршаллу). Это не влияет на результаты анализа взаимодействия спроса и предложения.

Одной из важных характеристик рыночного равновесия является устойчивость или стабильность равновесия.

Стабильностью (***устойчивостью***) ***равновесия*** называют способность рынка, выведенного из состояния равновесия, вновь возвратиться к равновесию под влиянием лишь своих внутренних сил.

Если **равновесие** обладает свойством **стабильности**, то дополнительное регулирование рынка представляется необязательным, рынок сам поддерживает свою сбалансированность.

Если же равновесие не обладает свойством стабильности, то регулирование его может стать настоятельно необходимым.

3.2. Паутинообразная модель рыночного равновесия (случай линейных функций спроса и предложения)

Рассмотрим простую модель (без учета запасов), которая поясняет, каким образом происходит поиск («нащупывание» по выражению Вальраса) равновесия на рынке некоторого товара.

Будем предполагать, что спрос и предложение описываются линейными функциями *Dt* и *St*, где D_t — функция спроса, а S_t — функция предложения в момент времени ***t:***

$$D_t = Q_t^d = ap_t + b \ (a < 0), \tag{10}$$

$$S_t = Q_t^s = cp_{t-1} + d \quad (c > 0), \tag{11}$$

где Q_t^d — величина спроса, а Q_t^s — величина предложения в ***t*-**ом периоде. При этом следует отметить, что величина спроса в *t-ом* периоде D_t *8; 8*Q_t^d зависит от цены этого же, *t*-го периода, а величина предложения в *t-ом* периоде S_t или Q_t^s зависит от цены предыдущего, (*t-1*)-го периода, то есть производство реагирует на цену предыдущего периода.

Кроме названных предположений (10) и (12), мы полагаем, что текущая цена устанавливается на таком уровне, чтобы вся произведенная в этом периоде продукция была реализована без остатка (не образуются запасы):

$$Dt = St \ (Q_t^d = Q_t^s) \tag{12}$$

При равновесной цене p^* производство не возрастает и не убывает:

$$S\left(p^*\right) = cp^* + d$$

величина спроса совпадает с величиной предложения:

$$D\left(p^*\right) = ap^* + b = cp^* + d = S\left(p^*\right).$$

Допустим в момент времени $t = 0$ цена оказалась равной p_0. Это значит, что в следующем периоде $t = 1$ производители предложат на рынок продукцию в объеме $S_1 = cp_0 + d$, а цена, по которой вся продукция будет куплена, может быть найдена из равенства $S_1 = D_1 = ap_1 + b$. По цене p_1во втором периоде будет произведено количество продукции, равное $S_2 = cp_1 + d$. Оно будет продано по цене p_2 : $S_2 = D_2 = ap_2 + b$ и т. д. Зная начальное значение цены, можно определить все последующие цены.

Обозначим равновесные значения переменных *p, Qd* (*D*) *и Qs* (*S*) через $p^*, Q^*\left(Q_d = D\left(p^*\right) = Q_s = S\left(p^*\right)\right)$ и зададимся вопросом, что происходит с переменными модели при $t \to \infty$?

Если при $t \to \infty, p_t \to p^*, D_t \to Q^*, S_t \to Q^*$, то скажем, что процесс, описываемый моделью, сходится к равновесным значениям *p, D* и *S.*

Для выявления условий сходимости цены p_t к равновесной p^*, проведем небольшой анализ изменения цены от периода к периоду.

В произвольном периоде *t* величина спроса и предложения либо выше, либо ниже их равновесного значения Q^*. Выразим эти отклонения через отклонение цены *t*-го периода от равновесной p^*. Обозначим это отклонение через δ_t:

$$\delta_t = p_t - p^*. \tag{13}$$

Тогда можно описать отклонения величины спроса и величины предложения *t*-го периода от их равновесного значения следующими соотношениями (14) и (15).

$$D_t - Q^* = a\left(p_t - p^*\right) = a\delta_t \tag{14}$$

$$S_t - Q^* = c\left(p_{t-1} - p^*\right) = a\delta_{t-1} \tag{15}$$

Следовательно,

$$D_t = Q^* + a\delta_t, \tag{16}$$

$$S_t = Q^* + c\delta_{t-1}, \tag{17}$$

Подставив (16) и (17) в (12), можно выразить отклонение величины спроса или предложения ***t***-го периода от равновесного через отклонение предыдущего (*t- 1*)-го периода.

$$\delta_t = \frac{c}{a}\delta_{t-1}. \tag{18}$$

Учитывая, что $a < 0$, обозначим через r коэффициент при δ_{t-1} :

$$\boldsymbol{r} = \left|\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}\right| \tag{19}$$

Тогда (18) можно представить, как $\delta_t = (-1) r \delta_{t-1}$.

Если начальное отклонение цены от равновесной $\delta_0 = p_0 - p^*$, то $\delta_t = (-1)^t r^t \delta_0$.

И окончательный результат для цены ***t***-го периода запишется следующим образом:

$$p_t = p^* + (-1)^t r^t \left(p_0 - p^*\right). \tag{20}$$

Выражение (20) для цены t-го периода позволяет ответить на вопрос о приближении цены p_t к равновесной p^*. Действительно, если $r < 1$, то при $t \to \infty$ рыночная цена приближается к равновесной ($p_t \to p^*$), если $r = 1$, то рыночная цена при $t \to \infty$ колеблется относительно равновесной и, если $r > 1$, то при $t \to \infty$ рыночная цена будет отклоняться с каждым периодом на большую величину.

Рассмотренная нами модель знакомит нас с важным свойством рыночного равновесия, которое называется устойчивостью.

Если при отклонении от равновесия (например, под действием каких-то случайных сил) система через некоторое время вновь возвращается к нему, то такое равновесие называют *устойчивым*.

Если же при небольшом отклонении от равновесия система не способна вернуться к нему вновь, то такое равновесие называют *неустойчивым*.

Равновесие в рассматриваемой модели устойчиво, если $r < 1$ и неустойчиво, если $r \geq 1$.

ТЕМА 4

Регулирование рынка и оценка его эффективности

Государственное регулирование рынка может осуществляться путем прямого контроля за уровнем цен или рыночных объемов продаж (квот) или путем использования таких финансовых инструментов как налоги и субсидии (дотации).

Рассмотрим их влияние на рыночные цены и объемы покупок-продаж.

4.1. Квота, «потолок» или «пол» цены

Квота – предельный объем продаж (производства). Обозначим этот объем через Q^{quote}.

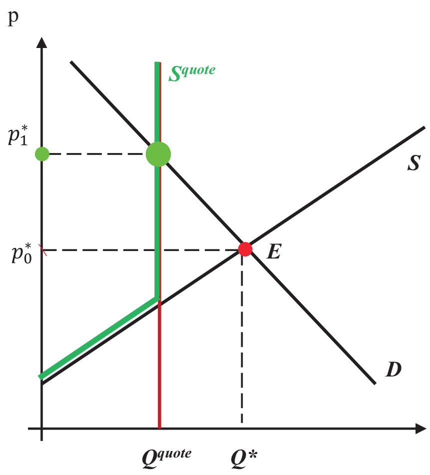


Рис. 16. Влияние квоты на объем продаж на цену

Если государство вводит квоту на объем производства некоторого продукта, то его рыночная цена возрастает (см. рис. 16).

Введение ограничений на цены оказывает разное влияние на объем продаж. Если установлен «потолок» цены (*верхний предел цены*), то на рынке возникает избыточный спрос на данный товар. Если установлен «пол» цены (*нижний предел цены*), то на рынке возникает избыточное предложение товара.

Верхний предел цены (***«потолок» цены***) — это официальный максимум цены, по которой можно продавать товар. Обозначим этот максимум цены через p_1.

На рисунке *17а* видно, что установление цены ниже равновесной привело к увеличению величины спроса на товар и уменьшило величину его предложения. Возник избыточный спрос в размере $Q_2 - Q_1$, товар стал дефицитным.

Нижний предел цены (***«пол» цены***) — это официальный минимум цены, по которой можно продавать товар. Обозначим этот минимум цены через p_2.

На рисунке *17б* видно, что установление цены выше равновесной привело к увеличению величины предложения и уменьшению величины спроса. Потребители не готовы покупать товар по цене p_2 в количестве Q_2 или Q^*. Имеет место избыточное предложение товара в объеме $Q_2 - Q_1$ или «затоваривание».

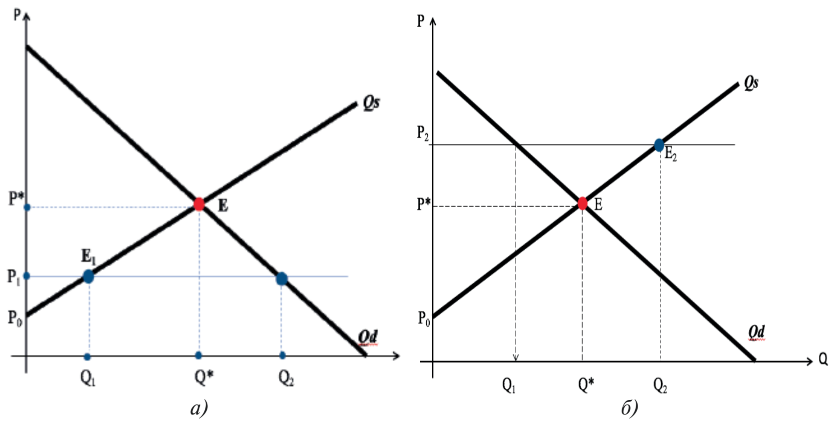


Рис. 17. Влияние ограничений на цену продукции на объем «покупок-продаж»: на рис. 17а) p_1 — «потолок» цены, на рис. 17б) p_2 — «пол» цены.

В первом случае государство решило поддержать малоимущие слои населения, для которых цена p^* была высока. Во втором- производителей товара. Но как видно, результаты не однозначные. Для достижения поставленных целей нужны дополнительные меры поддержки производителей (в первом случае) или потребителей (во втором).

4.2. Влияние потоварного налога и потоварной субсидии на рыночную цену и объем «покупок-продаж»

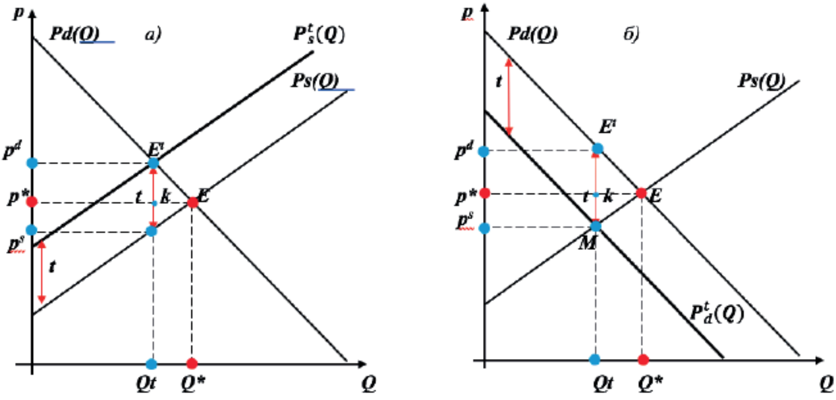
Рассмотрим влияние на цену и объем продаж товара введения налогов и субсидий (дотаций). А именно, проанализируем влияние *потоварного налога* и *потоварной субсидии* на рыночное равновесие, так как они деформируют рыночную цену и объем покупок-продаж.

Потоварный налог — это *фиксированная плата*, приходящаяся на единицу товара (услуги). Им могут облагаться, как производители, так и покупатели товара.

Допустим, ставка налога составляет t ДЕ и налог должен платить производитель (продавец). Изобразим эту ситуацию на графике (см. рис. 18 *а*)).

Введение потоварного налога на производителя увеличивает его затраты на каждую единицу продукции и, следовательно, уменьшает объем производства. Линия предложения $Ps(Q)$ сдвигается вверх на величину налога t и пересекает линию спроса $Pd(Q)$ в точке E^t. Этой точке соответствует объем выпуска Q_t и цена p^d. Цена p^d устраивает покупателей, а после вычета из нее потоварного налога получается цена p^s, которая соответствует интересам продавцов, так как точка (Q_t, p^s) принадлежит линии предложения $Ps(Q)$.

Таким образом, введение потоварного налога на производителя привело к уменьшению объема продаж на величину $Q^* - Q_t$. а государство получило налоговые выплаты в размере $T = t \cdot Q_t = (p^d - p^s) \cdot Q_t$.



а) *б)*

Рис. 18. Влияние потоварного налога на цену и объем продаж:
18 а)-налог платит продавец, 18 б)-налог платит покупатель.

При рассмотрении случая, когда налог платит покупатель можно убедиться, что при одинаковых исходных линиях спроса и предложения, результаты от введения налога будут такие же, как и в случае, когда налог платил продавец. Действительно, обратимся к рисунку *18 б*). Введение налога для покупателей линия спроса $Pd(Q)$ опускается вниз на величину налога t и пересекает линию предложения в точке M. Координаты этой точки позволяют определить тот объем покупок продаж, который соответствует интересам и покупателей и продавцов в этой ситуации. Цена p^s устраивает продавцов, а покупатели могут купить, предложенное им количество товара Q_t по цене p^d, которая выше p^s на величину налога:

$$p^d = p^s + t.$$

Так как объем покупок-продаж Q_t одинаковый в обоих случаях, то и величина налоговых выплат будет такой же: $T = t \cdot Q_t = (p^d - p^s) \cdot Q_t$.

Теперь перейдем к рассмотрению влияния потоварной субсидии на рыночную цену и объем «покупок-продаж».

Потоварная субсидия — это *фиксированная доплата* за каждую единицу произведенного или потребляемого товара (услуги). Ее могут получать, как производители, так и потребители товара. Иногда говорят, что субсидия — это «налог наоборот».

Обозначим ***потоварную субсидию*** через *sb*, а общую величину получаемой субсидии через *SB*, $SB = Q \cdot sb$.

Допустим, субсидия выплачивается производителю чтобы стимулировать его производить большее количество товара. Это уменьшает затраты производителя и увеличивает предложение: линия предложения сдвигается вниз (см. рис.*19а*).

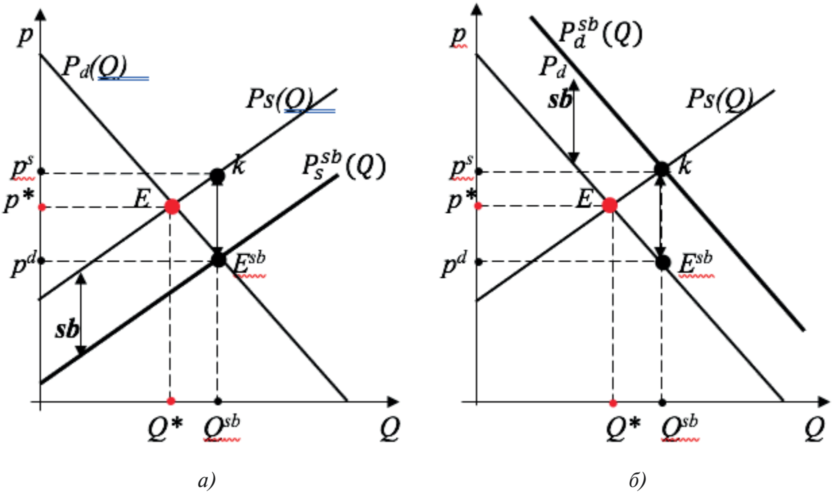


Рис. 19. Влияние потоварной субсидии на цену и объем продаж: 19а) — субсидию получает продавец, 19б) — субсидию получает покупатель

Точка пересечения исходной линии спроса с линией предложения $P_s^{sb}(Q)$ определяет объем покупок-продаж, который возрастает по сравнению с равновесным, и цену спроса p^d, по которой будет продаваться товар. Эта цена соответствует спросу покупателей, но не покрывает затраты производителей. Доплата за каждую произведенную единицу продукции в размере *sb* поднимает цену p^d до уровня p^s, который соответствует интересам производителей, согласно линии предложения *Ps*(*Q*). Общая сумма выплаченной субсидии $SB = Q^{sb} \cdot sb$ определяется площадью прямоугольника $p^d p^s k E^{sb}$ (см. *рис.19а*).

Иногда субсидия выплачивается покупателям, чтобы стимулировать их увеличить потребление определенного товара (чаще услуги). В этом случае введение субсидии приводит к росту спроса (см. *рис. 19б*). Исходная линия спроса $Pd(Q)$ сдвигается вверх и занимает положение $P_d^{sb}(Q)$. Точка k пересечения исходной линии предложения с линией спроса $P_d^{sb}(Q)$ позволяет определить объем покупок-продаж при наличии субсидии и цену p^s, которая соответствует интересам производителей, но высока для покупателей. Однако, субсидия покупателям в размере sb за каждую единицу продукции понижает цену производителей до уровня p^d, соответствующего возможностям покупателей.

Если исходные характеристики спроса и предложения были одинаковые, то независимо от того, кому выплачивается субсидия, объем покупок-продаж, цены для покупателя и продавца и общая величина субсидии будут одинаковые независимо от того, кому она выплачивается.

4.3. Эффективность конкурентного рынка

Проблема эффективного распределения ресурсов и благосостояния общества — одна из основных проблем экономической теории. Экономисты долго искали критерий эффективного распределения благ между потребителями и ресурсов между производителями. И, в конечном итоге, признание большинства экономистов получил критерий, предложенный итальянским социологом-экономистом Вильфредо Парето: ***если никто не может улучшить свое благосостояние, не ухудшая благосостояния хотя бы одного экономического агента, то ресурсы общества распределены эффективно.***

Попробуем применить этот критерий для оценки равновесия на конкурентном рынке отдельного товара. Для этого обратимся к моделям спроса и предложения.

Каждая точка линии спроса Q_d в пространстве (Q,p) показывает какую максимальную цену готов заплатить потребитель за каждую единицу товара. Если рыночная цена p^*, то потребитель, который готов заплатить за Q_1 единицу p_1, покупая ее по цене p^* «выигрывает» сумму $(p_1 - p^*)$

от участия в рыночных отношениях. И только потребитель, приобретающий последнюю Q^* единицу по цене, которую он готов был заплатить, не получает «выигрыша». Таким образом, мы отмечаем, что все покупатели, участвующие в рыночных отношениях, получают от этого выгоду в форме сэкономленной денежной суммы. Она называется «излишек потребителя».

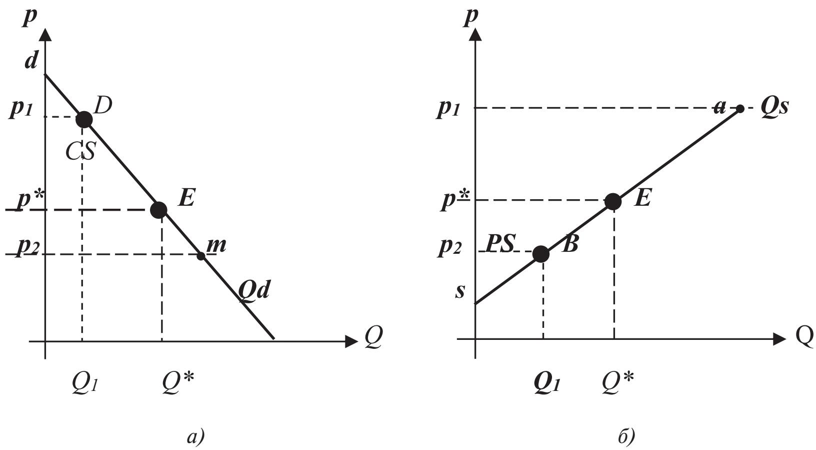


Рис. 20. Излишек потребителя (20а) и излишек производителя (20б) при рыночной цене p^*

Излишек потребителя — это разность между денежной суммой, которую покупатель готов заплатить за товар (расходы) и суммой, которую он заплатил за нее.

Излишек потребителей оценивает выгоду, которую получают покупатели от участия в работе рынка. Будем обозначать его латинскими буквами *CS* (*consumers' surplus*).

При цене p^* величину потребительского излишка можно оценить как площадь треугольника p^*dE (см. *рис. 20а*).

Понижение цены p^* до p_2 увеличивает потребительский излишек на площадь трапеции $p_2\,p^*Em$, повышение рыночной цены p^* до p_1 уменьшает выгоду потребителей на площадь трапеции p^*p_1DE. При цене рыночной цене p_1 потребительский излишек равен площади треугольника p_1dD (см. *рис. 20а*).

Теперь обратимся к оценке выгоды продавцов. Как видно линия предложения отражает прямую зависимость между рыночной ценой и величиной продаж. Любая точка на этой линии показывает ту цену, ниже которой продавец не будет продавать свой товар, так как не сможет окупить затраты. Q_2-ю единицу он не может продать по цене ниже p_2, а Q^*-ю по цене ниже p^*. При этом, продав фактически Q_2-ю единицу по цене p^*, он выигрывает сумму, равную $(p^* - p_2)$, а общую выгоду от продажи Q^* единиц продукции по цене p^* можно оценить как площадь треугольника sp^*E. Эта выгода, полученная производителями от участия в рыночных сделках, называется «излишек производителя».

Излишек производителя — это разность между денежной суммой, которую продавец фактически получает за продажу товара (выручка или доход) и той суммой, за которую он был согласен продать этот объем продукции.

Излишек производителя оценивает выгоду, которую получают продавцы от участия в работе рынка. Будем обозначать его латинскими буквами *PS* (*producers' surplus*).

При рыночной цене равной p^* излишек производителя равен площади треугольника sp^*E (см. *рис. 20б*). При повышении рыночной цены p^* до p_1 излишек производителя увеличивается на площадь трапеции p^*p_1aE. При понижении рыночной цены p^* до p_2 выгоды продавца уменьшаются на площадь трапеции p_2p^*EB. Излишек производителя становится равным площади треугольника sp_2B.

Введенные понятия «излишек потребителя» и «излишек производителя» позволяют оценить эффективность равновесия конкурентного рынка по — Парето. Изобразим излишек потребителя и производителя на одном графике в состоянии равновесия (см. рис. 21).

Суммарная величина излишка потребителя и излишка производителя при рыночной цене отражает выгоды, получаемые обеими сторонами рынка. Является ли распределение ресурсов, при котором на рынке устанавливается цена p^*, при которой интересы покупателей и продавцов, участвующих в работе рынка совпадают, Парето-эффективным?

Может можно перераспределить ресурсы так, чтобы увеличить суммарные выгоды обеих сторон или хотя бы одной, не ухудшая благосостояния другой?

Как видно из рассуждений, приведенных выше, любое отклонение цены (а, следовательно, и объема «покупок-продаж») от равновесной увеличивает излишек одного из агентов и уменьшает излишек другого, то есть нарушается условие Парето-эффективности. И, следовательно, можно утверждать, что равновесное состояние рынка является Парето-эффективным.

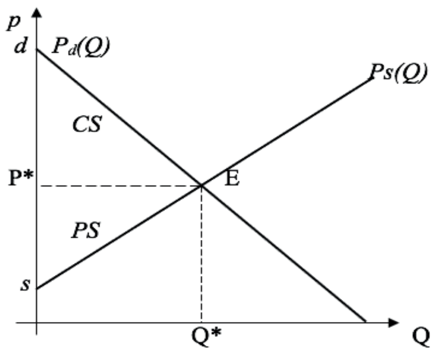


Рис. 21. Излишек потребителя излишек производителя при рыночном равновесии

В подтверждение этого приведем следующие выводы, основанные на проведенном выше анализе влияния изменения цены *p** (а, следовательно, и объема «покупок — продаж») на излишек потребителя и излишек производителя:

1) Предлагаемые товары распределяются между теми потребителями, для которых они имеют наибольшую ценность (это отражается в готовности платить за товар).
2) Продавцы с наименьшими затратами удовлетворяют спрос потребителей, готовых купить товар по более высокой цене.
3) На рынке предлагается такое количество товара, которое максимизирует сумму излишка потребителя и производителя.

На рисунке 22 показана сумма излишков при цене выше и цене ниже равновесной. При любом количестве меньше равновесного ценность товара для покупателей превышает издержки продавцов. Это значит, что увеличение количества производимого товара до равновесного увеличивает выгоды (излишки) и покупателей, и продавцов. А при любом количестве больше равновесного издержки продавцов превышают ценность товара для покупателей. В этом случае уменьшение количества производимого товара будет увеличивать (уменьшать потери) излишек как покупателей, так и продавцов.

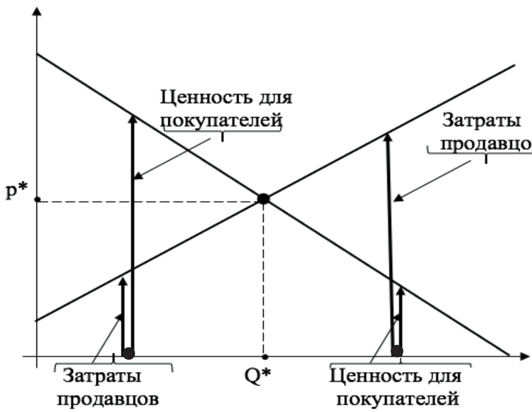


Рис. 22. Эффективность равновесного количества

Вопросы для повторения

1. Чем отличается величина спроса от спроса?
2. Что такое неценовые детерминанты (факторы) спроса? Приведите примеры таких факторов. Как они влияют на спрос и на величину спроса?
3. На рисунке 23 графически задан спрос на велосипеды. Можно ли утверждать, что линия спроса на велосипеды имеет вид: $Q = 2100 - 4p$?
4. Чем отличается величина предложения от предложения?
5. Назовите неценовые факторы предложения. Какое влияние они могут оказывать на предложение и величину предложения?
6. Какая ситуация на рынке называется равновесной? Как соотносятся в равновесии величина спроса и величина предложения?
7. Какое рыночное равновесие называется устойчивым?

8. Какие рыночные ситуации отражает паутинообразная модель (с линейными функциями спроса и предложения)?

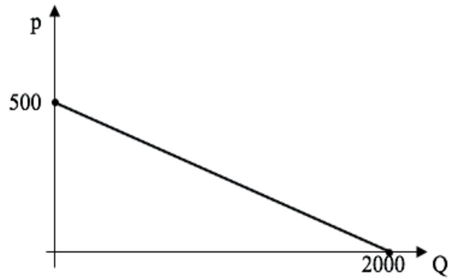


Рис. 23. Линия спроса на велосипеды

9. Можно ли по графической иллюстрации паутинообразной модели определить тип рыночного равновесия?
10. С какой целью государство обращается к регулированию рынка? Какие инструменты при этом могут использоваться?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. На бирже торгуют стандартным товаром — контрактами на поставку в будущем 10 тонн цемента (фьючерсами). Брокеры (покупатели) получили следующие заявки от своих клиентов на покупку фьючерсов. Зависимость числа заявок от цены фьючерса приведена в нижеследующей таблице.

Цена, тыс. руб.	200	199	198	197	196	195	194	193	192	191	190
Число заказов	1	3	4	5	5	4	3	3	5	2	5

Запись. «197 тыс. руб., 5 заказов» означает, что покупатели заказали своим брокерам купить 5 фьючерсов по цене не выше 197 тыс. руб.

Постройте шкалу спроса по данным, приведенным в таблице.

Задание 2. Сформируйте функцию рыночного спроса $Q(p)$, если известно, что на рынке две группы покупателей. Индивидуальный спрос каждого из 200 человек первой группы описывается формулой $q_1 = 5 - 2p$, а индивидуальный спрос каждого из 30 человек второй группы $q_2 = 10 - p$. Постройте график функции рыночного спроса, используя графики агрегированных спросов первой и второй группы.

Задание 3. Рыночный спрос на буквари описывается функцией $Q_d(p) = 500 - 2p$, где p — цена букваря в рублях, а Q_d — тысячи экземпляров. Государственная Дума обязала правительство закупить по любой рыночной цене еще 30 тысяч экземпляров для бесплатного распределения среди детей-сирот. Найдите новую функцию спроса и изобразите на графике спрос на буквари до решения Думы и после.

Задание 4. Постройте дискретную шкалу рыночного предложения, если на рынке некоторого товара всего два производителя предлагают товар по ценам, указанным в нижеследующей таблице.

Цена, руб.	1100	1200	1300	1400	1500
Производитель А	0	10	15	20	25
Производитель Б	10	20	25	30	35

Задание 5. Сформируйте функции рыночного спроса и предложения, если известно, что на рынке товара А представлены две группы покупателей, спрос которых описывается функциями $q_1^d = 150 - p$ и $q_2^d = 100 - 2p$ и две группы продавцов, функции предложения которых $q_1^s = 4p - 100$ и $q_2^s = 3p - 120$.

1) Определите точку равновесия.
2) Оцените эластичность спроса и предложения в точке равновесия.
3) Чему равен излишек потребителей в равновесии?

Задание 6. Функция спроса на рынке товара Д имеет вид $Qd = 1000 - 20p$, функция предложения $Qs = 10p - 200$ (p — цена продукции в денежных единицах, Q – объем продаж, тонн). Стремясь ограничить потребление товара Д, правительство устанавливает предельно допустимый объем продаж на рынке (квоту), равный 120 тоннам.

1) На сколько процентов изменится выручка продавцов в результате введения квоты на рынке товара Д?
2) Приведите графическую интерпретацию решения.

Задание 7. Допустим, функция спроса на компакт-диск знаменитой певицы имеет вид $Qd = 150 — P$, а функция предложения задана уравнением $Qs = 3P – 50$, где Р — цена в рублях, а Qd и Qs — величины соответственно спроса и предложения в тысячах штук в месяц.

1) Найдите равновесную цену и равновесное количество.
2) Как изменится рыночное равновесие, если правительство зафиксирует цену на уровне не ниже 60 р.?
3) Каким должен быть *потоварный налог* на данный компакт-диск, чтобы установить цену на уровне 60 р.? Что можно сказать при установлении такого налога об изменении объема продаж?

Задание 8. В паутинообразной модели известны функции спроса и предложения на рынке некоторого товара: $Q_D(t) = 46 — 8P(t)$ *и* $Q_S(t) = 4P(t – 1) + 10$, соответственно.

1) Найдите равновесное значение цены.
2) Является ли равновесие устойчивым?
3) Найдите цену четвертого периода, если $\boldsymbol{p_0} = 2$, и оцените, как изменяется отклонение цены от равновесной δ_t от периода к периоду.
4) Приведите графическую иллюстрацию процесса изменения цены.

Основная литература

1. *Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Моргунов В. И.* Микроэкономика. СПб.: Экономическая школа, 1996. Т. 1, глава 1.
2. *Пиндайк Р.*, *Рубинфельд Д.* Микроэкономика. СПб: Питер, 2011, глава 1.
3. *Мэнкью Г.*, *Тейлор М.*, Микроэкономика, 3-е издание. СПб: Питер, 2019. Главы 1 и 2

РАЗДЕЛ 3

Теория производства
(лекции 6-10)

После того, как мы определили, что будем изучать рыночную экономику и приняли определение рынка, допустим, такое: «*Рынок* состоит из покупателей и продавцов товаров или услуг» или «*Рынок* – это форма взаимодействия между покупателями и продавцами товаров и услуг, недвижимости, ценных бумаг, валюты...», остается понять, как принимают решения покупатели и продавцы. Будем называть их *экономическими агентами*. Попробуем обобщить существующие подходы и множество экономико-математических моделей, разработанных для поиска ответов на эти вопросы. Начнем с **моделирования процесса производства.**

ТЕМА 5

Теория производственных функций

Производство — это процесс преобразования производственных факторов в продукцию. Однако не любые сочетания производственных факторов могут обеспечить процесс производства, то есть в реальности существуют ограничения на сочетание факторов в производстве. Поэтому моделируя процесс производства, мы выделяем из множества факторов, те их комбинации, с помощью которых может быть произведена продукция и вводим понятие технологии.

Технология – это **определённый** способ соединения (комбинации) факторов производства в едином производственном процессе, который определяет результирующий уровень выпуска при **эффективном** использовании факторов производства

В самом общем виде технологию можно описать с помощью n-мерного *множества производственных возможностей* (*технологического множества*) $Y \subset R^n$, где каждый вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y$ является технологически допустимым. При этом, если $y_i < 0$, значит этот продукт используется фирмой в качестве фактора производства, если $y_i > 0$, значит, данный продукт производится.

С помощью *множества производственных возможностей* можно описать технологию, в которой используется множество факторов производства и производится несколько видов продукции. Однако, нам чаще придется рассматривать технологии производства одного продукта с использованием нескольких факторов производства. И в этом случае технологию производства фирмы удобнее описывать с помощью понятия «производственная функция».

5.1. Производственная функция и характеристики моделируемого процесса производства

Производственная функция описывает зависимость объема выпуска от затрат производственных факторов (определенную технологию).

Уточним и формализуем приведенное определение.

Производственная функция определяет максимально возможный уровень выпуска y при использовании определенного количества факторов производства и данной технологии: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где y — количество продукции, выпускаемое фирмой за определённый период времени, x_i — величина затрат i-го фактора производства за тот же период времени ($i = 1, \ldots, n$), а вид функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соответствует данной технологии.

Для успешного моделирования процесса производства производственная функция должна удовлетворять определенным требованиям (свойствам). Рассмотрим кратко эти требования для $n = 2$.

1) Без затрат факторов производства нет выпуска: $f(0,0) = 0$.
2) При отсутствии хотя бы одного из факторов нет выпуска: $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$.

3) С ростом затрат хотя бы одного из факторов объем выпуска растет (не убывает) если $x' \geqslant x$ $(x' \neq x)$, то $f(x') \geqslant f(x)$.
4) С ростом затрат одного из факторов при **неизменном количестве другого** фактора объем выпуска не уменьшается: если $x > 0$, то $\frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_i} \geqslant 0$, $(i = 1, 2)$ (*предельный продукт i-го фактора* неотрицателен).
5) Предельный продукт i-го фактора при **неизменном количестве другого** фактора не возрастает: если $x > 0$, то $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial x_i^2} \leq 0$ (закон *убывающей предельной производительности* (*отдачи*) переменного фактора).
6) Однородная степени t: $f(sx_1, sx_2) = s^t f(x_1, x_2)$ $(s > 0, t > 0)$.

Пусть (для наглядности) $n = 2$, и один из факторов производства — труд (обозначим его через L), второй — капитал (обозначим через K). Тогда производственная функция записывается, как $y = f(L, K)$ или $y = F(L, K)$. Если обозначить объем выпуска традиционной для экономистов буквой q (или Q), то двухфакторная производственная функция может быть записана в следующей форме $q = f(L, K)$, $Q = f(L, K)$ или ($q = F(L, K)$, $Q = F(L, K)$).

В процессе изложения мы будем обращаться к различным формам записи производственной функции в зависимости от конкретного аспекта анализа.

Переход к двухфакторной производственной функции позволяет представить графически некоторые ее характеристики. Будем откладывать по горизонтальной оси возможные значения затрат труда (переменной L), а по вертикальной — значения затрат капитала (переменной K).

Тогда любая точка в пространстве (L, K) — это сочетание определенных количеств труда и капитала, которое позволяет произвести определенный объем продукта, согласно той или иной технологии, описываемой производственной функцией. Для различных производственных функций объемы выпуска при одинаковых затратах факторов производства, вообще говоря, отличаются, так как каждая производственная функция описывает конкретную технологию с ее отличительными особенностями.

Допустим, $Q_1 = AL^{\alpha}K^{\beta}$ $(A > 0, \alpha > 0, \beta > 0)$, а $Q_2 = \alpha L + \beta K$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$. Тогда, если, допустим, $L = 20$, а $K = 9$, то даже при одинаковых α иβ $Q_1 = A(20)^{\alpha}9^{\beta}$ и $Q_2 = 20\alpha + 9\beta$ — это разные объемы выпуска.

Будем называть определенное сочетание количеств труда и капитала *способом производства* и обозначать чtрез $T = (L, K)$. Тогда любая точка в пространстве (L, K) — это способ производства (см. рисунок 24).

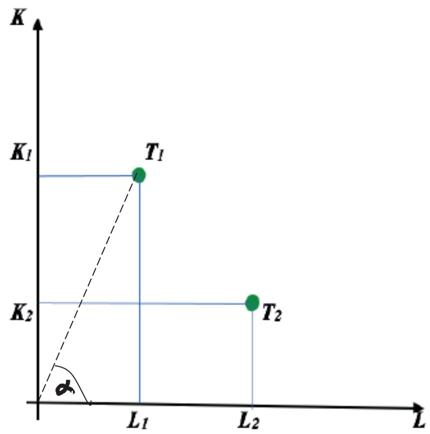


Рис. 24. Технологические способы производства T_1 и T_2

Среди множества способов производства можно выделить такие, которые при заданной производственной функцией технологии, могут обеспечить одинаковый объем выпуска.

Зададим некоторый объем выпуска, допустим, $Q^* = F(L,K)$.

Множество ***технологических*** *способов производства {Li,Ki}, которые позволяют произвести объем выпуска Q*, образуют* ***изокванту*** *в пространстве факторов производства* (L,K).

Каждая изокванта представляет измеряемый и вполне определённый уровень выпуска. Математически изокванта – это *линия уровня* производственной функции. Ее можно описать неявно: $Q^* = F(L,K)$ или как функцию одной переменной, явно выразив одну переменную через другую: $K(L) = g(L)$ или $L(K) = g^{-1}(K)$.

Важной характеристикой любого способа производства является капиталоворуженность труда. Обозначим ее через k. По определение $k(T)=\dfrac{K}{L}$.

На рисунке 24 отражена графическая интерпретация капиталовооруженности труда для способа производства T_1:

$$k(T_1)=tg\alpha=\frac{K_1}{L_1}.$$

На рисунке 22 изображены три изокванты, соответствующие разным объемам выпуска. Согласно свойству 3) производственной функции, чем выше расположена изокванта, тем большему объему выпуска она соответствует, т.е. $Q_3>Q_2>Q_1$**.** При этом нужно отметить, что капиталовооруженность труда может быть одинаковой независимо от объема выпуска.

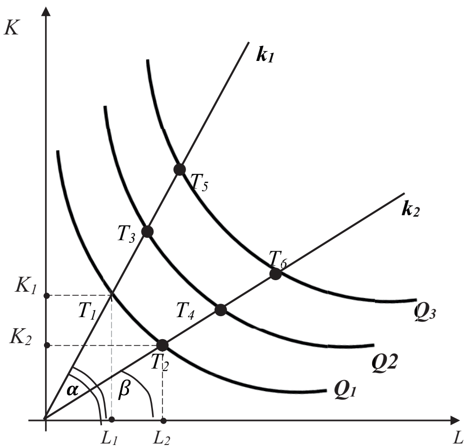


Рис. 25. Изокванты, технологические способы и капиталововоруженность труда

По рисунку 25 видно, что капиталовооруженность труда для способов $T_1, T_3,\ T_5$ равна k_1, а для способов T_2, T_4, T_6 она равна k_2

$$\left(k_1=\frac{K_1}{L_1}=\frac{K_3}{L_3}=\frac{K_5}{L_5}=tg\alpha,\ k_2=\frac{K_2}{L_2}=\frac{K_4}{L_4}=\frac{K_6}{L_6}=tg\beta\right).$$

С другой стороны, капиталовооруженность для способов производства, принадлежащей одной изокванте, может быть различной. Способы производства T_1 и T_2, принадлежащие одной изокванте, характеризуются разной капиталовооруженностью. Кроме того, при перемещении по изокванте, допустим, из T_1 в T_2 происходит изменение соотношения между трудом и капиталом. В данном случае (при переходе из T_1 в T_2) количество капитала уменьшается, а количество используемого труда возрастает. В какой пропорции происходит это замещение капитала трудом, как она изменяется при переходе от одного способа производства к другому? Это важная характеристика при выборе способа производства, обеспечивающего нужный объем выпуска при существующем ограничении на затраты. Поэтому введем *меру замещения* одного фактора другим.

Рассмотрим изокванту, способы производства которой обеспечивают объем выпуска равный Q^* (см. рис. 26). При переходе от способа производства T_1 к способу производства T_2 количество труда возрастает на $\Delta L = L_2 - L_1$, а количество капитала уменьшается на величину $\Delta K = K_2 - K_1$.

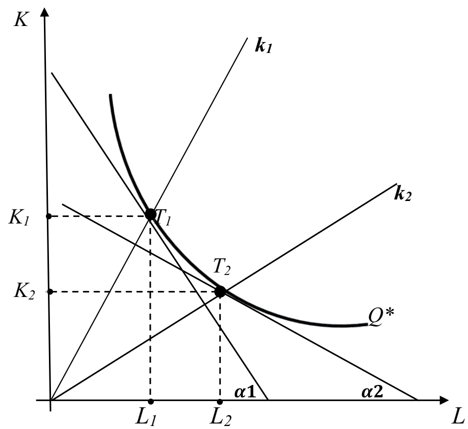


Рис. 26. Предельная норма технологического замещения

Чтобы ответить на вопрос о том насколько следует уменьшить количество применяемого капитала для увеличения количества используемого труда на одну единицу можно ввести такой показатель: $-\dfrac{\Delta K}{\Delta L}$. Назовем его «Предельная норма технологического замещения» капитала трудом ($MRTS_{LK}$ — *marginal rate of technical substitution*).

Отметим, что при переходе от способа производства T_2 к способу производства T_1 будет уменьшаться количество труда и расти количество капитала, а величина $-\dfrac{\Delta L}{\Delta K}$,будет отражать пропорцию замещения труда капиталом и оценивать предельную норму технологического замещения труда капиталом ($MRTS_{KL}$).

Предельная норма технологического замещения капитала трудом ($MRTS_{LK}= -\dfrac{\Delta K}{\Delta L}$) *показывает, на сколько единиц необходимо уменьшить количество капитала, чтобы увеличить количество труда на одну единицу, сохранив неизменным объем выпуска продукции.*

Если предположить, что изменение количества труда мало, т.е. $\Delta L \to 0$ и изокванта описывается в виде $K(L) = g(L)$, то легко получить выражение для $MRTS_{LK}$ в этом случае. По сути — это оценка пропорции (скорости) замещения капитала трудом в точке.

$$\lim_{\Delta L \to 0} MRTS_{LK} = \lim_{\Delta L \to 0}\left(-\frac{\Delta K}{\Delta L}\right) = -\frac{\boldsymbol{dK}}{\boldsymbol{dL}}.$$

Математически $-\dfrac{dK}{dL}$ — это производная функции $K(L) = g(L)$ в рассматриваемой точке (например, T_1 или T_2). Тогда можно обратиться к геометрической интерпретации предельной нормы технологического замещения, как производной (см. рис. 26) и убедиться в том, что

$$MRTS(T_1) = -\frac{dK}{dL}(T_1) = tg\alpha_1,\ MRTS(T_2) = -\frac{dK}{dL}(T_2) = tg\alpha_2.$$

Легко показать, что при перемещении из точки T_1 в точку T_2 по изокванте, изображенной на рисунке 26, $MRTS_{LK}$ уменьшается. Экономическая причина уменьшения $MRTS$ состоит в том, что в большинстве отраслей факторы производства не являются абсолютно взаимозаменяемыми: они и дополняют друг друга в производственном процессе. Можно «образно» сказать кривизна изокванты отражает «трудности» при замене одного фактора другим в рамках данного объёма выпуска.

Рассмотрим еще две такие характеристики моделируемого процесса производства, как отдача от факторов производства. Пусть $Q = F(L,K)$. Согласно свойствам производственной функции 3) и 4) прирост затрат труда L или капитала K увеличивает (не уменьшает) объем выпуска Q. Оценить на сколько он возрастает можно с помощью показателей отдачи от одной дополнительной единицы фактора производства. Обозначим показатель отдачи от одной дополнительной единицы труда через MP_L (*marginal product of labor*)*,* отдачи от одной дополнительной единицы капитала через MP_K ((*marginal product of capital*): $MP_L = \dfrac{\Delta Q}{\Delta L}$, $MP_K = \dfrac{\Delta Q}{\Delta K}$. И будем называть эти показатели, как «*предельный продукт труда*» — MP_L и «*предельный продукт капитала*» — MP_K. Если ΔL и ΔK бесконечно малы, то эти показатели могут быть найдены как частные производные производственной функции в некоторой точке (при некотором объеме выпуска), т.е.

$$MP_L = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial L}, MP_K = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial K}.$$

Покажем, что значение $MRTS$ в любой точке изокванты может быть найдено через значения частных производных в этой точке.

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{\dfrac{\partial Q(l,K)}{\partial L}}{\dfrac{\partial Q(L,K)}{\partial K}} = \frac{MP_L}{MP_K} = MRTS_{LK}$$

Для всех точек изокванты, соответствующей некоторому объему выпуска Q (Q=F(L,K), Q-*const.*) имеет место тождество (21)

$$dQ = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial L} dL + \frac{\partial Q(L,K)}{\partial K} dK \equiv 0 \qquad (21)$$

Тогда (при предположении, что функция $Q = F(L,K)$ удовлетворяет свойствам 1)-5)) можно из (1) выразить $-\dfrac{dK}{dL}$:

$$\frac{\partial Q(L,K)}{\partial L}dL = -\frac{\partial Q(L,K)}{\partial K}dK \qquad (22)$$

$$\text{или} -\frac{dK}{dL} = \frac{\dfrac{\partial Q(l,K)}{\partial L}}{\dfrac{\partial Q(L,K)}{\partial K}} = \frac{MP_L}{MP_K}.$$

Введем еще одну характеристику моделируемого процесса производства, которая называется *«эластичность замещения ресурсов»* (допустим капитала трудом) и обозначим ее σ_{LK}. Этот показатель (по определению) отражает изменение капиталовооруженности в ответ на изменение предельной нормы технологического замещения, точнее σ_{LK} — это эластичность капиталовооруженности по $MRTS: \sigma_{LK} = E_{MRTS}\left(\dfrac{K}{L}\right) = \dfrac{(\Delta(K/L))\%}{(\Delta MRTS)\%}$.

Действительно, когда мы перемещаемся по изокванте от одного способа производства к другому, допустим от T_1 к T_2 (см. рис. 26) изменяются, как $MRTS$, так и капиталовооруженность k. Так $k(T_1) = \dfrac{K_1}{L_1}$, а $k(T_2) = \dfrac{K_2}{L_2}$.

Меняются они, вообще говоря, по-разному и, конечно, интересно оценить на сколько процентов изменяется капиталовооруженность труда при изменении пропорции замещения труда капиталом на один процент. Это и есть *эластичность замещения* капитала трудом.

Математики считают, что величина обратная эластичности замещения одного ресурса другим $1/\sigma_{LK}$ отражает «кривизну» изокванты. Убедимся в этом далее при рассмотрении конкретных видов изоквант.

Согласно определению $\sigma_{LK} = E_{MRTS}\left(\dfrac{K}{L}\right)$. Если расписать формулу эластичности, то можно получить удобную формулу (логарифмическую) для расчета σ_{LK}.

$$\sigma_{LK} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)\cdot MRTS}{d\left(MRTS\right)\cdot\left(\frac{K}{L}\right)} = \left(\text{где } MRTS = -\frac{dK}{dL}\right) =$$

$$= \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)\cdot MRTS}{\left(\frac{K}{L}\right)\cdot d\left(MRTS\right)} = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(MRTS\right)}.$$

5.2. Виды производственных функций и их характеристики

Начнем с рассмотрения *функции Кобба-Дугласа, с изображения* классических изоквант, с которых, как правило, начинается описание процесса моделирования производства. Легко проверить, что для производственной функции Кобба-Дугласа выполняются все свойства производственной функции. Затем перейдем к функциям которые характеризуют «особенные» способы производства, когда факторы производства замещают друг друга в постоянной пропорции, либо абсолютно **не** замещает, а дополняют друг друга. И наконец, рассмотрим функцию с постоянной эластичностью замещения, частными случаями которой являются функция Кобба-Дугласа и функция Леонтьева.

Для каждой функции выпишем формулу для расчета $MRTS_{LK}$ в любой точке пространства ресурсов, оценим σ_{LK} и изобразим на графике изокванту и пару лучей, соответствующих постоянной капиталовооруженности.

Производственная функция ***Кобба-Дугласа***:

$$Q\left(L,K\right) = AL^{\alpha}K^{\beta}, A>0, \alpha>0, \beta>0.$$

Изокванта именно этой функции изображена на рисунке 26. Легко показать, что для функции Кобба-Дугласа $MRTS = -\frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\alpha K}{\beta L}$, а $\sigma_{LK} = E_{MRTS}\left(\frac{K}{L}\right) = 1\left(\frac{1}{\sigma_{LK}} = 1\right)$.

Линейная производственная функция: $Q = \alpha L + \beta K$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Изокванта этой функции, соответствующая объему выпуска $Q = \alpha L + \beta K =$

Q^*, отражена на рисунке 27. $MRTS_{LK} = -\dfrac{dK}{dL} = \dfrac{MP_L}{MP_K} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

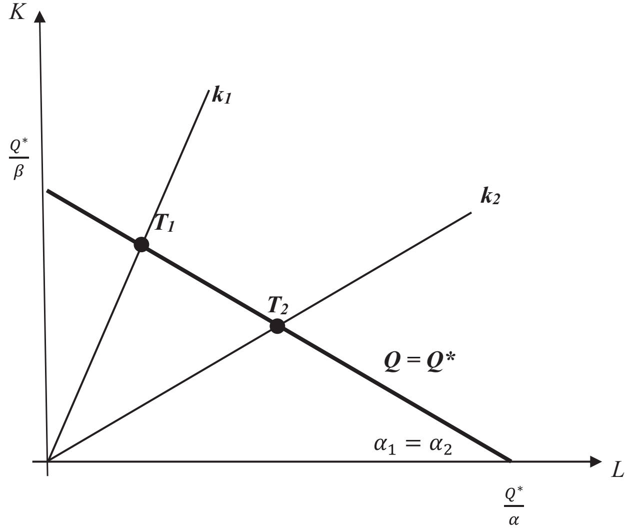


Рис. 27. Изокванта линейной функции $Q = \alpha L + \beta K = Q^*$

Для линейной функции предельная норма технологического замещения одинакова для всех способов производства и равна α/β. Эластичность замещения факторов производства «бесконечна» $\sigma_{LK} = E_{MRTS}\left(\dfrac{K}{L}\right) = \infty$, а «кривизна» изоквант равна нулю ($\dfrac{1}{\sigma_{LK}} = 0$).

Производственная функция ***Леонтьева:*** $Q = min\{\alpha L, \beta K\}, \alpha > 0, \beta > 0$. Опишем изокванту этой функции для $Q = min\{\alpha L, \beta K\} = Q^*$. Рассмтрим три случая: $1^\circ : \alpha L = \beta K$, $2^\circ : \alpha L > \beta K$, $3^\circ : \alpha L < \beta K$.

$1^\circ : \alpha L = \beta K$, значит $Q^* = \alpha L = \beta K$ и мы имеем одну точку изокванты с координатами $\left(L = \dfrac{Q^*}{\alpha}, K = \dfrac{Q^*}{\beta}\right)$ (на рисунке 25 это точка T).

$2^{\circ}: \alpha L > \beta K$, значит $Q^* = \beta K$ и для точек, лежащих на кривой безразличия $Q = min\{\alpha L, \beta K\} = Q^*$, $K = \frac{Q^*}{\beta}$, а $L > \frac{\beta}{\alpha} K = \frac{Q^*}{\alpha}$, (на рисунке 28 это луч, исходящий из точки T, параллельный оси L).

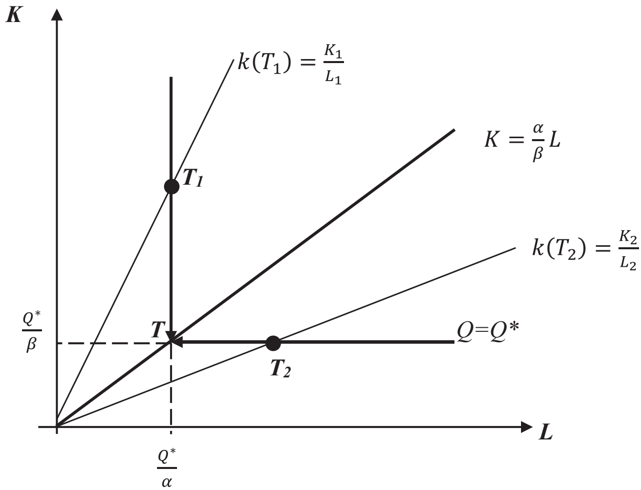


Рис. 28. Изокванта производственной функции Леонтьева $Q = min\{\alpha L, \beta K\} = Q^*$.

$3^{\circ}: \alpha L < \beta K$, значит $Q^* = \alpha L$ и для точек, лежащих на кривой безразличия $Q = min\{\alpha L, \beta K\} = Q^*$, $L = \frac{Q^*}{\alpha}$, *0* $K > \frac{\alpha}{\beta} L = \frac{Q^*}{\beta}$, (на рисунке 28 это луч, исходящий из точки T, параллельный оси K).

Предельная норма замещения факторов производства равна условно нулю ($-\frac{dK}{dL}$ не существует). Факторы производства не могут замещать друг друга. $\sigma_{LK} = E_{MRTS}\left(\frac{K}{L}\right) = 0$, а изокванты имеют (условно) бесконечную «кривизну» ($\frac{1}{\sigma_{LK}} = \infty$).

И, наконец, рассмотрим производственную функцию с постоянной эластичностью производства (*CES*) в следующей форме:

$$Q = \left(L^{\alpha} + K^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(\alpha \le 1\right).$$

Предельная норма замещения для этой функции

$$MRTS_{LK} = -\frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha},\ \sigma_{LK} = E_{MRTS}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_{LK}} = 1-\alpha\right).$$

Изокванта этой функции $Q = \left(L^{\alpha} + K^{\alpha}\right)^{1/\alpha} = Q^{*}$ изображена на рисунке 29.

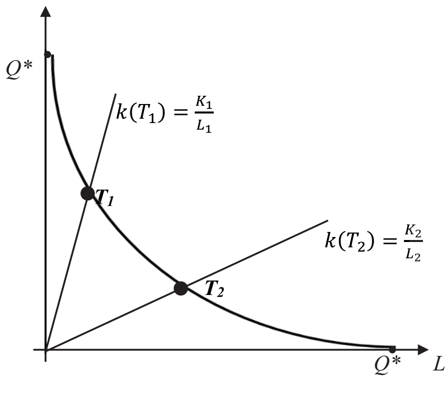


Рис. 29. Изокванта производственной функции CES: $Q = \left(L^{\alpha} + K^{\alpha}\right)^{1/\alpha} = Q^{*}$

5.3. Особенности производства в долгосрочном промежутке

В теории производства рассматриваются особенности функционирования фирмы на различных промежутках времени.

Долгосрочным называется такой промежуток времени, в течение которого можно изменить количество всех используемых факторов производства.

Краткосрочным называется промежуток времени, в течение которого невозможно изменить количество хотя бы одного из используемых факторов производства.

При моделировании процесса производства в долгосрочном промежутке представляет интерес вопрос о том насколько увеличивается объем выпуска при увеличении затрат всех факторов производства в некоторое число раз.

Масштабом производства называется увеличение всех факторов производства в одинаковое число раз (*соотношение факторов производства не меняется*).

Увеличение объема производства (выпуска продукции) в результате увеличения всех факторов производства в одинаковое число раз называется ***отдачей от масштаба***.

Различают три вида отдачи от масштаба: постоянную, убывающую и возрастающую.

Пусть $q = F(L, K)$ некоторая производственная функция. Увеличим масштаб производства в s ($s > 1$) раз. Объем производства, при этом, вырастет, допустим в k раз, то есть

$$q(sL,sK) = F(sL,sK) = k\,F(L, K) = k\,q(L,K).$$

- Если $s = k$, то говорят, что производственная функция $q = F(L, K)$ моделирует *постоянную отдачу от масштаба* (увеличение количества используемых факторов производства в s раз привело к увеличению объема выпуска ровно в такое же число раз).
- Если $s < k$, то говорят, что производственная функция $q = F(L, K)$ моделирует *убывающую отдачу от масштаба* (увеличение количества используемых факторов производства в $\boldsymbol{s}$ раз привело к увеличению объема выпуска в меньшее чем $\boldsymbol{s}$ число раз).
- Если $s > k$, то говорят, что производственная функция $q = F(L, K)$ моделирует *возрастающую отдачу от масштаба* (увеличение количества используемых факторов производства в $\boldsymbol{s}$ раз привело к увеличению объема выпуска в большее чем $\boldsymbol{s}$ число раз).

Различные производственные функции моделируют различную отдачу от масштаба.

В качестве примера можно рассмотреть функцию Кобба—Дугласа: $Q(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta},\ A>0, \alpha>0, \beta>0$. Легко убедиться, что, если $\alpha+\beta=1$, то функция моделирует постоянную отдачу от масштаба, если $\alpha+\beta<1$, функция моделирует убывающую отдачу от масштаба, а в случае $\alpha+\beta>1$ имеет место возрастающая отдача от масштаба.

Если производственная функция является однородной степени ***t***, то есть $q(\boldsymbol{s}L, \boldsymbol{s}K) = F(\boldsymbol{s}L, \boldsymbol{s}K) = \boldsymbol{s}^{t}F(L, K)$, то отдача от масштаба определяется степенью однородности производственной функции. Если $t = 1$, то имеет место постоянная отдача от. масштаба, при $t < 1$, $\boldsymbol{s}^{t} < \boldsymbol{s}$. Это значит, что функция моделирует убывающую отдачу от масштаба. При $t > 1$, $\boldsymbol{s}^{t} > \boldsymbol{s}$ — имеет место возрастающая отдача от масштаба.

В долгосрочном промежутке на объем выпуска оказывает влияние технический прогресс, в результате которого увеличивается производительность (средний и предельный продукт) факторов производства. Введение новых, прогрессивных технологий позволяет произвести большее количество продукта, чем ранее, при прежних технологиях, при тех же затратах факторов производства. Традиционно различают три типа научно-технического прогресса: капиталоинтенсивный, трудоинтенсивный и нейтральный.

Технический прогресс называется *капиталоинтенсивным* (*трудосберегающим*), если при неизменной капиталовооруженности труда он сопровождается опережающим ростом предельного продукта капитала MP_K по сравнению с предельным продуктом труда MP_L.

Можно сказать, что он сопровождается падением предельной нормы технологического замещения. Действительно, $MRTS_{LK} = -\dfrac{dK}{dL} = \dfrac{MP_L}{MP_K}$ и, если MP_K растет быстрее, чем MP_L, **то** $MRTS_{LK}$ уменьшается.

Технический прогресс называется *трудоинтенсивным* (*капиталосберегающим*), если при неизменной капиталовооруженности труда он сопровождается опережающим ростом предельного продукта труда MP_L по сравнению с предельным продуктом капитала MP_K.

Легко показать, что трудоинтенсивный технический прогресс сопровождается ростом предельной нормы технологического замещения.

Технический прогресс называется *нейтральным*, если он сопровождается пропорциональным увеличением предельных продуктов труда и капитала MP_L и MP_K.

В этом случае предельная норма технологического замещения не меняется для тех способов производства, которые характеризуются одинаковой капиталовооруженностью.

5.4. Особенности производства в краткосрочном промежутке

Рассмотрим краткосрочный промежуток, в течение которого фирма, использующая два фактора производства (L и K) не может изменить количество используемого капитала. Другими словами, количество капитала фиксировано и, допустим, равняется $\bar{K}$, а труд является переменным фактором. Это обусловливает определенные особенности процесса производства. Прежде, чем перейти к выявлению этих особенностей уточним основные предпосылки анализа и выведем некоторые соотношения. Будем предполагать:

- Фирма производит один продукт
- Технология и цены факторов производства не меняются в течение рассматриваемого периода времени
- Все нанимаемые единицы труда являются для фирмы однородными с одинаковой производительностью, квалификацией...

Экономисты считают, что динамика объема выпуска от затрат труда в краткосрочном промежутке адекватно описывает кубическая функция вида $q\left(L,\bar{K}\right)=-\alpha L^3+\beta L^2+\gamma L$, $(\alpha>0, \beta>0, \gamma>0)$. Функции предельного и среднего продукта для этой производственной функции являются параболами, каждая из которых достигает максимума при определенных затратах труда. Изобразим на рисунке 30 графики производственной функции $q\left(L,\bar{K}\right)$, предельного продукта $MP_L=-3\alpha L^2+2\beta L+\gamma$ и среднего продукта $AP_L=-\alpha L^2+\beta L+\gamma$. Приведенные графики помогают увидеть и провести обоснование основных особенностей процесса производства в краткосрочном промежутке.

Первое, что можно отметить, что с ростом затрат труда объем выпуска сначала растет, достигает максимально возможного объема при имеющемся количестве капитала $\bar{K}$, и затратах труда L_3, после чего дальнейший рост затрат труда уже не может обеспечить увеличение выпуска. Объем производства начинает падать. Это мы наблюдаем на верхнем графике. Вспомнив графическую интерпретацию среднего и предельного продуктов, можно убедиться, что оба они сначала растут, а потом начинают падать.

На графике 30 б) видно, что кривая AP_L пересекает кривую MP_L в точке своего максимума ($L = L_2$).

Покажем, что независимо от вида производственной функции, линия среднего продукта пересекает линию предельного в точке своего максимума.

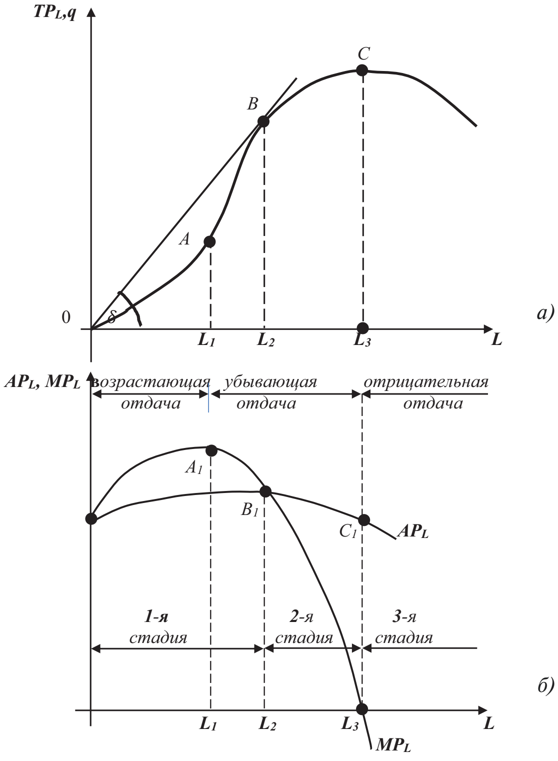


Рис. 30. Кривая общего продукта (30 а),
кривые предельного и среднего продуктов труда (30 б)

Действительно,

$$AP_L = \frac{Q(L)}{L},\ \frac{dAP_L}{dL} = \frac{d\dfrac{Q(L)}{L}}{dL} = \frac{LQ_L{}' - Q(L)}{L^2} = \frac{1}{L}\left(Q_L{}' - \frac{Q(L)}{L}\right) =$$

$$= \frac{1}{L}\left(MP_L - AP_L\right)$$

1° когда $MP_L - AP_L > 0$, то есть $MP_L > AP_L, \frac{dAP_L}{dL} > 0$. Это означает, что AP_L возрастает.

2° когда $MP_L - AP_L = 0$, то $\frac{dAP_L}{dL} = 0$ — средний продукт труда достигает максимума.

3° когда $MP_L - AP_L < 0$, то есть $MP_L < AP_L, \frac{dAP_L}{dL} < 0$. Это означает, что AP_L убывает.

Кроме того, можно убедиться, что $MP_L(1) = AP_L(1)$. По определению

$$MP_L(1) = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{Q(1) - Q(0)}{1-0} = \frac{Q(1)}{1} = Q(1),\ AP_L(1) = \frac{Q(1)}{1} = Q(1).$$

Поэтому на рисунке 30 б) кривые среднего и предельного продукта начинаются из одной точки.

При изменении количества используемого т руда мы наблюдаем три вида отдачи от переменного фактора. Объем выпуска растет при росте затрат труда до $L = L_3$. Но при $L \in [0, L_1]$ отдача от каждой дополнительной единицы труда растет, растет предельный продукт труда. Это стадия *возрастающей отдачи* от роста переменного фактора. При дальнейшем росте затрат труда отдача от каждой дополнительной единицы труда падает. Это стадия *убывающей отдачи* от роста переменного фактора. Начинает действовать *закон убывающей отдачи переменного фактора* или *закон убывания предельного продукта*. Как только предельный продукт труда становится равным нулю (при $L = L_3$) начинается стадия *отрицательной отдачи*.

Таким образом, при росте затрат труда мы наблюдаем различные соотношения между предельным и средним продуктами труда, которым соответствуют различные ***стадии производства.***

На ***первой стадии*** $L \in [0, L_2]$ фирме выгодно расширение производства, так как средний продукт труда растет, и предельный продукт остается больше среднего продукта. Последнее говорит о том, что эластичность выпуска по труду больше единицы, т.е. увеличение затрат труда на 1% приводит к увеличению объема выпуска более, чем на 1%.

Отдача от капитала на этой стадии растет $AP_K\left(\bar{K}\right)=\dfrac{Q\left(L,\bar{K}\right)}{\bar{K}}$.

На границе первой и второй стадии, при $L= L_2$, отдача от единицы труда достигает. максимального значения и при этом $AP_L\left(L,\bar{K}\right)=MP_L\left(L,\bar{K}\right)$. Эластичность выпуска по труду равняется единице.

На ***второй стадии*** $L\in\left[L_2,L_3\right]$ средний продукт труда снижается, а предельный остается ниже среднего. Общий объем выпуска при этом растет, обеспечивая рост отдачи от капитала, но эластичность выпуска по труду меньше единицы.

На границе второй и третьей стадий при $L = L_3$ фирма производит максимальный объем выпуска**,** поэтому средний продукт капитала $AP_K\left(\bar{K}\right)=\dfrac{Q\left(L,\bar{K}\right)}{\bar{K}}$ достигает максимального значения, а предельный продукт труда становится нулевым. Эластичность выпуска по труду равна нулю.

На ***третьей стадии*** $L > L_3$ отдача от каждой дополнительной единицы труда (MP_L) становится отрицательной и общий объем выпуска снижается. Уменьшается не только производительность труда $AP_L\left(\bar{K}\right)=\dfrac{Q\left(L,\bar{K}\right)}{L}$, но и капитала $AP_K\left(\bar{K}\right)=\dfrac{Q\left(L,\bar{K}\right)}{\bar{K}}$. Производство на этой стадии лишено для фирмы экономического смысла.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что рациональная фирма будет производить только на второй стадии, выбирая такое соотношение труда и капитала, которое обеспечит ей максимальную прибыль.

Вопросы для повторения

1. Какие математические инструменты используют экономисты для моделирования производства?
2. Если процесс производства описывается, допустим, с помощью производственной функции $Q = F(L,K) = 0{,}25L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{3}}$, то можно утверждать, что эластичность объема производства по труду постоянная и равняется S при любых затратах труда?
3. Выпишите уравнение изокванты для производственной функции из пункта 2), соответствующей объему выпуска равному15. Принадлежит ли способ производства $T = (100;\ 216)$ этой изокванте?
4. Чему равна предельная норма технологического замещения капитала трудом ($MRTS_{LK} = -\frac{dK}{dL}$) для способа $T = ?$
5. Покажите, что в любой точке изокванты предельная норма технологического замещения может быть выражена и оценена через предельные полезности факторов производства, т.е. (для двух факторов производства) $-\frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K}$.
6. На какой стадии производства в краткосрочном промежутке наблюдается возрастающая отдача переменного фактора?
7. На какой стадии производства в краткосрочном промежутке действует *закон убывающей отдачи переменного фактора* производства?
8. Как соотносятся предельный и средний продукт труда на первой стадии производства? А как они соотносятся на второй стадии?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Производственная функция фирмы имеет вид: $Q = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{3}}$. Выпишите уравнение изокванты $Q = 24$ в пространстве факторов производства (L,K). Рассмотрите два способа производства $T_1 = (64;\ 27)$ и $T_2 = (144;8)$.

1) Убедитесь, что названные выше технологические способы принадлежат одной изокванте. Изобразите изокванту $Q = 24$ в пространстве (L,K).
2) Изобразите в пространстве (L,K) множество технологических способов с капиталовооруженностью равной $\boldsymbol{\kappa_1}$ (через $\boldsymbol{\kappa_1}$ обозначим капиталовооруженность способа T_1) и множество технологических способов с капиталовооруженностью равной $\boldsymbol{\kappa_2}$ (через $\boldsymbol{\kappa_2}$ обозначим капиталовооруженность способа T_2).
3) Оцените $\mathrm{MRTS} = -\dfrac{dK}{dL}$ для способов T_1 и T_2 и изобразите их на графике из пункта 1).
4) Оцените графически эластичность капитала по труду в точках T_1 и T_2 и убедитесь, что эта оценка совпадает с аналитической (см. уравнение изокванты!!!)

Задание 2. Рассмотрите функцию *CES*: $q = \left(L^{\alpha} + K^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha \leqslant 1$ $(\alpha \neq 0)$

1) Докажите, что для нее эластичность замещения равняется $\dfrac{1}{1-\alpha}$ (доказать через определение и логарифмическую формулу);
2) Докажите, что функция *CES* является однородной первой степени и характеризует производство с постоянной отдачей от масштаба (проверить «в лоб», по определению);
3) Рассчитайте для функций из задания 4) эластичность выпуска по капиталу и по труду и оцените эластичность производства.

Задание 3. Дана производственная функция $q = \left(L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$.

1) Рассчитайте предельную норму технического замещения $-\dfrac{dK}{dL}$ для технологического способа $T_1 = (16;9)$ (в точке T_1 пространства ресурсов).

2) Оцените эластичность замещения ресурсов σ_{LK}.
3) Выпишите уравнение изокванты, проходящей через точку T_1, постройте ее график и отразите на нем $MRTS(T_1)$.
4) Изобразите на графике из пункта 3) множество технологических способов, имеющих капиталовооруженность равную 1/4.

Задание 4. В течение дня фирма затрачивает на производство товара 54 человеко-часа и 48 машино-часов. Производственная функция фирмы

$q(L,K) = 0{,}2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{3}}$.

Рассчитайте, насколько необходимо увеличить продолжительность труда работников, чтобы при сокращении работы машин на 2 часа выпуск продукции не изменился.

Задание 5. В течение дня фирма затрачивает на производство товара 20 человеко-часов и 18 машино-часов. Производственная функция фирмы

$q(L,K) = 0{,}4L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}}$.

Рассчитайте, насколько необходимо увеличить работу машин, чтобы при сокращении продолжительности труда на 2 часа выпуск продукции не изменился.

Задание 6. Технологию производства товаров можно описать производственной функцией ***Кобба-Дугласа***. Фирма получает 27 ед. продукции в день, используя 144 машино-часа и 81 человека-час.

Известно, что предельный продукт капитала на 50% меньше его среднего продукта, а средний продукт труда на 300% больше его предельного продукта. Найдите производственную функцию.

Задание 7. Оцените отдачу от масштаба для функций $q = L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$, $q = L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}$, $q = L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{2}{3}}$ и эластичность производства, постройте изокванты при $L = 27$, $K = 8$ и для $L = 27 \times 8$, $K = 8 \times 8$ для трех функций (три графика в пространстве (L,K)).

Проведите содержательный анализ (как связаны расположение изоквант в пространстве (L, K) и отдача от масштаба?)

Задание 8. Производство товара в краткосрочном периоде описывается производственной функцией $q(L) = -L^3 + 9L^2 + 120L$, а количество используемого капитала равняется 27. ОПРЕДЕЛИТЕ:

1) при каких значениях используемого труда предельный продукт труда убывает;
2) при каком количестве используемого труда фирма будет производить продукцию на первой стадии производства;
3) чему равна капиталовооруженность труда при максимальном значении предельного продукта труда;
4) приведите графики предельного и среднего продукта, выделив стадии расширения производства.

ТЕМА 6

Моделирование принятия решений фирмой в долгосрочном промежутке (лекции 9,10)

В простейшем понимании ***фирма*** — это организационная единица, создаваемая для реализации некоторой цели. Как правило, фирма предназначена для производства определенного товара или (и) услуги. Успешное достижение этой цели требует от менеджеров фирмы принятия многочисленных решений, которые касаются, как приобретения и распределения факторов производства, так и предложения произведенной продукции на рынке ее сбыта. Т.е. фирма предстает как связующий институт между рынком готовой продукции и ресурсными рынками (рынком труда и капитала).

Мы будем называть рассматриваемые фирмы конкурентными, т.к. каждая из них не оказывает определяющего влияния на рыночные цены факторов производства и готовой продукции из-за своих незначительных размеров.

Перейдем к рассмотрению моделей, помогающих отразить эти процессы, увидеть и обосновать их особенности. Но прежде введем основные показатели, отражающие результаты деятельности фирмы, и их обозначения, к которым мы будем обращаться в процессе изложения.

Совокупная (общая) *выручка* — это стоимость реализованной или произведенной продукции. Если обозначить общую выручку через TR (*Total Revenue*), объем продукции через q (или Q), цену спроса на цену продукции через $p(q)$, то $TR(q) = qp(q)$.

Совокупные (общие) *затраты или издержи* на производство q единиц продукции будем обозначать через $TC(q)$, $C(q)$ или $Z(q)$.

Совокупная (*общая*) *прибыль* — это разность между суммарной выручкой и затратами на производство продукции. Будем обозначать совокупную прибыль через *PR* или *Pr* (*Profit*). Тогда, согласно определению, $PR(q) = TR(q) - TC(q)$.

Кроме общих показателей, нам понадобятся средние и предельные. Мы будем формировать их по правилам, изложенным в лекции 1 (*пункт 1.2.1*).

Для рассмотрения основных видов задач, которые решают фирмы введем предположение о. том, что все факторы производства, которые используют фирмы можно отнести либо к капиталу, либо к труду. Обозначим труд через L, а капитал через K.

Тогда можно рассмотреть двумерное пространство факторов производства. Любая точка в пространстве (L, K) — это сочетание определенных количеств труда и капитала, которое позволяет произвести определенный объем продукта $q(L, K)$, согласно технологии, описываемой производственной функцией. В этом случае совокупные (*общие*) *издержки фирмы* можно представить как сумму затрат на труд и капитал:

$$TC(L,K) = wL + rK,$$

где w — «цена» единицы труда (ставка заработной платы), а r — «цена» единицы капитала (допустим, арендная плата за пользование единицей капитального блага).

При принятии решений об объеме выпуска фирме приходится сравнивать разные способы производства, реализация которых требует одинаковых затрат. Будем называть множество таких способов производства *изокостой*.

Изокостой (*isocost line*) *называется линия равных издержек производства.*

Уравнение изокосты (*isocost equation*) — это **линия уровня функции** издержек $TC(L,K) = wL + rK$, и может быть представлена в явном виде, допустим, как зависимость капитала от количества используемого фактора труд в следующем виде*:*

$$K = \frac{TC}{r} - \frac{w}{r} L,$$

где наклон изокосты равен отношению рыночных цен факторов производства: $-\frac{w}{r}$

Теперь перейдем к рассмотрению моделей, помогающих отразить процессы оптимального функционирования конкурентных фирм, увидеть, и обосновать их особенности применительно к решению основных задач, стоящих перед ними.

6.1. Задача максимизации прибыли конкурентной фирмы

В микроэкономической теории считается, что задача максимизации прибыли в долгосрочном промежутке является основной для фирмы, функционирующей в условия конкуренции. Остальные задачи, рассматриваемые в этом разделе, являются производными от нее.

Для случая двух ресурсов — труда и капитала — в долгосрочном периоде задача максимизации прибыли имеет вид:

$$PR(L,K)=TR(L,K)-TC(L,K)=pq(L,K)-(wL+rK)\rightarrow max$$

Для решения этой задачи достаточно выписать условия первого порядка и решить получившуюся систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial PR}{\partial K}=p\dfrac{\partial Q}{\partial K}-r=0;\, pMP_K=r;\, MRP_K{}^{1}=r;\\ \dfrac{\partial PR}{\partial L}=p\dfrac{\partial Q}{\partial L}-w=0;\, pMP_L=w;\, MRP_L=w.\end{cases} \tag{23}$$

Очевидно, что условия первого порядка сводятся к равенствам предельной доходности факторов их ценам:

$$\frac{pMP_K}{r}=\frac{pMP_L}{w}=1 \text{ или } \frac{MP_K}{r}=\frac{MP_L}{w}=\frac{1}{p}. \tag{24}$$

Из последнего соотношения в (24) можно сделать вывод, что в точке оптимума отношение предельных производительностей факторов про-

[1] ***MRP (marginal revenue product)*** — предельная доходность фактора производства (капитала, труда).

изводства равняется отношению цен факторов т.е. $\frac{MP_L}{MP_K}=\frac{w}{r}$. Учитывая, что предельная норма технологического замещения в любой точке изокванты может быть выражена через предельные производительности факторов, можно утверждать, что в точке оптимума она равна отношению цен на факторы производства.

$$MRTS_{LK}=-\frac{dK}{dL}=\frac{MP_L}{MP_K}=\frac{w}{r}. \tag{25}$$

Тогда и эластичность замещения факторов производства в точке оптимума приобретает дополнительную содержательную интерпретацию. Действительно, если имеет место (3), то, согласно определению, $\sigma_{LK}=E_{MRTS}\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{\left(\Delta\left(K/L\right)\right)\%}{\left(\Delta MRTS\right)\%}=\frac{\left(\Delta\left(K/L\right)\right)\%}{\left(\Delta {}^{w}\!/\!{}_{r}\right)\%}$, т.е. σ_{LK} для оптимального способа производства позволяет получить оценку, насколько интенсивными будут изменения спроса фирмы на ресурсы (и, следовательно, капиталовооруженности) при изменениях рыночных цен на ресурсных рынках.

То есть коэффициент σ_{LK} показывает, насколько процентов изменится капиталовооруженность труда $\left(\frac{K}{L}\right)$ при экономически эффективном способе производства при изменении относительных цен на ресурсы $\left(\frac{w}{r}\right)$ на один процент.

В двухфакторной модели коэффициент эластичности замещения неотрицателен, но в многофакторной модели коэффициенты эластичности замещения для различных пар ресурсов может принимать как положительное, так и отрицательное значение.

Следует отметить, что задача (23) не имеет решения, если производственная функция характеризуется возрастающей или постоянной отдачей от масштаба. Подробнее это положение будет рассмотрено в разделе, посвященном ресурсным рынкам.

Решение (L^*, K^*) системы (23) является глобальным максимумом функции долгосрочной прибыли фирмы, если линии уровня рассматриваемой нами производственной функции (изокванты) строго выпуклы к началу координат.

Если в начальный момент времени фирме известны равновесные цены $(\overline{p}, \overline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{r}})$ в конечный момент долгосрочного периода, фирма, решив задачу (23) будет знать какое количество капитала и труда должна будет приобрести в долгосрочном периоде, чтобы максимизировать свою прибыль.

Решение $\left(L^*, K^*\right)$ системы (23-24) является глобальным максимумом прибыли $PR\left(L, K\right)$ и называется *локальным рыночным равновесием фирмы*. Локальным — в том смысле, что речь идет об одной (конкретной) фирме действующей как на рынке готовой продукции, так и на рынках факторов производства[2].

Итак, мы получаем две функции спроса фирмы: на капитал $K^* = g_1\left(p, w, r\right)$ и труд $L^* = g_2\left(p, w, r\right)$, зависящие от экзогенно заданных цен готовой продукции и цен на факторы производства.

Если эти функции поставить в производственную функцию мы получим функцию предложения фирмой своей (готовой) продукции: $F\left(g_1\left(p, w, r\right), g_2\left(p, w, r\right)\right) = Q^s\left(p, w, r\right)$.

Все три функции однородны по ценам в нулевой степени, т.е. при изменении масштаба цен значения функций не меняются – это очевидно, т.к. при изменении цен в ***s*** раз в функции прибыли: $sPR\left(K, L\right) = spQ\left(K, L\right) - s\left(rK + wL\right)$, условия первого порядка не изменяются.

Рассмотрим пример решения задачи максимизации прибыли в долгосрочном периоде для фирмы, использующей технологию, описываемую функцией Кобба-Дугласа: $Q = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{3}}$.

$$PR = p \cdot L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{3}} - wL - rK \to max$$

---

[2] Задача максимизации долгосрочной прибыли не имеет решения, если производственная функция характеризуется возрастающей или постоянной отдачей от масштаба, т.к. в первом случае фирма сталкивается с отрицательной прибылью (что недопустимо в долгосрочном периоде), во втором – задача оказывается неразрешимой даже в общем случае.

$$\frac{K^{\frac{1}{3}} \cdot 3K^{\frac{2}{3}}}{2L^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}} = \frac{w}{r}, \ \frac{3K}{2L} = \frac{w}{r} \Rightarrow$$

$$K = \frac{2w}{3r} L,$$

$$pMP_L = w, \to \frac{p \cdot K^{\frac{1}{3}}}{2L^{\frac{1}{2}}} = w, \to p \cdot (\frac{2w}{3r})^{\frac{1}{3}} L^{\frac{1}{3}} = 2wL^{\frac{1}{2}}, \to p \cdot (\frac{2w}{3r})^{\frac{1}{3}} = 2wL^{\frac{1}{6}},$$

$$L^{\frac{1}{6}} = \frac{p \cdot (2w)^{\frac{1}{3}}}{(3r)^{\frac{1}{3}}(2w)} = \frac{p}{(3r)^{\frac{1}{3}}(2w)^{\frac{2}{3}}},$$

$$L^d = \frac{p^6}{(3r)^2(2w)^4}, \ K^d = \frac{2w}{3r} \cdot \frac{p^6}{(3r)^2(2w)^4} = \frac{p^6}{(3r)^3(2w)^3}.$$

$$Q^s = \left[\frac{p^6}{(3r)^2(2w)^4}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{p^6}{(3r)^3(2w)^3}\right]^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{p^3}{(3r)\,(2w)^2} \cdot \frac{p^2}{(3r)(2w)} = \frac{p^5}{(3r)^2(2w)^3}.$$

6.2. Задача максимизации выпуска при ограничении на затраты

Задача максимизация прибыли фирмы при лимите на используемые ею ресурсы в долговременном промежутке эквивалентна задаче максимизации выпуска при лимите на ресурсы.

Допустим, государственное унитарное предприятие строит автомобильные дороги при утвержденном бюджете. Его целью может являться строительство наибольшего количества километров при соответствии заданным стандартам качества.

Если фирма имеет лимит на ресурсы, равный $\bar{C}$, т.е. $wL + rK = \bar{C}$, то задача $PR(K,L) = pQ(K,L) - \bar{C} \to max$, эквивалентна задаче на условный экстремум — максимизации выпуска при ограничении на затраты:

$$\begin{cases} F(L,K) \to max \\ wL + rK = \bar{C}, \\ L > 0, K > 0. \end{cases} \tag{26}$$

Решаем эту задачу методом Лагранжа: составляем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\mathrm{L},\ \mathrm{K},\ \lambda)=F\left(K,L\right)+\lambda(\bar{C}-wL-rK),$$

и решаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}(\mathrm{L},\ \mathrm{K},\ \lambda)}{\partial K}=\dfrac{\partial F\left(K,L\right)}{\partial K}-\lambda r=0, \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\mathrm{L},\ \mathrm{K},\ \lambda)}{\partial L}=\dfrac{\partial F\left(K,L\right)}{\partial L}-\lambda w=0, \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\mathrm{L},\ \mathrm{K},\ \lambda)}{\partial\lambda}=\bar{C}-wL-rK=0. \end{cases} \tag{27}$$

Длинная точка $(\widehat{L},\widehat{K},\hat{\lambda})$ – единственное решение системы (27).

Короткая точка $\left(\widehat{L},\hat{K}\right)$ – точка глобального максимума целевой функции $F\left(K,L\right)$ в виду допущения о строгой выпуклости изоквант к точке начала координат. Функции $\widehat{L}=\varphi_1\left(w,r,\bar{C}\right)$, $\widehat{K}=\varphi_2\left(w,r,\bar{C}\right)$ называются ***функциями условного спроса по Маршаллу (по Вальрасу)*** на ресурсы (труд и капитал) со стороны фирмы. Подставив эти функции условного спроса в целевую (производственную) функцию $Q=F\left(L,K\right)$, получаем ***функцию условного предложения*** фирмы на рынке готовой продукции:

$$\widehat{Q}=F(\varphi_1\left(w,r,\bar{C}\right),\varphi_2\left(w,r,\bar{C}\right))=f\left(w,r,\bar{C}\right).$$

Все три функции однородны в нулевой степени относительно трех переменных $(w,r,\bar{C})$ – это очевидно, т.к. при изменении в s раз трех переменных, ограничение задачи не изменяется.

Приведем графическую иллюстрацию решения задачи максимизации выпуска при ограничении на затраты. Если второе уравнение из системе уравнений (27) разделить на первое, получим выражение: $MRTS_{LK}=\dfrac{MP_L}{MP_K}=\dfrac{w}{r}$, которое фиксирует равенство тангенса угла наклона касательной к изокванте ($MRTS_{LK}$), проведенной через точку оптимума (точка А), и тангенса угла наклона изокосты $\left(\dfrac{w}{r}\right)$. В данном случае речь идет о внутреннем решение (лежащем внутри неотрицательного квадранта ресурсного множества).

$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$, или $\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$ – показывает сколько дополнительного продукта произведем, если вложим дополнительно 1 ден. ед.

Условие оптимальности $\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$ – иногда в оптимуме не выполняется: леонтьевская функция, например.

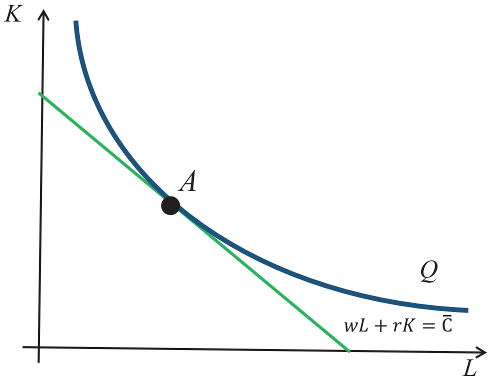


Рис. 31. Оптимум в случае внутреннего решения

Оптимальное решение, представленное на рисунке 31 называют ***внутренним***, поскольку оптимальная точка ***A*** находится «внутри» двумерного ***пространства доступных способов производства*** ($L_A^* > 0, K_A^* > 0$).

В некоторых ситуациях изокоста и изокванта имеют разный наклон на всем их протяжении в достижимом множестве способов производства (см. рисунок 32) и, значит, не имеют точки касания при неотрицальных значениях факторов производства. В этом случае ***оптимальное решение*** определяется способом производства, лежащим на изокосте в ресурсном множестве и наиболее близким к точке касания (которая формально определяется при отрицательном значении одного из факторов производства), и называется это решение — ***краевым (угловым)*** ($L_A^* > 0, K_A^* = 0$ *; 81>*$L_A^* = 0, K_A^* > 0$).

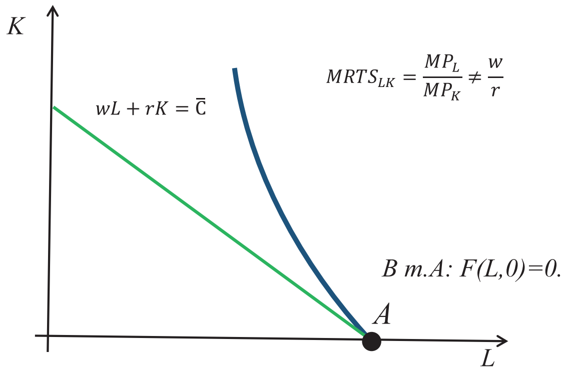


Рис. 32. Краевое решение

При изменении лимита на используемые ресурсы ($\bar{C}$) при фиксированных ценах $(\bar{w},\bar{r})$ точки $\left(\widehat{L},\widehat{K}\right)$ соответствующие решению этой задачи образуют на плоскости K0L линию (красного цвета на рисунке 33), которая называется ***линией развития фирмы в долговременном промежутке***

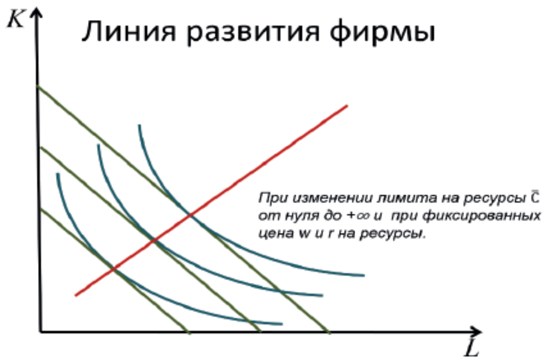


Рис. 33. Линия развития фирмы,
как множество решений задачи максимизации выпуска

Рассмотрим ***пример*** внутреннего решения задачи максимизации выпуска при ограничении на затраты в долгосрочном периоде для фирмы, использующей технологию, описываемую функцией Кобба-Дугласа вида:

$Q = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{3}}$.

$$\begin{cases} Q = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{3}} \to \max \\ wL + rK = \bar{C} \end{cases}$$

$$K = \frac{2w}{3r} L,\ \bar{C} = wL + r\frac{2w}{3r} L = L\left(\frac{3w + 2w}{3r}\right) = L \cdot \frac{5}{3} w,$$

$$\hat{L} = \frac{3\bar{C}}{5w},\ \hat{K} = \frac{2w}{3r} \cdot \frac{3\bar{C}}{5w} = \frac{2\bar{C}}{5r},$$

$$\hat{Q} = \left(\frac{3\bar{C}}{5w}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2\bar{C}}{5r}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\bar{C}}{5}\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{3}{w}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

6.3. Задача минимизации затрат для достижения заданного объема выпуска

Задача максимизация прибыли фирмы при фиксированном выпуске в долговременном промежутке эквивалентна задаче минимизация издержек фирмы при фиксированном выпуске.

Допустим, производственный план фирмы утвержден и желательно произвести заданный (фиксированный) объем продукции подешевле.

Способы производства продукции, которые позволяют произвести заданные объемы производства с минимальными издержками называются ***экономически эффективными способами производства.***

Если фирма имеет фиксированный выпуск, т.е. $\bar{Q} = F(K, L)$, то задача

$$PR(K, L) = p\bar{Q} - wL - rK \to max,$$

эквивалентна задаче на условный экстремум — минимизации затрат для достижения заданного объема выпуска:

$$\begin{cases} wL + rK \to min, \\ F(K, L) = \bar{Q}, \\ L > 0, K > 0. \end{cases} \tag{28}$$

Составляем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\mathrm{L, K}, \lambda) = wL + rK + \lambda\left(\bar{Q} - F(K, L)\right),$$

и решаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{L(L,\,K,\,\lambda)}}{\partial K} = r - \lambda \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathrm{L(L,\,K,\,\lambda)}}{\partial L} = w - \lambda \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathrm{L(L,\,K,\,\lambda)}}{\partial \lambda} = \bar{Q} - F(K,L). \end{cases} \quad (29)$$

Длинная точка $(\breve{L},\breve{K},\breve{\lambda})$ – единственное решение системы (29).

Короткая точка $(\breve{L},\breve{K})$ точка глобального минимума целевой функции $wL+rK$ при наличии ограничения $F(K,L)=\bar{Q}$, в виду допущения о строгой выпуклости изоквант к точке начала координат. Функции $\breve{L}=\psi_1(w,r,\bar{Q}),\breve{K}=\psi_2(w,r,\bar{Q})$ называются ***функциями условного спроса по Хиксу*** на ресурсы (труд и капитал) со стороны фирмы. Подставив эти функции условного спроса в целевую функцию $C=wL+rK$, получаем **функцию условных издержек фирмы**: $\breve{C}=w\cdot\psi_1(w,r,\bar{Q})+r\cdot\psi_2(w,r,\bar{Q})=\breve{C}(w,r,\bar{Q})$ – весьма полезная функция – показывает при каких минимальных издержках можно произвести заданный объем выпуска.

«Функции» условного спроса по Хиксу: $\breve{L}=\psi_1(w,r,\bar{Q}),\breve{K}=\psi_2(w,r,\bar{Q})$— однородны нулевой степени относительно переменных: r, w, т.к. при изменении в *s* раз этих переменных уравнение, полученное делением второго уравнения на первое в системе (29): $MRTS_{LK}=\dfrac{MP_L}{MP_K}=\dfrac{w}{r}$, не изменяется.

Функция условных издержек фирмы: $\breve{C}(w,r,\bar{Q})$ — однородна первой степени по r, w – это очевидно, исходя из вида функции издержек: $\breve{C}=w\cdot\psi_1(w,r,\bar{Q})+r\cdot\psi_2(w,r,\bar{Q})$.

Рассмотрим пример внутреннего решения задачи минимизации издержек при фиксированном объеме выпуска в долгосрочном периоде для фирмы, использующей технологию, описываемую функцией Кобба-Дугласа вида: $Q=L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{cases} wL + rK \to min \\ \bar{Q} = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$K = \frac{2w}{3r}L, \quad \bar{Q} = L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2w}{3r}\right)^{\frac{1}{3}} L^{\frac{1}{3}} = L^{\frac{5}{6}}\left(\frac{2w}{3r}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$L^{\frac{5}{6}} = \frac{\bar{Q}(3r)^{\frac{1}{3}}}{(2w)^{\frac{1}{3}}}, \ \check{L} = \frac{\bar{Q}^{\frac{6}{5}} \cdot (3r)^{\frac{2}{5}}}{(2w)^{\frac{2}{5}}}, \ \check{K} = \frac{2w}{3r} \cdot \frac{\bar{Q}^{\frac{6}{5}} \cdot (3r)^{\frac{2}{5}}}{(2w)^{\frac{2}{5}}} = \frac{\bar{Q}^{\frac{6}{5}}(2w)^{\frac{3}{5}}}{(3r)^{\frac{3}{5}}},$$

$$C = w \cdot \frac{\bar{Q}^{\frac{6}{5}} \cdot (3r)^{\frac{2}{5}}}{(2w)^{\frac{2}{5}}} + r \cdot \frac{\bar{Q}^{\frac{6}{5}}(2w)^{\frac{3}{5}}}{(3r)^{\frac{3}{5}}} = \bar{Q}^{\frac{6}{5}}\left[\frac{w \cdot (3r)^{\frac{2}{5}}}{(2w)^{\frac{2}{5}}} + \frac{r \cdot (2w)^{\frac{3}{5}}}{(3r)^{\frac{3}{5}}}\right] =$$

$$= \bar{Q}^{\frac{6}{5}} w^{\frac{3}{5}} r^{\frac{2}{5}}\left[\frac{(3)^{\frac{2}{5}}}{(2)^{\frac{2}{5}}} + \frac{(2)^{\frac{3}{5}}}{(3)^{\frac{3}{5}}}\right] = \bar{Q}^{\frac{6}{5}} w^{\frac{3}{5}} r^{\frac{2}{5}}\left[\frac{3+2}{(2)^{\frac{2}{5}}(3)^{\frac{3}{5}}}\right] = 5\bar{Q}^{\frac{6}{5}}\left(\frac{w}{3}\right)^{\frac{3}{5}}\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{2}{5}}.$$

При изменении объема выпуска собственной продукции ($\bar{Q}$) при фиксированных ценах ($\bar{w}, \bar{r}$) точки ($\check{K}, \check{L}$) соответствующие решению этой задачи образуют на плоскости OKL линию (красного цвета), которая так же называется ***линией развития фирмы в долговременном промежутке***

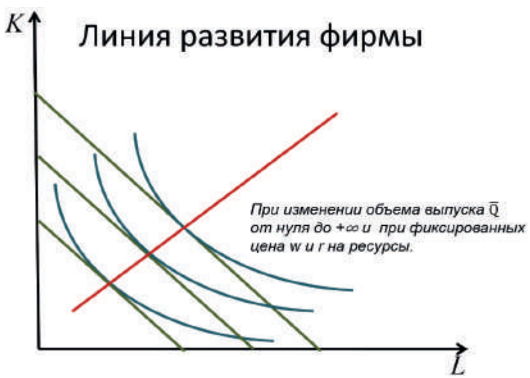


Рис. 34. Линия развития фирмы,
как множество решений задачи минимизации издержек

Подводя итоги проведенного моделирования последних двух задач принятия решений фирмой при ограничении на затраты или на выпуск необходимо отметить двойственность производственного выбора фирмы в долгосрочном промежутке. Оптимальный выбор комбинации ресурсов L^* и K^* (*т. A*) может анализироваться как проблема максимизации объема выпуска при заданном (фиксированном) значении затрат (*прямая задача*), но и как проблема минимизации затрат при заданном (фиксированном) объеме выпуска (*задача связанная с прямой задачей*).

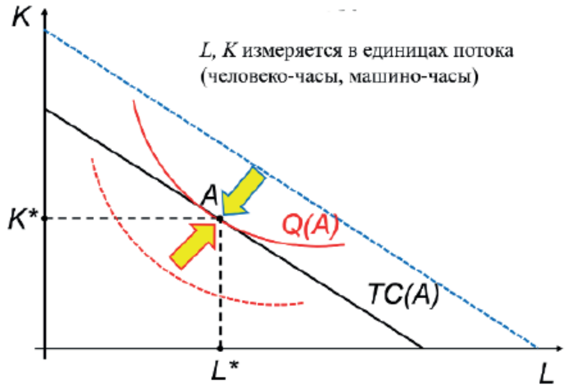


Рис. 35. Графическая интерпретация решений прямой и связанной с ней задачи в теории производства

Схематично проблема выбора (двойственности) в теории производства представлена на рисунке 36.

Рис. 36. Двойственность производственного выбора фирмы

Вопросы для повторения

1. Какие целевые функции имеет фирма в условиях конкуренции?
2. Какая ситуация на рынках называется локальным рыночным равновесием фирмы?
3. Как изменилась трактовка показателя эластичности замещения с учетом решения задачи максимизации прибыли?
4. Как определяются функции условного спроса по Маршаллу (Вальрасу) со стороны фирмы на ресурсы?
5. Как определяется функция условного предложения фирмы на рынке готовой продукции?
6. Как определяются функции условного спроса по Хиксу со стороны фирмы на ресурсы?
7. Как определяется функция условных (минимальных) издержек фирмы?
8. Как изменяются решения оптимизационных задач фирмы при переходе от внутренних оптимумов к краевым?
9. При каких предпочтениях в точке внутреннего оптимума условие (25) не выполняется?
10. Почему задачи максимизации выпуска и минимизации издержек в краткосрочном периоде лишены особого экономического интереса?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Рассмотрим различные варианты смещения линий равных издержек.

Проведите проверку предлагаемых уравнений изокост и объясните их смещение на графиках в пространстве *(L, K) (рисунки 37 и 38)*.

1) В производстве некоторого количества продукта общие издержки фирмы равны 2400 ден. ед., ставка заработной 15 ден. ед./чел. в час, ставка арендной платы за пользование капиталом 20 ден. ед./ед. в час. Тогда первоначально уравнение изокосты имеет вид: $2400 = 15L + 20K$, или $K = 120 - 0{,}75L$.

Если общие издержки возрастут до 3000, то уравнение изокосты примет вид: $K = 150 - 0{,}75L$.

Если общие издержки уменьшатся до 1800, то уравнение изокосты изменится следующим образом: $K = 90 - 0{,}75L$.

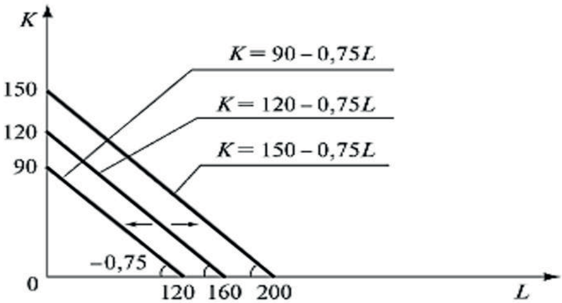


Рис. 37

2) Если ставки заработной платы изменится: до 20 ден. ед,, до 12 ден. ед (см. левый рисунок).
3) Если цена капитала изменится: до 25 ден. ед, до 15 ден. ед (см. правый рисунок).

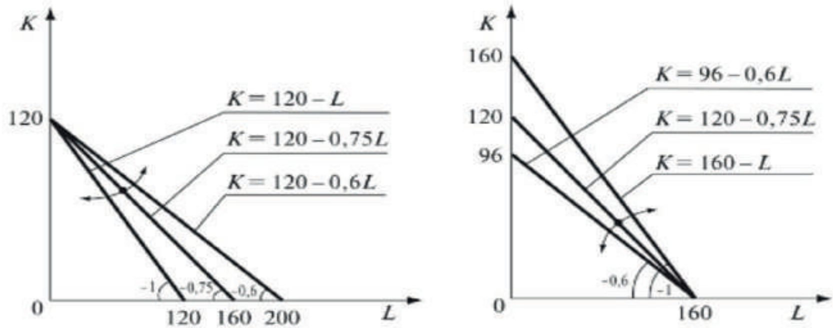


Рис. 38

Задание 2. Фирма максимизирует прибыль, ее производственная функция: $Q(K, L) = L^{0,25}K^{0,5}$. В течение дня производится 56 ед. продукции, которая реализуется на конкурентном рынке по цене 12 ден. ед./ед. Определите спрос фирмы на труд, если дневная ставка заработной платы равна 24 ден. ед/чел.

Задание 3. Конкурентная фирма производит единственный продукт, реализуемый на рынке по цене p_0. Цены капитала и труда соответственно r и w. Производственная функция фирмы имеет вид: $Q(L,K) = L^{2/3}K^{1/4}$. Определите эластичность функции спроса на капитал по ценам p_0, r и w.

Задание 4. Производственная функция фирмы имеет вид: $Q(L,K) = L^{1/2}K^{1/3}$. Цены капитала и труда соответственно $r = 2$ ден. ед. и $w = 1$ ден. ед.

1. Пусть цена продукция фирмы равна 6 ден. ед., и фирма максимизирует прибыль. Вычислите максимальную прибыль фирмы. Сколько труда и капитала будет использовать фирма?
2. Пусть фирма стремиться максимизировать выпуск, но может потратить не более 320 ден. ед. Сколько труда и сколько капитала она будет использовать для максимизации выпуска?
3. Пусть фирме необходимо выпустить $\bar{Q} = 27$ единиц продукции, и она стремиться сделать это с наименьшими затратами. Сколько труда и сколько капитала она будет использовать для этого? Чему будут равны общие издержки фирмы?

Задание 5. Производственная функция фирмы имеет вид: $Q(L,K) = L^{1/2}K^{1/3}$. Цены капитала и труда соответственно r и w.

1. Пусть цена продукции равна p и фирма максимизирует прибыль. Определите функции спроса фирмы на труд и капитал. Определите функцию предложения фирмы. Определите эластичность спроса фирмы на труд по заработной плате.
2. Пусть издержки фирмы заданы и равны $\bar{C}$, и фирма максимизирует выпуск при заданном уровне издержек. Определите функции условного спроса фирмы по Маршаллу на труд и капитал. Определите функцию условного предложения фирмы. Определите эластичность условного спроса фирмы по Маршаллу на труд по заработной плате.

3. Пусть выпуск фирмы равен $\bar{Q}$, и фирма минимизирует издержки при заданном уровне выпуска. Определите функции условного спроса фирмы по Хиксу на труд и капитал. Определите функцию условных издержек фирмы. Определите эластичность условного спроса фирмы по Хиксу на труд по заработной плате.

Основная литература

1. *Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Моргунов В. И.* Микроэкономика. СПб.: Экономическая школа, 1996. Т. 1, глава 9.
2. *Вэриан Х. Р.* Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. М.: ЮНИТИ, 1997, главы 18, 19.
3. *Никулина И. Н.* Микроэкономика. М.: ИНФРФ-М, 2021, глава 9.
4. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Учебное пособие / под общ. ред. В. А. Чахоян. М.: «ИНФРА-М», 2015, 2017, 2018, раздел 2.

ТЕМА 7

Теория экономических издержек производства

(лекции 11, 12)

Затраты факторов производства, осуществляемые для достижения определенного коммерческого результата, принято называть *издержками*. В экономической теории различают два вида издержек: *бухгалтерские* и *экономические*.

***Бухгалтерские издержки* (*$TC_Б$*)** стоимость израсходованных факторов производства в фактических ценах их приобретения. Это явные издержки, наблюдаемые бухгалтером.

Предположим, что издержки исчисляет **не бухгалтер**, фиксируя осуществленные расходы, а **предприниматель**. В этом случае необходимо принять иной подход к исчислению издержек — не бухгалтерский, а ***экономический,*** так как цель предпринимателя — определить **целесообразность дальнейшего** продолжения своей предпринимательской **деятельности**. Предпринимателю придется включить в издержки не только фактические затраты, но и те доходы, **которых он лишается,** выбрав данный вариант вложения собственных средств и использования своего рабочего времени. Это *неявные* издержки.

***Экономические издержки* —** это затраты, обеспечивающие доход, который можно получить при наиболее выгодном из альтернативных вариантов использования ресурсов. Это явные и неявные издержки предпринимателя.

Мы будем рассматривать, как правило, экономические издержки, так как наша цель — поиск наилучших вариантов решений, принимаемых предпринимателем (фирмой).

7.1. Основное предположение теории затрат

В основе экономической теории затрат лежит предположение о том, что существует взаимно однозначное соответствие между производственной функцией и функцией затрат. Это означает, что технология, описываемая конкретной производственной функцией, определяет вид зависимости суммарных издержек от объема выпуска для данного производства (вид функции общих издержек).

Обоснуем это предположение. Обратимся к двум типам задач производства, рассмотренным в параграфах 6.2 и 6.3.

Согласно решению задачи максимизации выпуска при ограничении на затраты

$$q = F(x_1, x_2) \to \max \tag{30}$$

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = C \tag{31}$$

функция предложения фирмы зависит от цен на факторы производства (w_1, w_2) и ограничения на затраты C: $q = F(w_1, w_2, C)$. А решение задачи минимизации затрат для достижения желаемого объема выпуска

$$C = w_{11} x_1 + w_2 x_2 \to \min \tag{32}$$

$$F(x_1, x_2) = q \tag{33}$$

позволяет получить зависимость затрат от цен факторов производства (w_1, w_2) и заданного объема выпуска q: $C = Z(w_1, w_2, q)$.

Если предположить цены на факторы производства постоянны, то получим, что

$$q = F(C),\text{ а } C = Z(q) \text{ или } q = Z^{-1}(C),\ C = F^{-1}(q).$$

7.2. Издержки (затраты) в краткосрочном промежутке

В краткосрочном промежутке выбор способов производства ограничен, так как из-за невозможности изменить количество хотя бы одного из факторов производства фирма не может реализовать самые выгодные способы производства. Иллюстрация ограниченности выбора фирмы в краткосрочном промежутке приведена на рисунке 39.

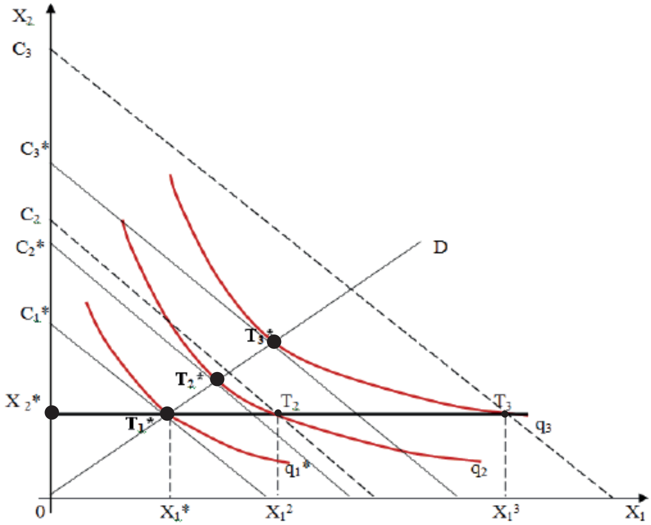


Рис. 39. Ограниченность выбора способов производства в краткосрочном промежутке

На рисунке 39 количества факторов производства обозначены через X_1 и X_2.

Количество второго фактора фиксировано и равняется X_2^*. И, если T_1^* (самый дешевый способ достижения объема выпуска q_1^*) является доступным для фирмы, то способы T_2^* и T_3^*, расположенные на линии развития фирмы (D) фирма не может использовать из-за недостаточного количества второго фактора производства. Фирма может выбрать только способы T_2 и T_3 для производства объемов q_2 и q_3, которые требуют больших денежных затрат, чем способы T_2^* и T_3^* $(C_2 > C_2^*, C_3 > C_3^*)$.

Из определения краткосрочного промежутка (см. 5.3) следует, что в этом промежутке существуют затраты, которые не зависят от объема выпуска. Они называются *постоянными* и обычно обозначаются *TFC* (*Total Fixed Cost*) или *FC*. Это та часть общих издержек фирмы *TC* (*Total*

Cost), которая не зависит от объема производимой продукции. Они существуют и при нулевом объёме выпуска.

Та часть общих издержек фирмы, величина которых находится в прямой зависимости от объема выпуска продукции называется *общие переменные издержки* и обозначается *TVC(q) (Total Variable Cost),* где *q* — объем производства.. Следовательно, в краткосрочном промежутке общие издержки — это сумма общих переменных и общих постоянных издержек: *TC(q) = TVC(q) + TFC* или *TC(q) = VC(q) + FC*.

Однако, при принятии решений фирма обращается к средним и предельным издержкам производства (средним и предельным величинам издержек). Если разделить обе части соотношения *TC(q) = VC(q) + FC* на объем производства *q*, то получим три вида средних издержек, которые оценивает фирма, принимая решения.

$$ATC(q) = AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{VC(q)}{q} + \frac{FC}{q} = AVC(q) + AFC(q),$$

где $AC(q)$ — средние общие издержки,
$AVC(q)$ — средние переменные издержки,
$AFC(q)$ — средние постоянные издержки.

Если оценить изменение общих издержек за счет изменения объема выпуска на одну единицу, то получим показатель, именуемый *предельные издержки (marginal cost)*.

$$MC(q) = \frac{\Delta TC(q)}{\Delta q} = \frac{\Delta VC}{\Delta q}.$$

Изменение общих издержек происходит в силу изменения переменных издержек, так как постоянные издержки не меняются в зависимости от объема выпуска. Поэтому говорят, что предельные издержки — это, по сути, переменные издержки. Если функция общих издержек непрерывная и дифференцируемая, то $MC(q) = \frac{d\,TC(q)}{dq} = \frac{d\,VC(q)}{dq}$.

Графики средних постоянных, средних переменных и средних общих приведены на рисунке 40. Кривая средних постоянных издержек

$AFC(q)=\dfrac{FC}{q}$ будет убывающей. Кривая средних переменных издержек будет возрастать до тех пор, пока имеются постоянные факторы, ограничивающие расширение производства. Кривая средних издержек поначалу должна убывать из-за убывания постоянных издержек, но затем ее наклон должен стать положительным вследствие возрастания средних переменных издержек.

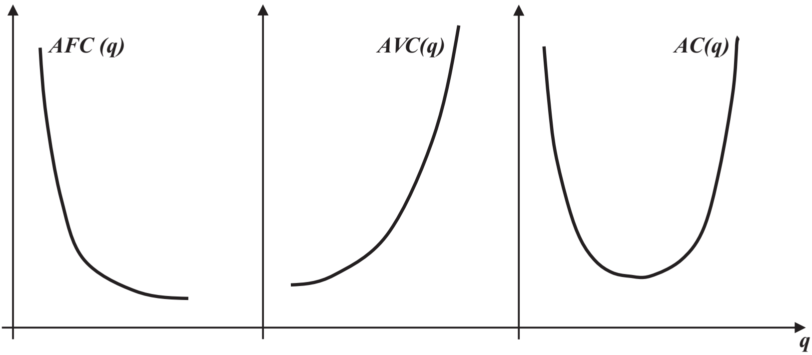


Рис. 40. Кривые средних постоянных (*AFC*), средних переменных (*AVC*) и средних общих издержек (*AC*)

Легко показать, что для первой единицы выпуска предельные и средние переменные издержки одинаковы и что линия предельных издержек проходит через точку минимума как *линии* ***средних переменных***, так и *линии* ***средних издержек.***

Покажем, что линия средних издержек пересекает линию предельных в точке своего минимума. Будем считать, что функция средних издержек непрерывная и дифференцируемая. По определению $AC(q)=\dfrac{TC(q)}{q}$. Продифференцируем $AC(q)$ и посмотрим, как ведет себя производная этой функции для различных значений q.

$$\frac{dAC(q)}{dq}=\frac{d\dfrac{TC(q)}{q}}{dq}=\frac{q(TC)_q{}'-TC(q)}{q^2}=\frac{1}{q}\left((TC)_q{}'-\frac{TC(q)}{q}\right)=$$

$$=\frac{1}{q}\big(MC(q)-AC(q)\big)$$

1° когда $MC(q)-AC(q)>0$, то есть $MC(q)>AC(q)$, $\frac{dAC(q)}{dq}>0$. Это означает, что *AC(q)* возрастают.

2° когда $MC(q)-AC(q)=0$, то $\frac{dAC(q)}{dq}=0$ — средние издержки достигают минимума.

3° когда $MC(q)-AC(q)<0$, то есть $MC(q)<AC(q)$, $\frac{dAC(q)}{dq}<0$.Это означает, что *AC(q)* убывают.

Для первой произведенной единицы средние переменные издержки равны $AVC(1)=\frac{VC(1)}{1}$, а предельные на первую дополнительную к нулю единицу $MC(1)=\frac{TC(1)-TC(0)}{1-0}=\frac{VC(1)+FC-VC(0)-FC}{1-0}=\frac{VC(1)}{1}=AVC(1)$.

Поэтому графики средних переменных издержек и предельных начинаются из одной точки.

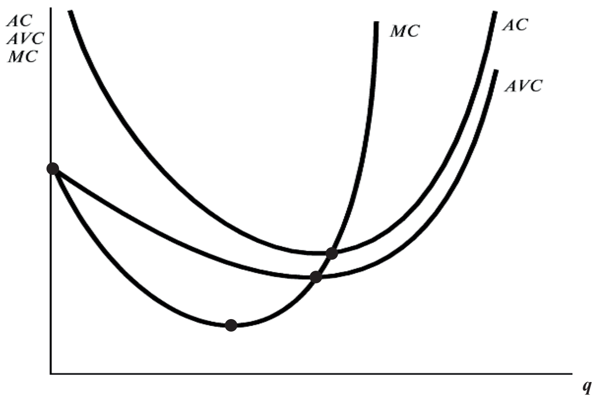


Рис. 41. Кривые средних переменных и средних общих издержек пересекают кривую предельных в точке своего минимума

7.3. Издержки (затраты) в долгосрочном промежутке

В долгосрочном промежутке все вводимые производственные факторы могут меняться и для каждого возможного объема производства можно найти такую комбинацию факторов, для которой затраты будут минимальными.

В долгосрочном промежутке, по определению, постоянных издержек не бывает, однако вполне могут существовать *квазипостоянные издержки*.

Квазипостоянные издержки — это издержки, которые, как и постоянные, не зависят от объема выпуска, но должны оплачиваться только при производстве фирмой положительного объема выпуска. Если началу производства какого-то объема выпуска должна предшествовать затрата некоторой фиксированной суммы денег, то можно говорить о наличии квазипостоянных издержек.

Обозначим через *LTAC* или *LAC* величину средних совокупных долгосрочных издержек. На рисунке 42 приведена кривая долгосрочных средних затрат и пять кривых краткосрочных средних затрат $SATC_i$ (i = 1,...,5).

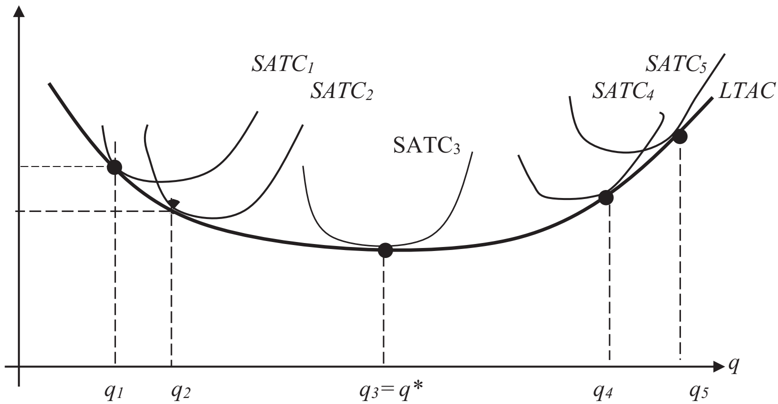


Рис. 42. Кривая долгосрочных средних издержек является «огибающей» кривых краткосрочных средних издержек

Кривая долгосрочных средних затрат *LTAC* является огибающей для кривых краткосрочных средних затрат. Каждая из кривых $SATC_k$ касается кривой *LTAC* в одной точке, так при количестве постоянного фактора, имеющегося у фирмы в данном краткосрочном промежутке, существует только один способ производства (минимизирующий затраты), совпадающий с выбором фирмы в долгосрочном промежутке.

Для объемов производства, меньших q_3, кривые $SATC_k$ (k = 1,2) касаются кривой *LTAC* слева от точки минимума $SATC_k$ (k = 1,2). Это означает, что в долгосрочном периоде экономически выгодно работать на уровне ниже экономически эффективного объема первого и второго краткосрочных периодов, слегка недогружая производственные мощности предприятия. Наоборот, для объемов производства, превышающих q_3, кривые $SATC_k$ $(k = 4{,}5)$ касаются кривой $LTAC$ справа от точки минимума $SATC_k$ $(k = 4{,}5)$. Значит при таких объемах производства экономически выгодно работать, слегка превышая экономически эффективные объемы производства четвертого и пятого краткосрочных периодов.

Объем производства $q_3 = q^*$– это экономически эффективный объем производства в долгосрочном периоде, так как при производстве q_3 единиц продукции достигается минимум долгосрочных средних затрат, то есть обеспечивается (наибольшая) эффективность затрат. Такой объем производства называется *минимальным эффективным масштабом производства — МЭМП* (или *MES – minitum efficient scale*).

Можно ввести определение *МЭМП* в терминах эффекта масштаба производства (как частного случая изменения общих затрат).

Объем производства, при котором заканчивается стадия положительного эффекта масштаба (экономия от масштаба) и начинается стадия постоянного эффекта, называется *минимальным эффективным масштабом производства*.

Экономия от масштаба часто измеряется в показателях эластичности издержек производства по объему выпуска $E_q(TC)$. Если представить коэффициент эластичности как отношение предельных издержек к средним: $E_q(TC) = MC(q)/AC(q)$, то можно получить следующие оценки эффекта от увеличения масштаба: при возрастающей отдаче от масштаба $E_q(TC) < 1$, так как при уменьшении средних издержек последние всегда превышают предельные. В точке экономической эффективности производства (*МЭМП*)

$E_q(TC) = 1$. При убывающей отдаче от увеличения масштаба производства $E_q(TC) > 1$, так как при возрастании средние издержки всегда меньше предельных издержек.

Для удобства иногда вместо эластичности издержек применяют показатель, называемый *индекс эффекта масштаба SCI (scale index):*

$$SCI = 1 - E_q(TC).$$

Тогда, если $E_q(TC) = 1$, то $SCI = 0$, в этом случае нет ни экономии, ни потерь от увеличения масштаба производства. Когда

$E_q(TC) < 1$, то $SCI > 0$, имеет место экономия от масштаба. И, наконец, когда $E_q(TC) > 1$, то $SCI < 0$, наблюдаются потери от увеличения масштаба производства.

Как соотносятся кривые долгосрочных предельных (LMC) и краткосрочных предельных (SMC_k) издержек? Отметим, что $STAC_k = LATC$ в точках, где $LTC = STC_i$, а кривые $STAC_k$ и $LATC$ имеют общую касательную в этих точках. Поэтому

$$\frac{dLATC(q)}{dq} = \frac{dSATC_k(q)}{dq} \text{ и } q\frac{dLATC(q)}{dq} = q\frac{dSATC_k(q)}{dq}$$

Тогда,

$$LMC(q) = \frac{dLTC(q)}{dq} = \frac{d(q \cdot LATC(q))}{dq} = LATC(q) + q\frac{dLATC(q)}{dq}$$

$$SMC_k(q) = \frac{dSTC_k(q)}{dq} = \frac{d(q \cdot SATC_k(q))}{dq} = SATC_k(q) + q\frac{dSATC_k}{dq}(q)$$

Следовательно, для объемов производства q, при которых линии $STAC_k$ и $LATC$ касаются друг друга, $LMC(q) = SMC_k(q)$.

На рисунке 43 изображены кривые долгосрочных и краткосрочных средних и предельных издержек для *U-образной кривой* долгосрочных средних затрат LAC ($LATC$).

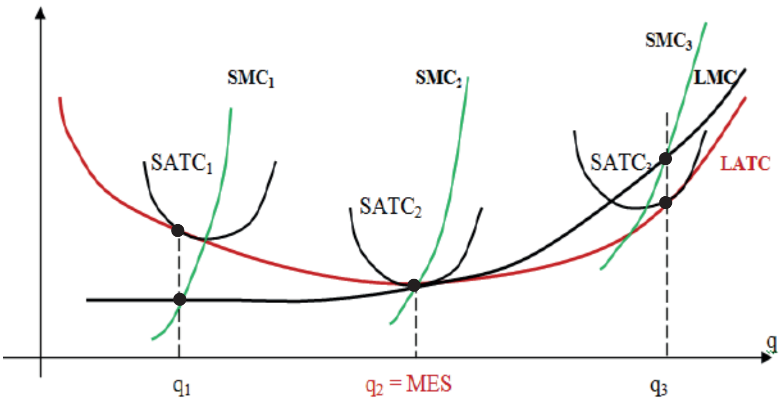


Рис. 43. Соотношение долгосрочных и краткосрочных средних и предельных издержек

Вопросы для повторения

1. Чем отличаются явные издержки о неявных? И какие издержки называются экономическими?
2. Чем отличаются средние издержки от предельных (приведите определения)? И когда они совпадают?
3. Как соотносятся средние и предельные издержки? Докажите приведенное вами соотношение.
4. В чем отличие между линией развития фирмы в долгосрочном и краткосрочном промежутке? (изобразите в пространстве двух факторов производства).
5. Чем отличается для фирмы краткосрочный промежуток от долгосрочного?
6. Чем отличается функция краткосрочных издержек от функции долгосрочных?
7. Имеются ли общие точки у кривых краткосрочных и долгосрочных издержек? Если да, то сколько таких точек?
8. Можно ли по соотношению средних и предельных издержек в точке (при определенном объеме производства) определить вид отдачи от масштаба?
9. Как соотносятся долгосрочные предельные и краткосрочные предельные издержки в точке касания долгосрочных и краткосрочных средних издержек?
10. Что такое *минимальный эффективный масштаб* производства?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Технология производства фирмы описывается производственной функцией $q = 5L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$. Цена единицы капитала равна 100, цена единицы труда равна 25.

1) Сформулируйте соответствующую оптимизационную задачу и выведите функцию долгосрочных общих издержек фирмы $LTC(q)$. Выпишите уравнения $LTC(q)$ и долгосрочных средних издержек

$LAC(q)$ и долгосрочных предельных издержек $LMC(q)$ при заданных ценах факторов производства.

2) Пусть в краткосрочном периоде запас капитала фирмы постоянен и равен **4.** Выведите функцию краткосрочных общих издержек фирмы $STC(q)$. Выпишите уравнения краткосрочных средних издержек $SAC(q)$ и краткосрочных предельных издержек $SMC(q)$.
3) Постройте (с подробным обоснованием!) на одном рисунке графики функций $LAC(q)$, $SAC(q)$, $LMC(q)$ и $SMC(q)$. Укажите координаты всех ключевых точек.

Задание 2. Производственная функция фирмы, максимизирующей прибыль, описывается формулой: $q(L,K) = min\ \{4L,3K\}$, где L – затраты труда, K – затраты капитала, $\boldsymbol{q}$ — объем производимой продукции. Обозначим цену капитала через $\boldsymbol{r}$, цену труда через $\boldsymbol{w}$.

1) Выведите функцию краткосрочных издержек фирмы при затратах капитала $\bar{K}$ равных 27 ед.
2) Выпишите функции средних и предельных краткосрочных издержек для $w = 1$, $r = 4$. Постройте графики этих функций.
3) Выведите функцию условного предложения $q_S(w,r,C)$ и оцените эластичность предложения по цене капитала.

Задание 3. Производственная функция фирмы, максимизирующей прибыль, описывается формулой: $q(L,K) = (L^{1/2} + K^{1/2})^2$, где L — затраты труда, K — затраты капитала, q — объем производимой продукции. Обозначим цену капитала через r, цену труда через w.

1) Выведите функцию краткосрочных издержек фирмы при затратах капитала $\bar{K}$ равных 4 ед.
2) Выпишите функции средних и предельных краткосрочных издержек для $w = 1$, $r = 4$, постройте их графики.

Задание 4. Производственная функция фирмы, максимизирующей прибыль, описывается формулой: $q(L,K) = L^{3/4} K^{1/2}$, где L — затраты труда, K — затраты капитала, q — объем производимой продукции. Обозначим цену капитала через r, цену труда через w.

1) Выведите функцию краткосрочных издержек фирмы при затратах капитала $\bar{K}$ равных 12 ед.
2) Выпишите функции средних и предельных краткосрочных издержек для $w = 1$, $r = 4$, постройте их графики.

Задание 5. Производственная функция фирмы, максимизирующей прибыль, описывается формулой: $q(K, L) = (L - 3)^{1/3}K^{2/3}$, где L — затраты труда, K — затраты капитала, q — объем производимой продукции. Обозначим цену капитала через r, цену труда через w.

1) Выведите функцию долгосрочных издержек фирмы.
2) Выведите функцию краткосрочных издержек фирмы при затратах капитала равных 27 ед.
3) Выпишите функции средних и предельных долгосрочных издержек для $w = 1$, $r = 2$.
4) Выпишите функции средних и предельных краткосрочных издержек для $w = 1$, $r = 2$.
5) Постройте графики средних и предельных долгосрочных издержек, средних и предельных краткосрочных издержек (изобразите названные графики на одном рисунке).
6) Каким видом отдачи от масштаба характеризуется производство фирмы? Чему равна эластичность общих долгосрочных издержек по объему производства?
7) Рассчитайте индекс масштаба производства.
8) Оцените эластичность производства (как сумму эластичностей выпуска по труду и капиталу).

ТЕМА 8
Предложение совершенно конкурентной фирмы в краткосрочном промежутке и излишек производителя (лекция 13)

После анализа издержек фирмы можно ответить на вопросы о том, сколько продукции производить и когда следует прекратить производство в краткосрочном промежутке фирме, работающей на рынке совершенной конкуренции. Сформулируем особенности этого рынка:

1) количество фирм на рынке (*малость* агентов и их *множественность),*
2) характер производимой продукции (*однородность),*
3) условия входа на рынок и выхода с рынка (*нет барьеров* входа-выхода),
4) степень доступности экономической информации (*совершенная информированность*),
5) контроль над ценами (нет контроля — *закон единой цены).*

8.1. Определение оптимального объема производства. Функция краткосрочного предложения фирмы

Будем считать, что целью фирмы является максимизация прибыли. Сформулируем задачу максимизации прибыли совершенно конкурентной фирмой. Для этого сначала отметим каким образом особенности рынка отражаются на показателях, характеризующих результаты ее деятельности.

Первое, что следует отметить, что в силу особенностей рынка 1) и 5) фирма является *ценополучателем*. Это означает, что цена на продукцию фирмы складывается на рынке как результат взаимодействия множества продавцов и покупателей. Отдельная фирма не способна повлиять на цену и воспринимает ее, как заданную извне. Эта ситуация отображена графически на рисунке 44. Равновесная цена p^* представляет линию спроса на продукцию любой фирмы, работающей на этом рынке.

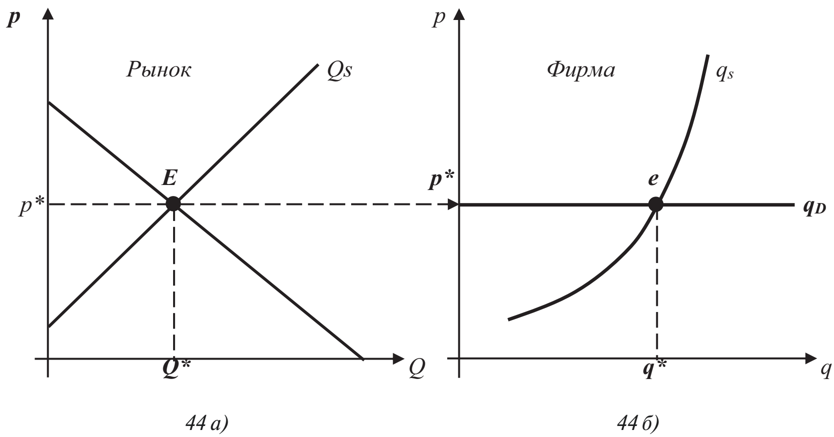


Рис. 44. Равновесие на рынке 44 а) и для отдельной фирмы 44 б)

Так как для фирмы цена задается рынком, выручка фирмы является линейной функцией от объема производства: $TR = \boldsymbol{p}q$ ($p = p^*$- *const*). Легко убедиться, что $\boldsymbol{AR = MR = p}$, а на графике рисунка 44 *б)* видно, что $q_D = AR = MR = p^*$. На рисунке 45 изображена линейная функция общей выручки фирмы, наклон которой равен $tg\alpha = p$.

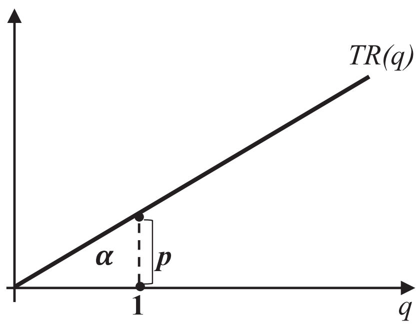


Рис. 45. Функция выручки совершенно конкурентной фирмы: $tg\alpha = p$.

Если линия спроса одинакова для любой фирмы, работающей на рынке, то функция предложения фирмы $q_S(p)$ зависит от индивидуальных особенностей производства данной фирмы, которые отражаются прежде всего в том, каким образом связаны объем выпуска и затраты на его производство.

Формализуем задачу максимизации прибыли фирмой. Обозначим общую (суммарную) прибыль фирмы при объеме выпуска q через $PR(q)$. Тогда задача максимизации прибыли фирмой может быть представлена как $PR(q) = TR(q) - TC(q) \to max,$ а объем производства q^*, при котором прибыль принимает максимальное значение, может быть найден из условия первого порядка (необходимое условие экстремума функции одной переменной): $PR' = 0$ или предельная прибыль равна нулю.

$$PR'(q) = TR'(q^*) - TC'(q^*) = 0 \text{ или } MR(q^*) - MC(q^*) = 0$$
$$\text{или } MR(q^*) = MC(q^*).$$

А так как для совершенно конкурентной фирмы $MR = p$, то **условие оптимальности** принимает вид: $p = MC(q^*)$.

Условие второго порядка (достаточное) вносит уточнение: фирма выбирает объем производства, соответствующий восходящему участку линии предельных издержек.

Действительно,

$$\frac{d^2\left(PR(q)\right)}{dq^2} = \frac{d^2\left(TR(q)\right)}{dq^2} - \frac{d^2\left(TC(q)\right)}{dq^2} < 0, \frac{d^2\left(TR(q)\right)}{dq^2} < \frac{d^2\left(TC(q)\right)}{dq^2}$$

$$\text{или } \frac{d^2\left(TC(q)\right)}{dq^2} > 0, \text{ так как } \frac{d^2\left(TR(q)\right)}{dq^2} = 0.$$

Условие оптимальности $p = MC(q^*)$ можно привести к другому виду, а именно $\pi(q^*) = MC(q^*) - AC(q^*)$, где $\pi(q^*)$ — это средняя прибыль фирмы при оптимальном объеме выпуска. Средняя прибыль фирмы при любом объеме выпуска q равняется

$$\pi(q) = \frac{PR(q)}{q} = \frac{TR(q) - TC(q)}{q} = p - AC(q).$$

Но согласно условию оптимальности $p = MC(q^*)$. Следовательно, $\pi(q^*) = MC(q^*) - AC(q^*)$.

Условие оптимальности позволяет определить наилучший для фирмы объем выпуска при сложившихся экономических условиях. Это не означает, что он обязательно обеспечит фирме положительную прибыль.

Рассмотрим, какие решения будет принимать фирма, руководствуясь выведенным нами правилом определения оптимального объема производства.

1^0. Если фирма производит объем продукции $q < q^*$, при котором $p > MC(q)$, то увеличение объема выпуска до q^*, при котором $p = MC(q^*)$ позволит увеличить прибыль фирмы на величину $\Delta PR = p\left(q^* - q\right) - VC(\left(q^* - q\right) > 0$. В этом случае фирма должна наращивать объем производства.

2^0. Если фирма производит объем продукции $q > q^*$, при котором $p < MC(q)$, то уменьшение объема выпуска до q^*, при котором $p = MC(q^*)$ позволит увеличить прибыль фирмы на $\Delta PR = p\left(q - q^*\right) - VC\left(q - q^*\right) > 0$. Поэтому фирма примет решение о сокращении производства.

3^0. И, наконец, если фирма производит объем продукции q^*, для которого выполняется условие оптимальности $p = MC(q^*)$, то возможны 4 варианта соотношения выручки и затрат, которые определяют решений фирмы о дальнейшей деятельности на рынке.

- Цена превышает средние общие издержки, т.е. $p > AC(q^*)$. Это означает, что суммарная выручка превышает общие затраты фирмы, она получает положительную прибыль и целесообразно продолжать производство без изменений.
- Цена равняется средним общим издержкам, т.е. $p = AC(q^*)$. Это означает, что суммарная выручка совпадает с общими затратами, фирма получает нулевую экономическую прибыль и целесообразно продолжать производство.
- Цена ниже средних издержек, но не меньше средних переменных издержек, т.е. $AVC(q^*) \leqslant p < AC(q^*)$. В этом случае фирма несет убытки, но может покрыть переменные издержки и продолжить производство, принимая меры по преодолению убыточной деятельности.

- Если $AVC(q^*) > p$, то в этом случае фирма не может покрыть переменные издержки и должна прекратить производственную деятельность (уйти с рынка). Какой бы объем продукции фирма ни выпускала, ее ***убытки*** превзойдут **потери**, связанные с прекращением выпуска. Поэтому, если $p = min\ AVC(q^*)$, то такая цена определяет точку закрытия фирмы.

Из проведенного анализа границ целесообразности производства следует, что ***линия предложения*** совершенно конкурентной фирмы в коротком промежутке представляет собой ту часть возрастающей ветви линии предельных затрат, которая лежит выше минимума средних переменных затрат. При уровне цены ниже, чем $min\ AVC$, линия предложения совпадает с осью цен.

$$q(p) = \begin{cases} MC^{-1}(p), & p \geq \min AVC \\ 0, \quad p < \min AVC \end{cases}$$

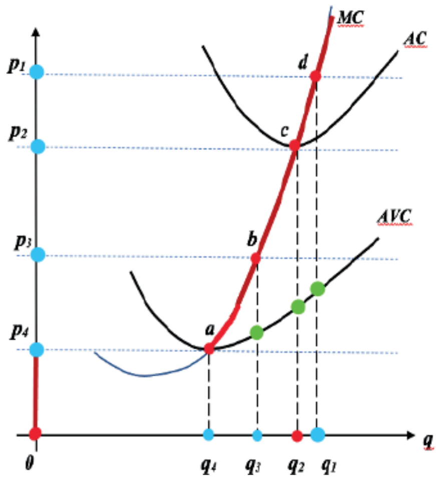


Рис. 46. Линия краткосрочного предложения совершенно конкурентной фирмы

Графическое представление функции предложения приведено на рисунке 46. Точка *d* линии предложения соответствует случаю, когда $p = p_1 > AC(q_1)$. Точка *c* линии предложения соответствует случаю, когда $p = p_2 = AC(q_2)$. Точка *b* соответствует случаю, когда $p = p_3$: $AC(q_3) > p_3 > AVC(q_3)$.

И, наконец, точка *a* линии предложения соответствует цене $p = p_4 = min\ AVC(q_4)$.

8.2. Излишек производителя

В параграфе 2.6 была введена мера оценки благосостояния всех производителей, работающих на рынке некоторого продукта, и мы назвали ее *излишек производителей* и обозначили его латинскими буквами *PS* (*producers' surplus)*. Согласно введенному определению, *излишек производителей* оценивает выгоду, которую получают продавцы от участия в работе рынка.

После проведенного анализа принятия решений отдельной фирмой в краткосрочном промежутке можно ввести аналогичную меру для отдельного производителя (фирмы).

Выигрыш (излишек) производителя — мера выгоды фирмы от достижения объема производства, обеспечивающего максимальную прибыль.

Если в краткосрочном промежутке фирма ничего не производит — ее убытки равны постоянным издержкам, *FC*. Если $p > AVC$, то лучше производить ($q > 0$).

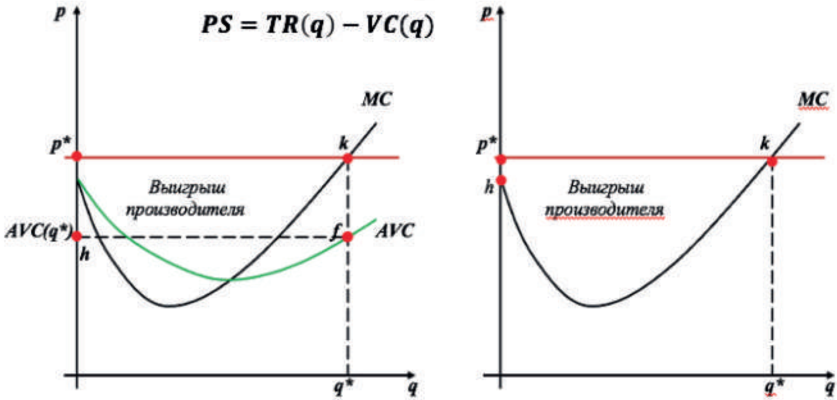
Насколько лучше? Попробуем оценить.

Для оценки выигрыша фирмы нужно сравнить предполагаемую прибыль от производства оптимального объема и решения производить нулевой объем.

Если $q = 0$, то $PR(0) = -FC$, т.е. фирма несет убытки в размере постоянных затрат. Если $q > 0$, то фирма может получить прибыль $PR(q) = TR(q) - VC(q) - FC$.

Изменение прибыли при переходе от $q = 0$ к $q>0$ можно оценить как разницу между суммарной выручкой и общими переменными издержками: $\Delta PR = TR(q) - VC(q) - FC - (-FC) = TR(q) - VC(q)$. Выгодно прекратить деятельность, если $-FC > TR(q) - VC(q) - FC$.

На рисунке 47 приведены две графические интерпретации равноценных способов оценки излишка производителя (фирмы).



а) б)

Рис. 47. Равноценные способы оценки излишка производителя (*PS*):
47а) $PS = S_{hp^*kf}$, 47б) $PS = S_{hp^*k} = \int_0^{q^*} \left(p - MC(q)\right) dq$

Вопросы для повторения

1. Что означает, что «фирма, работающая на рынке совершенной конкуренции, является «ценополучателем»?
2. Почему независимо от вида функции рыночного спроса, функция выручки для любой совершенно конкурентной фирмы является линейной?
3. Приведите два Правила, по которым совершенно конкурентная фирма, максимизирующая прибыль, определяет сколько продукции ей производить.
4. При каких значениях издержек (и каких) фирме лучше уйти с рынка, т.е. прекратить производство?
5. Как связана функция предложения фирмы с функцией ее предельных издержек?
6. Что означает «излишек производителя» с содержательной точки зрения и как можно его измерить?
7. Приведите содержательную интерпретацию двух способов оценки излишка производителя, представленных на графике 47.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Фирма, действующая на рынке совершенной конкуренции, выпускает товар У. Общие издержки фирмы описываются уравнением $TC(q) = q^3 - 8q^2 + 30q + 50$, где q — выпуск фирмы.

1) Определите оптимальный выпуск фирмы и прибыль, если рыночная цена равна 94.
2) Как изменится ваш ответ, если цена упадет до 65 рублей?
3) Приведите графическую развернутую графическую интерпретацию решений пунктов 1) и 2) (изобразите графики предельных, средних переменных и общих средних издержек, указав точки их минимума, проведите линии спроса на продукцию фирмы и отметьте оптимальные объемы выпуска).
4) Выведите функцию краткосрочного предложения фирмы и отразите ее на графике из пункта 3).
5) Оцените излишек производителя двумя способами.

Задание 2. В краткосрочном промежутке функция общих издержек фирмы имеет вид:

$$STC(q) = 2q^2 + 4q + 8.$$

1) Определите прибыль фирмы при рыночной цене равной 20.
2) При какой цене фирма будет получать нулевую прибыль?
3) Определите излишек производителя двумя способами при рыночной цене равной 20.

Задание 3. В краткосрочном промежутке функция общих издержек фирмы имеет вид:

$$STC(q) = q^2 + 2q + 4.$$

1) Определите с какого уровня цены фирма начнет производить свою продукцию.
2) Приведите графическую иллюстрацию пункта 1).
3) Допустим рыночная цена равна 8. Найдите прибыль фирмы и оцените (двумя способами) излишек производителя.

Электронное издание сетевого распространения.
7,0 печ. л. Опубликовано 30.04.2026.
Издательство «ЭФ МГУ имени М.В. Ломоносова»;
www.econ.msu.ru; +7 (495) 939-17-15

Чахоян В. А., Киреев А. В.

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МИКРОЭКОНОМИКЕ

ЧАСТЬ 1

Основы спроса и предложения

ISBN 978-5-907909-10-6

9 785907 909106 >