

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА**

---

**ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**«УТВЕРЖДАЮ»**

Декан экономического факультета

\_\_\_\_\_/ проф. А.А. Аузан/

(подпись)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
«Дополнительные главы математики – 2»**

**Москва, 2021**

## **1. Наименование дисциплины: «Дополнительные главы математики – 2»**

Авторы программы:

1. Кострикин Игорь Алексеевич, 8(495)939-38-02, e-mail: iakostrikin@mail.ru
2. Кочергин Андрей Васильевич, 8(495)939-29-20, e-mail: a.kochergin@gmail.com
3. Клачкова Ольга Александровна 8(495)939-38-02, e-mail: sparrow889@gmail.com

Уровень высшего образования: бакалавриат

Направление подготовки: Экономика

Язык преподавания дисциплины: русский

## **2. Статус и место дисциплины в структуре основной образовательной программы подготовки бакалавра (данные берутся из учебного плана)**

Статус дисциплины: *факультатив*

Семестр: 2

## **3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ ПО ВИДАМ РАБОТ**

Объем дисциплины составляет **4** зачетных единиц, всего \_\_\_\_ академических часов, из которых \_\_\_\_ часов составляет контактная работа студента с преподавателем (часов - занятия лекционного типа (включая контрольные работы), 32 часа - занятия семинарского типа, 2 - консультации, \_ - промежуточная аттестация), \_\_\_\_ часов составляет самостоятельная работа студента.

## Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП) подготовки бакалавра

Основные цели курса: «Дополнительные главы математики – 2»

- Помочь наиболее заинтересованной части студентов в понимании теоретического материала, привить вкус к изучению теории вообще и экономико-математической, в частности.
- Способствовать формированию целостного восприятия наиболее существенных разделов основных курсов за счёт углублённого изучения теории.
- Познакомить студентов с некоторыми математическими понятиями, не вошедшими в программы основных курсов, но являющимися важной составной частью научной культуры человека, использующего методы экономико-математического моделирования.
- Развить логическое мышление, умение доказывать и опровергать утверждения.
- Помочь студентам с выбором дальнейшей траектории образования, а именно выбором уровня математической и экономико-математической подготовки.

ОРИЕНТИРОВОЧНО:

	Название темы	Лекции	Семинары	Консульта- ция перед зачётом	Зачёт	Самосто- ятельная работа	Всего
1	Тема 1. Интегрируемость	4	4				
2	Тема 2. Метрические пространства (основные понятия). Равномерная сходимость	6	6				
3	Тема 3. Числовые и степенные ряды	6	6				
4	Тема 4. Дифференцируемые функции и отображения в $n$ -мерном пространстве	4	4				
5	Тема 5. Специальные виды линейных операторов	4	4				
6	Тема 6. Теорема о неявной функции и условный экстремум с несколькими ограничениями	8	6				
7	Контрольные работы 1, 2, 3 - в недели, свободные от к.р. по основным курсам	6					
8	ЗАЧЁТ				2		
9	Консультация перед зачётом			2			
	<b>ИТОГО</b>	<b>38</b>	<b>32</b>	<b>2</b>			

#### 4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ И ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ

##### Тема 1. Интегрируемость

Понятие определенного интеграла Римана. Понятие верхней и нижней сумм Дарбу. Свойства сумм Дарбу. Обоснование критерия интегрируемости. Примеры его применения. Понятие равномерно непрерывной функции. Доказательство теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции. Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость ограниченной функции, имеющей конечное число точек разрыва. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Понятие о мере Лебега и интеграле Лебега.

##### Основная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1, Глава 10, §§ 1-7.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу. Глава VII, §§ 1-4, 8-10, Глава XII, §§ 1, 2.
3. Кочергин А.В., Кострикин И.А. Методические материалы по курсу математического анализа (Интеграл и функции нескольких переменных). Стр. 13-26.

##### Дополнительная литература:

4. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1, Глава VI, §§ 1-3.

##### Тема 2. Метрические пространства (основные понятия). Равномерная сходимость

Метрика и расстояние, метрическое пространство. Нормированные пространства. Понятие шара и  $\varepsilon$ -окрестности. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве. Критерий Коши. Понятие полного метрического пространства. Примеры метрических пространств. Внутренняя, предельная и граничная точки множества в метрическом пространстве. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Полнота замкнутого множества полного метрического пространства. Теорема о дополнении в метрическом пространстве. Отображения метрических пространств. Непрерывные отображения.

Понятие функциональной последовательности. Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности. Критерий  $\lim-sup$  равномерной сходимости функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Теорема о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся последовательности. Формулировки теорем о почленном интегрировании и почленном дифференцировании равномерно сходящейся последовательности. Полнота пространства  $C[a, b]$ . Формулировка теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.

##### Основная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 2. Глава 1, §§ 1,2,5.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу. Глава XVI, §§ 1 – 6.

##### Дополнительная литература:

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Глава II, §§ 1 – 4.

### **Тема 3. Числовые и степенные ряды**

Понятие числового ряда, его общего члена и частной суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши для рядов. Расходимость гармонического ряда. Интегральный признак Коши сходимости и расходимости. “Эталонные” ряды. Признаки сходимости для знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признаки Даламбера, Коши. Понятие абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов. Сходимость абсолютно сходящегося ряда. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Теорема Римана об условно сходящихся рядах. Формулировка теоремы Коши об абсолютно сходящихся рядах. Формулировка признака Дирихле-Абеля.

Функциональные ряды; равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Понятие степенного ряда. Первая теорема Абеля. Понятие радиуса и промежутка сходимости степенного ряда. Формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов. Формулировка второй теоремы Абеля. Примеры применения. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Ряды Тейлора и Маклорена. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Суммирование степенных рядов.

#### **Основная литература:**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. Глава 13, §§ 1–5.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу. Глава XV, §§ 1 – 7.

### **Тема 4. Дифференцируемые функции и отображения в $n$ -мерном пространстве**

Отображение, дифференциал отображения. Свойства дифференциала. Дифференциал сложного отображения. Матричная и матрично-скалярная форма записи. Геометрическая интерпретация дифференциала отображения. Матричное дифференцирование. Формула Тейлора.

#### **Основная литература:**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. Глава 14, §§ 4, 5.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу. Глава XIV, §§ 2, 6, 7.

#### **Дополнительная литература:**

3. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. Глава VIII, §§ 2 – 4.

### **Тема 5. Специальные виды линейных операторов. Экономические приложения**

Исследование собственных значений самосопряжённого линейного оператора методами математического анализа. Понятие неотрицательного оператора. Извлечение корня произвольной степени из неотрицательного оператора. Полярное разложение линейного оператора. Теорема Фробениуса-Перрона. Модель безработицы.

#### **Основная литература:**

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Изд-во МЦНМО, 2013. Гл. 6, § 3.

2. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. СПб.: Лань, 2011. Гл. 8, § 8.8 – 8.11, 8.19.

## **Тема 6. Теорема о неявной функции и условный экстремум с несколькими ограничениями**

Понятие векторной функции, заданной неявно. Формулировка теоремы о неявной функции для системы уравнений в скалярной и матричной формах. Пересечение поверхностей уровня функций. Достаточное условие локальной разрешимости системы уравнений. Вычисление дифференциала векторной функции, заданной неявно. Теорема об обратном отображении. Постановка задачи условной оптимизации с несколькими ограничениями. Необходимое условие условного экстремума: геометрическая идея, доказательство с помощью теоремы о неявной функции. Достаточные условия условного экстремума. Нахождение глобального максимума и минимума функции. Теорема о маргинальных значениях, ее интерпретация. Теорема об огибающей, случаи безусловного и условного экстремума. Экономические приложения.

### **Основная литература:**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. Глава 15, §§ 1 – 5.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу. Глава XIV, §§ 9, 10, 11, 12.

## **3. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Основная литература:**

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое. – М.: Высшая Школа, 2000.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1,2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
3. Кочергин А.В, Кострикин И.А. Методические материалы по курсу математического анализа (Интеграл и функции нескольких переменных). – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009.
4. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. СПб.: Лань, 2011.
5. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Изд-во МЦНМО, 2013.

### **Дополнительная литература:**

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. – М.: Издательство МЦНМО, 2012.

**Базы данных и Интернет-ресурсы** Материалы для самостоятельной работы, регулярно вывешиваемые на интернет – сайте экономического факультета [op.econ.msu.ru](http://op.econ.msu.ru)

### **1. БАЛЛЬНАЯ СИСТЕМА ОЦЕНКИ**

Максимальные значения баллов, которые студент может получить за выполнение формы проверки знаний (текущая и промежуточная аттестация):

Формы текущей и промежуточной аттестации (оценочные средства)	Технические баллы
--	-------------------

Контрольная 1	30
Контрольная 2	30
Контрольная 3	30
Зачёт	60
ИТОГО	150

Оценка «зачёт» ставится за 60 технических баллов

## 2. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для организации занятий по дисциплине необходимы следующие технические средства обучения:

- лекции – аудитория с меловой доской, качественным микрофоном
- семинары – доска с маркерами
- доступ на op.econ для размещения материалов дисциплины

Автор(ы) программы: \_\_\_\_\_

(подпись, расшифровка подписи)

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (типичные примеры материалов для проведения контрольных мероприятий, контактной и самостоятельной работы)

1. Докажите интегрируемость функции  $f(x) = [x]$  на отрезке  $[0; 2,5]$ .
2. Докажите интегрируемость функции Римана на отрезке  $[0; 1]$ .
3. Исследуйте на равномерную сходимость последовательность функций  $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$  на отрезке  $[0; 1]$ .
4. Исследуйте на равномерную сходимость последовательность функций  $f_n(x) = nxe^{-nx}$  на отрезке  $[0; 1]$ .
5. Приведите пример последовательности функций, дифференцируемых на отрезке, равномерно сходящейся к недифференцируемой на этом отрезке функции.
6. Задаёт ли функция  $\rho(x, y) = \left| \ln \frac{x}{y} \right|$  метрику на промежутке  $(0; +\infty)$ ?
7. Исследуйте на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ .

8. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ .

Что можно сказать об области равномерной сходимости этого ряда?

9. Дана матрица линейного оператора в стандартном базисе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите жорданову форму этой матрицы и жорданов базис. Укажите в исходном базисе все инвариантные подпространства данного линейного оператора.

10. Найдите экстремумы функции  $y = y(x, z)$ , заданной неявно уравнением

$$x^3 - xy - y^2 - 2xz - z^2 = 0.$$

11. Найдите условные экстремумы функции  $f(x, y, z, t) = x + y + z - t$

$$\text{при условиях } \begin{cases} xy + zt = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 20 \end{cases}.$$

12. Используя теорему об огибающей, выведите тождества Роя.