

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Предел и производная

А. В. Кочергин,
И. А. Кострикин



Экономический
факультет
МГУ
имени
М.В. Ломоносова

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова
Экономический факультет
Кафедра ММАЭ



А. В. Кочергин, И. А. Кострикин

Предел и производная

Учебное пособие
по курсу математического анализа

Москва
2025

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
К75

Кочергин А. В., Кострикин И. А.

К75 Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. — 144 с. — URL: <https://www.econ.msu.ru/elibrary/is/bef/#top>

ISBN 978-5-907690-81-3

В помощь студентам, изучающим математический анализ. Пособие также призвано помочь преподавателям в подборе материала к занятиям и соблюдении единого подхода к обсуждению материала курса. Оно подготовлено на основе методических материалов для студентов, а также вариантов письменных работ, разработанных авторами. Содержит большой набор контрольных вопросов, теоретических и практических задач, решение которых способствует более глубокому осознанию предмета.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-907690-81-3

© МГУ имени М.В. Ломоносова,
Экономический факультет, 2025

Оглавление

Предисловие	4
Программа 1 семестра	5
Раздел «Пределы и непрерывность»	12
Примерные вопросы для микроконтрольной по разделу «Пределы и непрерывность».....	12
Формулировки основных определений и теорем	18
Вычисление пределов	46
Дополнительные задачи для подготовки к контрольной № 1	62
Теоретические вопросы и задачи по разделу «Пределы и непрерывность».....	64
Примерные экзаменационные вопросы по разделу «Пределы и непрерывность».....	76
Раздел «Производные и их применение»	81
Примерные вопросы для микроконтрольной по разделу «Производные и их применение»	81
Задачи по разделу «Производные и их применение»	86
Теоретические вопросы и задачи по разделу «Производные и их применение»	101
Экзаменационные вопросы по разделу «Производные и их применение»	114
Примерная структура и ориентировочные образцы контрольных и экзаменационных работ	117
Структура письменных работ	117
Ориентировочные образцы вариантов.....	121
Ответы	136

Предисловие

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, изучающих начала математического анализа, а точнее, пределы, производные и их применение. Пособие также призвано помочь преподавателям в подборе материала к занятиям и соблюдении единого подхода к обсуждению материала курса. Оно возникло в результате обобщения методических материалов, а также домашних, контрольных и экзаменационных работ, которые готовились для студентов-первокурсников специальности «Экономика» на экономическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова. Настоящее издание ни в коей мере не призвано заменить учебники и задачники, но должно стимулировать студентов к изучению литературы и активной работе с материалом с обязательным последующим обсуждением на семинарах и консультациях.

Пособие ориентировано в основном на программу первого семестра. В соответствии с последним вариантом учебного плана в него включён набор задач на неопределённые интегралы.

Большое внимание уделяется изучению теоретического материала, поскольку хорошее знание теории позволяет глубже понимать основы применяемых методов, ориентироваться в их выборе для решения стандартных и нестандартных задач. Более того, у студента в результате изучения математики должно сформироваться умение рассуждать, строить обоснования, отличать необходимое условие от достаточного, точно формулировать свои аргументы. Выработка этих навыков, помимо владения вычислительными методами, является, на наш взгляд, одной из основных целей изучения математических дисциплин.

Пособие содержит списки экзаменационных вопросов, большой набор контрольных вопросов, теоретических и практических задач, решение которых поможет глубже осознать те или иные стороны изучаемых объектов.

В последнем разделе описана структура контрольных и экзаменационных работ и приведены **ориентировочные** образцы вариантов. Вообще говоря, порядок изучения материалов курса может меняться, что естественно отразится и на содержании семинаров, контрольных и экзаменационных работ.

При подготовке пособия использовался целый ряд оригинальных авторских разработок.

Программа 1 семестра

Тема 1. Множества и отображения (основные понятия)

Понятие множества, элемента множества. Операции над множествами. Числовые множества. Понятие окрестности точки, ε -окрестности, проколлотой окрестности, окрестности бесконечности, односторонней окрестности. Пересечение двух окрестностей. Функциональная зависимость, взаимно однозначное отображение, сложная функция, обратная функция. Графики основных элементарных функций.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 2000. Глава I, § 1.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 1, §§ 1, 2.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 24, 87.

Тема 2. Предел числовой последовательности (элементарная теория)

Понятие последовательности, предела последовательности. Единственность предела последовательности. Примеры сходящихся и расходящихся последовательностей. Понятие бесконечно малой последовательности. Связь понятий предела и бесконечно малой. Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми последовательностями. Теорема о сравнении бесконечно малых последовательностей. Теорема о сумме бесконечно малых последовательностей. Понятие ограниченной последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Теорема о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную, следствия из нее. Лемма об устойчивости знака последовательности (слабый и сильный варианты). Пределы последовательно-

стей $\{\sqrt[n]{n}\}$, $\{n^k q^n\}$, $\{a^n/n!\}$. Шкала последовательностей. Теоремы о пределе суммы, произведения, отношения двух последовательностей. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах. Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности. Примеры применения. Понятие о числе e .

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 1999. Глава II, §§ 1-4.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 3, §§ 1,2.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 18, 46, 69.

Тема 3. Предел функции

Понятие предела функции. Различные варианты пределов. Единственность предела. Бесконечно большие функции. Бесконечно малые функции. Связь понятий предела и бесконечно малой. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями. Теорема сравнения бесконечно малых функций. Теорема о сумме бесконечно малых функций. Ограниченные функции, локально ограниченные функции. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Теорема о произведении бесконечно малой функции на локально ограниченную. Следствия из нее. Лемма об устойчивости знака функции (слабый и сильный варианты). Предел суммы, произведения, отношения двух функций. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах. Теорема о предельном переходе в сложной функции. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 1999. Глава III, §§ 1-6, глава IV, § 3.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 4, §§ 1, 2, 5, 6.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 14, 24, 49, 60, 71.

Тема 4. Эквивалентные функции и символ o -малое

Эквивалентные функции. Теорема о замене функций на эквивалентные в произведении и отношении (при вычислении пределов). Символ o -малое, его свойства. Необходимое и достаточное условие эквивалентности двух функций. Использование символа o -малое при вычислении пределов. Понятие о правиле Лопиталья вычисления пределов. Понятие о формуле Маклорена, формулы Маклорена для основных элементарных функций, их использование при вычислении пределов. Понятие асимптоты. Определение параметров наклонной асимптоты.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 1999. Глава III, § 7, глава V, §§ 10, 11, 13.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 4, § 2, глава 8, §§ 12-14, 16, глава 9, § 5.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 30, 54, 58, 62, 73, 96.

Тема 5. Непрерывность функции в точке

Понятие непрерывной функции. Точки разрыва, их классификация. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Локальные свойства функций, непрерывных в точке.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 1999. Глава IV, §§ 1, 2.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 4, §§ 3, 4, 7, 8, глава 5, §§ 2, 3.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 67, 73.

Тема 6. Свойства числовых множеств и последовательностей

Понятие верхней (нижней) границы и грани, максимального (минимального) элемента числового множества. Рабочее определение верхней

(нижней) грани. Существование верхней грани непустого ограниченного сверху множества. Доказательство теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности. Теоремы о пределе монотонной ограниченной функции. Понятие предельной точки последовательности; связь с понятием частичного предела. Лемма о предельной точке и теорема Больцано – Вейерштрасса об ограниченной последовательности. Понятие фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 1999. Глава I, §§ 3-5, глава II, §§ 5-7.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 2, § 1, глава 3, §§ 3,4.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. – М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 36, 64.

Тема 7. Глобальные свойства непрерывных функций

Первая и вторая теоремы Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции. Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема о непрерывности обратной функции.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 2000. Глава IV, §§ 4, 5, 7.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 8, §§ 1, 4-6.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. – М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 39, 44, 67, 73.

Тема 8. Производная и дифференциал

Понятие производной. Геометрический, механический и экономический смысл производной. Понятие дифференцируемой функции; понятие дифференциала. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции; единственность дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Связь непрерывности и дифференцируемости. Произ-

водная суммы, произведения, отношения. Производная сложной функции. Производные основных элементарных функций. Понятие обратной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции (без доказательства). Производная обратной функции. Свойства дифференциала. Инвариантная форма первого дифференциала. Эластичность функции по аргументу, её экономический смысл. Производные и дифференциалы высших порядков, их свойства.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 1999. Глава V, §§ 1-4.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 5, §§ 1-10.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 44, 86, 102, 109, 111.

Тема 9. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения

Экстремум функции. Необходимое условие внутреннего локального экстремума. Теорема Ролля, её геометрический смысл. Теорема Лагранжа о конечном приращении, её геометрический смысл. Теорема Коши. Правило Лопиталя. Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Пеано. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Запись формулы Тейлора через дифференциалы. Использование формулы Маклорена для приближенных вычислений. Понятие ряда Тейлора. Необходимые и достаточные условия монотонности функции на интервале. Необходимое условие экстремума второго порядка. Три достаточных условия экстремума. Построение графиков с полным исследованием.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 1999. Глава V, §§ 5-14.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 8, §§ 7-16, глава 9, § 1.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 62, 87, 96, 97, 100, 101, 103, 108, 109, 111.

Тема 10. Выпуклость функции

Выпуклость функции (строгая и нестрогая). Необходимые и достаточные условия выпуклости на языке угловых коэффициентов хорд. Непрерывность и односторонняя дифференцируемость выпуклой функции. Определение выпуклости с помощью касательной. Необходимые и достаточные условия выпуклости первого и второго порядка. Понятие точки перегиба. Необходимые и достаточные условия точки перегиба.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая школа, 1999. Глава V, §§ 14, 15.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 9, §§ 1-4.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025. Стр. 105, 110.

Тема 11*. Неопределенный интеграл

Лемма о функциях, имеющих одинаковую производную на интервале. Понятие первообразной функции. Понятие неопределенного интеграла, его свойства. Таблица интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле и интегрирование по частям. Теорема о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших. Интегрирование рациональной дроби. Интегрирование тригонометрических выражений, универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование простейших иррациональных функций.

Литература по теме

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое. — М.: Высшая школа, 2000. Глава VI, §§ 1, 2.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. Глава 6, §§ 1, 2, глава 7, §§ 6-8, 10.
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Методические материалы по курсу математического анализа (Интеграл и функции нескольких переменных). — М.: Экономический ф-т МГУ, 2009. Стр. 12-21.
4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: АСТ: Астрель, 2010. Отдел III, §§ 1-4.

Литература

Основная литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое. — М.: Высшая Школа, 2000 (и последующие издания).
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1, 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 (и последующие издания).
3. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Предел и производная. Учебное пособие по курсу математического анализа. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025.

Дополнительная литература

4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: АСТ: Астрель, 2010.
5. Кочергин А. В., Кострикин И. А. Методические материалы по курсу математического анализа (Интеграл и функции нескольких переменных). — М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009.
6. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1. — М.: Издательство МЦНМО, 2012.
7. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., Математический анализ в задачах и упражнениях. Ч. 1. — М., МЦНМО, 2017.

РАЗДЕЛ

«Пределы и непрерывность»

Примерные вопросы для микроконтрольной по разделу «Пределы и непрерывность»

Всюду, где в вопросах написано $x \rightarrow a$, следует также учитывать возможные случаи $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$. Теоремы нужно уметь формулировать в терминах «Если ..., то ...», «...тогда и только тогда, когда ...», а также в виде необходимого, достаточного или необходимого и достаточного условия.

1. Сформулируйте определение ε -окрестности и проколотой ε -окрестности точки двумя способами: с помощью промежутков и с помощью неравенств.
2. Сформулируйте определение правой ε -полуокрестности и проколотой правой ε -полуокрестности точки двумя способами: с помощью промежутков и с помощью неравенств. То же самое для левых полуокрестностей.
3. Сформулируйте определение пересечения двух множеств. Что является пересечением окрестностей радиусов δ_1 и δ_2 точки a ?
4. Сформулируйте определение окрестности бесконечности в множестве действительных чисел. Что является пересечением двух окрестностей бесконечности радиусов E_1 и E_2 ?
5. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества и верхней границы множества. То же самое для ограниченности снизу.
6. Сформулируйте два эквивалентных определения ограниченного множества.
7. Сформулируйте определение ограниченной сверху последовательности и верхней границы последовательности. То же самое для ограниченности снизу.
8. Сформулируйте два эквивалентных определения ограниченной последовательности.

9. Сформулируйте в позитивной форме определение неограниченной последовательности.
10. Сформулируйте в позитивной форме определение неограниченного множества.
11. Сформулируйте определение предела последовательности на языке неравенств.
12. Сформулируйте определение сходящейся последовательности с помощью кванторов и неравенств.
13. Сформулируйте в позитивной форме утверждение о том, что число A не является пределом последовательности $\{x_n\}$.
14. Сформулируйте в позитивной форме утверждение о том, что последовательность не имеет предела.
15. Сформулируйте определение бесконечно малой последовательности на языке неравенств.
16. Сформулируйте теорему о связи понятий сходящейся последовательности и бесконечно малой последовательности.
17. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности.
18. Сформулируйте теоремы о связи бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.
19. Сформулируйте теорему о сравнении бесконечно малых последовательностей.
20. Приведите с пояснениями пример ограниченной последовательности, не имеющей предела.
21. Приведите с пояснениями пример неограниченной последовательности, не являющейся бесконечно большой.
22. Сформулируйте неравенство треугольника для действительных чисел.
23. Сформулируйте теорему о сумме бесконечно малых последовательностей.
24. Сформулируйте теорему о пределе суммы последовательностей.
25. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух последовательностей.
26. Сформулируйте теорему о соотношении ограниченности и существования предела для последовательности. Верна ли обратная теорема?
27. Что можно сказать о произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей?
28. Сформулируйте лемму об устойчивости знака для последовательности.

29. Сформулируйте усиленный вариант леммы об устойчивости знака для последовательности.
30. Сформулируйте лемму об ограниченности последовательности $\{1/b_n\}$.
31. Сформулируйте теорему о пределе отношения последовательностей.
32. Сформулируйте обобщения леммы об устойчивости знака для последовательностей.
33. Сформулируйте теорему о переходе к пределу в неравенствах для последовательностей.
34. Сформулируйте теорему о двойном неравенстве для последовательностей.
35. Сформулируйте определение числа e .
36. Сформулируйте определение функции, ограниченной на заданном множестве.
37. Сформулируйте определение локально ограниченной функции (при $x \rightarrow a$) с полной расшифровкой всех понятий.
38. Сформулируйте определение предела функции при $x \rightarrow a$ на языке неравенств с использованием кванторов.
39. Сформулируйте определение предела функции при $x \rightarrow a$ на языке окрестностей с использованием кванторов.
40. Сформулируйте в позитивной форме утверждение о том, что число A не является пределом функции $f(x)$.
41. Сформулируйте в позитивной форме утверждение о том, что функция не имеет предела при $x \rightarrow a$.
42. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \rightarrow a$ на языке неравенств.
43. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \rightarrow a$ на языке окрестностей.
44. Сформулируйте теорему о связи понятий предела и бесконечно малой функции при $x \rightarrow a$.
45. Сформулируйте определение бесконечно большой функции для случая $x \rightarrow a$.
46. Сформулируйте теоремы о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций для случая $x \rightarrow a$.
47. Сформулируйте как на языке окрестностей, так и на языке неравенств, что означает условие:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$	в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A - 0$
г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A + 0$	д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$	е) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$

- ж) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ з) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A-0$ и) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A+0$
к) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ л) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; м) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
н) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A-0$ о) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A+0$ п) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$
р) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ с) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ т) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A-0$
у) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A+0$ ф) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

48. Сформулируйте теорему о сравнении бесконечно малых функций.
49. Приведите пример ограниченной функции, не имеющей предела при $x \rightarrow a$.
50. Сформулируйте определение локально ограниченной (ограниченной при $x \rightarrow a$) функции.
51. Приведите развёрнутую формулировку с использованием кванторов теоремы о соотношении локальной ограниченности и существования предела при $x \rightarrow a$. Верна ли обратная теорема?
52. Сформулируйте в позитивной форме определение локально неограниченной (неограниченной при $x \rightarrow a$) функции.
53. Приведите пример функции, неограниченной при $x \rightarrow a$.
54. Сформулируйте теорему о сумме бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$.
55. Сформулируйте теорему о пределе суммы функций при $x \rightarrow a$.
56. Сформулируйте теорему о произведении бесконечно малой и локально ограниченной функций.
57. Сформулируйте теорему о пределе произведения функций при $x \rightarrow a$.
58. Сформулируйте лемму об устойчивости знака для случая $x \rightarrow a$.
59. Сформулируйте усиленный вариант леммы об устойчивости знака для случая $x \rightarrow a$.
60. Сформулируйте обобщения леммы об устойчивости знака для случая $x \rightarrow a$.
61. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности функции $1/g(x)$.
62. Сформулируйте теорему о пределе отношения функций при $x \rightarrow a$.
63. Сформулируйте теорему о переходе к пределу в неравенствах для случая $x \rightarrow a$.
64. Сформулируйте теорему о двойном неравенстве для случая $x \rightarrow a$.
65. Сформулируйте теорему о первом замечательном пределе.
66. Сформулируйте теорему о втором замечательном пределе для случаев $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$.

67. Сформулируйте на языке неравенств и на языке окрестностей определение непрерывности функции в точке.
68. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы функций.
69. Сформулируйте теорему о непрерывности произведения функций.
70. Сформулируйте теорему о непрерывности отношения двух функций.
71. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности непрерывной функции.
72. Сформулируйте лемму об устойчивости знака для непрерывной в точке функции.
73. Сформулируйте усиленный вариант леммы об устойчивости знака для непрерывной в точке функции.
74. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.
75. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода.
76. Сформулируйте определение точки устранимого разрыва.
77. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода.
78. Приведите пример ограниченной функции, имеющей разрыв второго рода ровно в одной точке.
79. Приведите пример функции, имеющей разрывы во всех точках.
80. Сформулируйте определение функций, эквивалентных при
81. Сформулируйте свойства отношения эквивалентности.
82. Сформулируйте теорему о замене функций на эквивалентные при вычислении пределов при $x \rightarrow a$.
83. Сформулируйте определение $o(f)$ при $x \rightarrow a$.
84. Сформулируйте основные свойства символа o —малое.
85. Сформулируйте необходимое и достаточное условие эквивалентности функций, выраженное через символ o —малое.
86. Сформулируйте определение сравнимых при $x \rightarrow a$ функций и теорему о совпадении классов функций вида $\tilde{o}(f)$.
87. Напишите формулу Маклорена для функции e^x с остаточным членом в форме Пеано.
88. Напишите формулу Маклорена для функции $\sin x$ с остаточным членом в форме Пеано.
89. Напишите формулу Маклорена для функции $\cos x$ с остаточным членом в форме Пеано.
90. Напишите формулу Маклорена для функции $\ln(1+x)$ с остаточным членом в форме Пеано.
91. Напишите формулу Маклорена для функции $(1+x)^p$ с остаточным членом в форме Пеано.

92. Сформулируйте в позитивной форме отрицание утверждения о том, что функция f непрерывна в некоторой окрестности точки a .
93. Сформулируйте в позитивной форме утверждение о том, что функция не является непрерывной на отрезке $[a, b]$.
94. Сформулируйте определение предельной точки последовательности на языке окрестностей.
95. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что точка является предельной точкой последовательности.
96. Сформулируйте теорему о существовании предельной точки у последовательности.
97. Сформулируйте в позитивной форме утверждение о том, что число A не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$.
98. Сформулируйте в позитивной форме утверждение о том, что последовательность $\{x_n\}$ не имеет предельных точек.
99. Сформулируйте определение верхней границы множества и определение (точной) верхней грани.
100. Сформулируйте определение нижней границы множества и определение (точной) нижней грани.
101. Сформулируйте «рабочее» определение верхней грани.
102. Сформулируйте «рабочее» определение нижней грани.
103. Сформулируйте теорему о существовании верхней грани множества.
104. Сформулируйте определение последовательности стягивающихся отрезков.
105. Сформулируйте лемму о стягивающихся отрезках.
106. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности и её уточнения.
107. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности и критерий Коши.
108. Сформулируйте теорему Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции.
109. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о достижении функцией наибольшего и наименьшего значений.
110. Сформулируйте теорему Коши о прохождении функцией нуля.
111. Сформулируйте теорему Коши о промежуточных значениях.
112. Сформулируйте уточнённые варианты теорем о пределе монотонной ограниченной функции.
113. Сформулируйте достаточное условие существования обратной функции.
114. Сформулируйте теорему о непрерывности обратной функции.

Формулировки основных определений и теорем

Предел последовательности

Определение окрестности:

ε -окрестностью (окрестностью радиуса ε) точки $A \in \mathbf{R}$ называется множество $U_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbf{R} : |x - A| < \varepsilon\}$.

Эквивалентные определения:

$$U_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbf{R} : A - \varepsilon < x < A + \varepsilon\} \Leftrightarrow U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

Определение предела последовательности с использованием понятия окрестности.

Число A называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$ (записывается $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0 \quad a_n \in U_\varepsilon(A).$$

Определение предела последовательности на языке неравенств.

Число A называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0 \text{ выполняется неравенство } |a_n - A| < \varepsilon.$$

Словесный вариант:

Число A называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любой окрестности точки A найдется номер, начиная с которого все члены последовательности $\{a_n\}$ лежат в этой окрестности.

Определение сходящейся последовательности. Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет предел.

В кванторах: Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся*, если

$$\exists A \in \mathbf{R} : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Теорема о единственности предела последовательности.

Если предел последовательности существует, то он единственный.

Бесконечно малая последовательность. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если она имеет нулевой предел. В силу важности этого частного случая, для него даётся отдельное определение.

Определение бесконечно малой последовательности с использованием понятия окрестности.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \text{ выполняется условие } \alpha_n \in U_\varepsilon(0).$$

Определение бесконечно малой последовательности на языке неравенств.
Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \text{выполняется неравенство} \quad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Теорема о связи понятий предела и бесконечно малой.

Число A является пределом последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда эту последовательность можно представить в виде $a_n = A + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Теорема сравнения бесконечно малых последовательностей.

Если 1) $\exists n_1 : \forall n \geq n_1 \quad |\alpha_n| \leq |\beta_n|$,

2) $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность,

то $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Теорема о сумме двух бесконечно малых последовательностей.

Если последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые,

то последовательность $\alpha_n + \beta_n$ — бесконечно малая.

(Иными словами, сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.)

Определения ограниченности последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists M \in \mathbf{R} : \forall n \quad \text{выполняется неравенство} \quad a_n \leq M.$$

В этом случае число M называется *верхней границей* для последовательности $\{a_n\}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если

$$\exists m \in \mathbf{R} : \forall n \quad \text{выполняется неравенство} \quad a_n \geq m.$$

В этом случае число m называется *нижней границей* для последовательности $\{a_n\}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е. если

$$\exists m, M \in \mathbf{R} : \forall n \quad \text{выполняется} \quad m \leq a_n \leq M.$$

Эквивалентное определение ограниченности (иногда оно удобнее).

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists C > 0 : \forall n \quad \text{выполняется} \quad |a_n| \leq C.$$

Отрицание ограниченности последовательности $\{a_n\}$ также удобнее записывать в этой формулировке: последовательность $\{a_n\}$ является *неограниченной*, если $\forall C > 0 \exists n : |a_n| > C$.

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

Если последовательность сходится, то она ограничена.

В кванторах:

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, то $\exists m, M : \forall n \quad m \leq a_n \leq M$.

Другая формулировка в кванторах:

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, то $\exists C > 0 : \forall n \quad |a_n| \leq C$.

Теорема о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную.

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

Следствия.

1. *Произведение постоянной на бесконечно малую последовательность является бесконечно малой последовательностью.*
2. *Произведение бесконечно малой последовательности на сходящуюся является бесконечно малой последовательностью.*
3. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.*
4. *Отношение ограниченной последовательности и бесконечно большой последовательности является бесконечно малой последовательностью.*

Теорема о пределе суммы двух последовательностей.

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся,
то предел суммы этих последовательностей существует и равен сумме пределов.

Теорема о пределе произведения двух последовательностей.

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся,
то предел произведения этих последовательностей существует и равен произведению пределов.

Другие формулировки (полезные при доказательстве):

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.

Лемма об устойчивости знака.

Если последовательность имеет положительный предел,

то, начиная с некоторого номера, все члены этой последовательности положительны.

В кванторах:

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$,

то $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad a_n > 0$.

Следствие из леммы об устойчивости знака.

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$,

то, начиная с некоторого номера, $a_n > b_n$
(т.е. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad a_n > b_n$).

Усиленный вариант леммы об устойчивости знака.

Если последовательность имеет положительный предел,

то, начиная с некоторого номера, все члены этой последовательности положительны и отделены от нуля, т.е. существует такое положительное число c , что, начиная с некоторого номера, $a_n \geq c > 0$.

В кванторах:

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$,

то $\exists c > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq c > 0$.

Обобщение леммы об устойчивости знака.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$,

то 1) $\forall q < A \quad \exists n_1 : \forall n \geq n_1 \quad a_n > q$.

2) $\forall q > A \quad \exists n_2 : \forall n \geq n_2 \quad a_n < q$.

Лемма об ограниченности последовательности $\{1/b_n\}$.

Если последовательность $\{b_n\}$ имеет предел, отличный от нуля,

то последовательность $\{1/b_n\}$ определена для всех номеров, начиная с некоторого, и ограничена.

Теорема о пределе отношения двух последовательностей.

Если в отношении двух последовательностей существуют пределы числителя и знаменателя и предел знаменателя отличен от нуля,

то предел отношения существует и равен отношению пределов.

Другая формулировка (полезная при доказательстве):

Если 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$,
 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$,
 3) $B \neq 0$,
то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Замечание. Обратите внимание, что при обсуждении понятия предела последовательности нас интересует её поведение, начиная с некоторого номера. Поэтому можно предполагать, что последовательность определена, начиная с некоторого номера, не обязательно с первого. Это относится и к формулировке последней теоремы, в которой по умолчанию этот факт подразумевается для отношения a_n/b_n .

Теорема о переходе к пределу в неравенстве.

Если 1) начиная с некоторого номера, $a_n \leq b_n$,
 2) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$,
то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Замечание. Если в теореме о переходе к пределу в неравенстве в условии 1) заменить неравенство на строгое, то в заключении всё равно придётся оставить нестрогое неравенство: **при переходе к пределу строгое неравенство может перейти в равенство.**

Пример: $\frac{1}{n} > 0$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Теорема о двойном неравенстве.

Если 1) начиная с некоторого номера, $a_n \leq b_n \leq c_n$,
 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$,
то последовательность $\{b_n\}$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

Определение бесконечно большой последовательности на языке неравенств. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой* (пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$), если $\forall E > 0 \quad \exists n_0: \forall n \geq n_0 \quad |a_n| > E$.

Частные случаи:

Пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists n_0: \forall n \geq n_0 \quad a_n > E$.

Пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists n_0: \forall n \geq n_0 \quad a_n < -E$.

Определение окрестности бесконечности:

E-окрестностью бесконечности в $\mathbf{R}$ называется множество

$$U_E(\infty) = \{x \in \mathbf{R} : |x| > E\}.$$

Другая запись окрестности бесконечности:

$$U_E(\infty) = (-\infty, -E) \cup (E, +\infty).$$

Замечание. В этом определении E (*эпсилон прописное*) — это «радиус» окрестности бесконечности (радиус дополнения или расстояние от нуля до «края» окрестности).

Определение бесконечно большой последовательности на языке окрестностей и неравенств:

Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall U_E(\infty) \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \text{выполняется условие} \quad a_n \in U_E(\infty).$$

Упражнение. Опишите стремление последовательности к $+\infty$ или к $-\infty$, используя окрестности $U_E(+\infty)$ и $U_E(-\infty)$.

Словесная формулировка: Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любой окрестности бесконечности все члены последовательности $\{a_n\}$, начиная с некоторого номера, попадают в эту окрестность.

Теоремы о соотношении бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей.

Если $\{a_n\}$ — бесконечно большая последовательность,

то $\{1/a_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, и, начиная с некоторого номера, $\alpha_n \neq 0$,

то $\{1/\alpha_n\}$ — бесконечно большая последовательность.

Следствие. Отношение ограниченной последовательности и бесконечно большой последовательности является бесконечно малой последовательностью.

Несколько забегаая вперёд, сформулируем важную теорему и упомянем одно из её применений.

Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности.

Монотонная ограниченная последовательность сходится.

Теорема. Существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Комментарий. Последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ возрастает и ограничена.

Определение. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ называется числом e .

Предел функции

Окрестности точки x_0 .

δ -окрестность: $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : |x - x_0| < \delta\}$

проколота δ -окрестность: $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}$

правая δ -полуокрестность: $U_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x - x_0 < \delta\}$

проколота правая δ -полуокрестность: $\overset{\circ}{U}_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x - x_0 < \delta\}$

левая δ -полуокрестность: $U_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : -\delta < x - x_0 \leq 0\}$

проколота левая δ -полуокрестность: $\overset{\circ}{U}_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : -\delta < x - x_0 < 0\}$

Окрестности бесконечности.

δ -окрестность бесконечности: $U_\delta(\infty) = \{x \in \mathbf{R} : |x| > \delta\}$

δ -окрестность плюс бесконечности: $U_\delta(+\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > \delta\}$

δ -окрестность минус бесконечности: $U_\delta(-\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x < -\delta\}$

Определение предела функции с использованием понятия окрестности.

Число A называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$* , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

или

$$\forall U_\varepsilon(A) \quad \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Определение предела функции на языке неравенств.

Число A называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$* (записывается $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall (x : 0 < |x - a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Словесный вариант:

Число A называется *пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$* , если для любой окрестности $U_\varepsilon(A)$ (на оси ординат) точки A найдется проколота окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ точки a (на оси абсцисс) такая, что для любого x из этой проколотой окрестности точки a значение $f(x)$ лежит в окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки A .

Теорема о единственности предела функции.

Если предел функции при $x \rightarrow a$ существует, то он единственный.

Определение функции, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.
В кванторах это записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(a): \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \text{ выполняется неравенство } |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Тем самым бесконечно малая функция — это важный частный случай функции, имеющей предел при $x \rightarrow a$.

Теорема о связи понятий предела функции и бесконечно малой.

Число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда эту функцию можно представить в виде

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ — бесконечно малая при } x \rightarrow a.$$

Теорема сравнения бесконечно малых функций.

Если 1) существует проколота окрестность точки a , в которой выполняется неравенство $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$,

2) $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$,

то $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Теорема о сумме двух бесконечно малых функций.

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow a$,

то функция $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Определения ограниченности функции на множестве.

- Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху на множестве X* , если $\exists M : \forall x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$. В этом случае число M называется *верхней границей* для функции $f(x)$ на множестве X .
- Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу на множестве X* , если $\exists m : \forall x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq m$. В этом случае число m называется *нижней границей* для функции f на множестве X .
- Функция $f(x)$ называется *ограниченной на множестве X* , если она ограничена сверху и снизу на этом множестве, т.е.

$$\exists m, M : \forall x \in X \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Эквивалентное определение ограниченности на множестве:

(докажите эквивалентность).

Функция $f(x)$ называется *ограниченной на множестве X* , если

$$\exists C > 0 : \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M.$$

Определение локальной ограниченности функции (при $x \rightarrow a$).

Функция $f(x)$ называется *ограниченной при $x \rightarrow a$* , если существует проколотая окрестность точки a , в которой функция $f(x)$ ограничена.

В кванторах:

Функция $f(x)$ называется *ограниченной при $x \rightarrow a$* , если

$$\exists \dot{U}_\delta(a), \exists C > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \quad |f(x)| \leq C.$$

Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел.

Если функция имеет предел, то она локально ограничена.

Это общая, но не строгая формулировка (не указано, что значит «локально»), которая хороша для понимания и запоминания общей идеи.

Приведём три последовательно уточняющие друг друга формулировки для случая $x \rightarrow a$, которые можно использовать в конкретных ситуациях.

- 1) Если функция имеет предел при $x \rightarrow a$,
то она ограничена при $x \rightarrow a$.
- 2) Если функция имеет предел при $x \rightarrow a$,
то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a .

В кванторах (наиболее полная формулировка, пригодная для доказательств):

$$\text{Если} \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

$$\text{то} \quad \exists \dot{U}_\delta(a), \exists C > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \quad |f(x)| \leq C.$$

Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную.

Произведение функции, бесконечно малой при $x \rightarrow a$, и функции, ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки a , является функцией, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

Следствия.

1. Произведение постоянной на функцию, бесконечно малую при $x \rightarrow a$, является функцией, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.
2. Произведение функции, бесконечно малой при $x \rightarrow a$ на функцию, имеющую предел при $x \rightarrow a$, является функцией, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.
3. Произведение двух функций, бесконечно малых при $x \rightarrow a$, является функцией, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.
4. Отношение функции, ограниченной при $x \rightarrow a$, и функции, бесконечно большой при $x \rightarrow a$, является функцией, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

Теорема о пределе суммы двух функций.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$,

то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$.

Теорема о пределе произведения двух функций.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$,

то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

Лемма об устойчивости знака.

Если функция имеет положительный предел при $x \rightarrow a$,

то в некоторой проколотой окрестности точки a функция положительна.

В кванторах:

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$,

то $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) > 0$.

Следствие из леммы об устойчивости знака.

Если функции $f(x)$, $g(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow a$ и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

то в некоторой проколотой окрестности точки a выполнено неравенство $f(x) > g(x)$.

В кванторах:

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,

то $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) > g(x)$.

Усиленный вариант леммы об устойчивости знака.

Если функция имеет положительный предел при $x \rightarrow a$,

то в некоторой проколотой окрестности точки a значения функции положительны и отделены от нуля.

Это нестрогая формулировка (не указано, что значит «отделены от нуля»), которая хороша для понимания и запоминания общей идеи.

В работах и при доказательстве теорем надо использовать следующую формулировку **в кванторах:**

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$,

то $\exists c > 0, \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) \geq c > 0$.

Обобщение леммы об устойчивости знака.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$,

то 1) $\forall q < A \quad \exists \dot{U}_\delta(a) : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \quad f(x) \geq q$,

2) $\forall q > A \quad \exists \dot{U}_\delta(a) : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \quad f(x) \leq q$.

Лемма о локальной ограниченности функции $1/g(x)$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$,

то в некоторой проколотой окрестности точки a функция $1/g(x)$ определена и ограничена.

Упражнение. Сформулируйте эту лемму в кванторах.

Теорема о пределе отношения функций.

Если 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$,

2) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$,

3) $B \neq 0$,

то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Определение функции, бесконечно большой при $x \rightarrow a$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \quad |f(x)| > E.$$

Записывается: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Важное замечание. Несмотря на последнюю запись, считается, что предел бесконечно большой функции **не существует**.

Теоремы о соотношении бесконечно большой и бесконечно малой функций.

Если функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x \rightarrow a$,

то функция $1/f(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$ и в некоторой проколотой окрестности точки a выполнено условие $\alpha(x) \neq 0$,

то функция $1/\alpha(x)$ — бесконечно большая при $x \rightarrow a$.

Теорема о переходе к пределу в неравенстве.

Если 1) $\exists \dot{U}_\delta(a) : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \quad f(x) \leq g(x)$,

2) $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,

то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Замечание. Если в теореме о переходе к пределу в условии 1) заменить неравенство на строгое, то в заключении всё равно придётся оставить не-строгое неравенство: *при переходе к пределу строгое неравенство может перейти в равенство.*

Пример. При всех $x > 0$ выполнено строгое неравенство

$$1/x > 0, \quad \text{однако} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0.$$

Теорема о двойном неравенстве.

Если, 1) $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x),$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A,$$

то $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$

Теорема о первом замечательном пределе.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Важное неравенство (получается из геометрических соображений в ходе доказательства первого замечательного предела).

Для любого x справедливо неравенство

$$|\sin x| \leq |x|,$$

причём равенство достигается только при $x = 0$.

Теоремы о предельном переходе в сложной функции, или замена переменной при переходе к пределу (возможны и другие варианты).

Вариант 1.

Если, 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$

$$2) \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0,$$

$$3) \exists \overset{\circ}{U}_\delta(t_0) : \forall t \in \overset{\circ}{U}_\delta(t_0) \quad \varphi(t) \neq x_0,$$

то $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = A.$

Вариант 2.

Если, 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A,$

$$2) \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \infty,$$

то $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = A.$

Вариант 3.Если, 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$,2) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = +\infty$,то $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(\varphi(t)) = A$.**Теорема о втором замечательном пределе.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Замечание. Предполагается, что дано определение числа e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Эквивалентные функции и символ o -малое

Определение. Функции f и g называются *эквивалентными при $x \rightarrow a$* , (обозначение: $f \sim g$ при $x \rightarrow a$), если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Аналогичное определение формулируется и для других случаев поведения аргумента.

Замечание. В этом определении предполагается, что в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$ функции f и g отличны от нуля (в рассматриваемых примерах обычно это выполняется).

Более общее определение эквивалентных функций. Функции f и g называются *эквивалентными при $x \rightarrow a$* , если в некоторой проколотой окрестности точки a функцию f можно представить в виде $f(x) = g(x)(1 + \alpha(x))$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Замечание. Это определение равносильно предыдущему для функций, не обращающихся в ноль в некоторой проколотой окрестности. При этом оно позволяет рассматривать эквивалентность функций, обращающихся в ноль в одних и тех же точках.

Свойства отношения эквивалентности.

1. Рефлексивность: $f \sim f$.
2. Симметричность: $f \sim g \Rightarrow g \sim f$.
3. Транзитивность: $f \sim g \wedge g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

Теорема о замене функций на эквивалентные. При вычислении предела произведения или отношения сомножители можно заменять на эквивалентные, предел при этом не изменяется.

Уточнения теоремы (замена сомножителя в произведении, числителя и знаменателя в отношении).

- I) Если 1) $f \sim g$ при $x \rightarrow a$,
 2) $\exists \lim_{x \rightarrow a} (h(x) \cdot f(x))$,
то $\exists \lim_{x \rightarrow a} (h(x) \cdot g(x))$ и этот предел равен $\lim_{x \rightarrow a} (h(x) \cdot f(x))$.
- II) Если 1) $f \sim g$ при $x \rightarrow a$,
 2) $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)}$,
то $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)}$ и этот предел равен $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)}$.
- III) Если 1) $f \sim g$ при $x \rightarrow a$,
 2) $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{f(x)}$,
то $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{g(x)}$ и этот предел равен $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{f(x)}$.

Замечание. Из симметричности отношения эквивалентности следует, что пределы выражений до замены и после замены существуют или не существуют одновременно.

Определение символа *о-малое* (все определения переносятся на другие случаи поведения аргумента).

Говорят, что функцию h можно представить в виде *о-малое* от f при $x \rightarrow a$ (пишется $h = o(f)$ при $x \rightarrow a$), если в некоторой проколотой окрестности точки a функцию h можно представить в виде $h(x) = f(x) \cdot \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Теорема. При $x \rightarrow a$ $f \sim g \Leftrightarrow g = f + o(f) \Leftrightarrow f = g + o(g)$.

Обозначение. $\tilde{o}(f) = \{g(x) : g = o(f)\}$ при $x \rightarrow a$ — совокупность (классе) всех функций, которые можно представить в виде $o(f)$.

Теорема. При $x \rightarrow 0$ имеет место цепочка включений ($n \in \mathbb{N}$):

$$\dots \supset \tilde{o}(x^{-n}) \supset \dots \supset \tilde{o}(x^{-1}) \supset \tilde{o}(1) \supset \tilde{o}(x) \supset \tilde{o}(x^2) \supset \dots \supset \tilde{o}(x^n) \supset \dots$$

Теорема. При $x \rightarrow \infty$ имеет место цепочка включений ($n \in \mathbb{N}$):

$$\dots \subset \tilde{o}(x^{-n}) \subset \dots \subset \tilde{o}(x^{-1}) \subset \tilde{o}(1) \subset \tilde{o}(x) \subset \tilde{o}(x^2) \subset \dots \subset \tilde{o}(x^n) \subset \dots$$

Теорема. Если при $x \rightarrow a$ верно $f \sim g$, то $\tilde{o}(f) = \tilde{o}(g)$.

Определение. Функции f и g называются *сравнимыми (одного порядка)*, обозначение $f \asymp g$ при $x \rightarrow a$, если

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists \tilde{U}(a) : \forall x \in \tilde{U}(a) \quad 0 < c_1 < \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < c_2.$$

Частные случаи сравнимых функций.

Если $|f| \sim |g|$ при $x \rightarrow a$,

то $f \asymp g$ при $x \rightarrow a$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = c \neq 0$,

то $f \asymp g$ при $x \rightarrow a$.

Теорема. Если $f \asymp g$ при $x \rightarrow a$, то $\tilde{o}(f) = \tilde{o}(g)$ при $x \rightarrow a$.

Замечание. Иногда определение сравнимых функций пишут без знака модуля. Переформулируйте частные случаи сравнимых функций и последнюю теорему в соответствии с таким вариантом определения.

Простейшие эквивалентности, а также примеры их применения приведены на странице 54.

Непрерывность функции в точке

Обозначим через D_f область определения функции f .

Определение непрерывности функции в точке.

Функция f называется *непрерывной в точке* x_0 , если она определена в этой точке и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Обозначения.

$C(x_0)$ — множество функций, непрерывных в точке x_0 .

$f \in C(x_0) \Leftrightarrow$ функция f непрерывна в точке x_0 .

Варианты определения непрерывности.

- Если в область определения входит некоторая окрестность точки x_0 , то $f \in C(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Если в область определения f входит некоторая правая непроколота полуокрестность точки x_0 , а в левой проколотой полуокрестности f не определена, то $f \in C(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.
- Аналогично для функции, определённой только в некоторой левой непроколотой полуокрестности точки x_0 :

$$f \in C(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

- Если функция определена в некоторой двусторонней окрестности точки и при этом верно только одно из равенств

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0),$$

то говорят об *односторонней* непрерывности функции: соответственно, *справа* или *слева*.

- Из определения непрерывности также следует, что функция непрерывна во всех изолированных точках области определения. Это оказывается удобным при рассмотрении ряда задач.

Теорема о непрерывности суммы.

Если $f, g \in C(x_0)$,

то $f + g \in C(x_0)$.

Теорема о непрерывности произведения.

Если $f, g \in C(x_0)$,

то $f \cdot g \in C(x_0)$.

Теорема о непрерывности отношения.

Если 1) $f, g \in C(x_0)$,

2) $g(x_0) \neq 0$,

то $\frac{f}{g} \in C(x_0)$.

Замечание. Условия теоремы о непрерывности суммы (непрерывность слагаемых) являются *достаточными*, но не *необходимыми* условиями непрерывности суммы. Это же замечание касается *теорем о непрерывности произведения и отношения*. **Обоснуйте замечание.**

Лемма об устойчивости знака.

Если $f \in C(x_0)$ и $f(x_0) > 0$,

то $\exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) > 0$.

Следствие из леммы об устойчивости знака.

Если $f, g \in C(x_0)$ и $f(x_0) > g(x_0)$,

то $\exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \cap D_g \quad f(x) > g(x)$.

Усиленный вариант леммы об устойчивости знака.

Если $f \in C(x_0)$ и $f(x_0) > 0$,

то $\exists c > 0, \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \geq c > 0$.

Обобщение леммы об устойчивости знака.

Если $f \in C(x_0)$,

то 1) $\forall q < f(x_0) \quad \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \geq q$,

2) $\forall q > f(x_0) \quad \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \leq q$.

Лемма о локальной ограниченности непрерывной функции.

Если $f \in C(x_0)$,

то в некоторой окрестности точки x_0 функция f ограничена, т.е.

$$\exists U_\delta(x_0), \exists m, M : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Или так: $\exists U_\delta(x_0), \exists C > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D_f \quad |f(x)| \leq C$.

Теорема о непрерывности сложной функции (вариант теоремы о предельном переходе в сложной функции).

Если 1) $\varphi(t) \in C(t_0)$,

2) $f(x) \in C(x_0)$,

3) $x_0 = \varphi(t_0)$,

то $f(\varphi(t)) \in C(t_0)$.

Классификация точек разрыва.

В настоящем пособии классификация точек разрыва относится только к следующим двум случаям:

- функция определена в некоторой окрестности точки x_0 , т.е. $\exists U(x_0) \subset D_f$;
- функция определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , а в самой точке не определена.

К этим же случаям относятся все упражнения из настоящего пособия. Мы не классифицируем случаи, когда функция определена в поукрестности точки x_0 .

В первой ситуации функция $f \in C(x_0)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

(оба предела существуют, бесконечный предел — это отсутствие предела).

Точки разрыва I (первого) рода (неустранимого и устранимого).

1. Точка x_0 называется точкой *неустранимого разрыва I рода* функции f , если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, и при этом

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$. Такую точку разрыва иногда еще называют *скачком*.

2. Точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва I рода* функции f , если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ существуют, совпадают, но при этом либо

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$, либо значение $f(x_0)$ не определено.

Название обусловлено тем, что, изменив значение или доопределив значение функции в одной точке, можно сделать функцию непрерывной в данной точке. Эта операция называется *доопределением по непрерывности*.

Точка разрыва II рода. Точка x_0 называется *точкой разрыва II рода*, если не существует (в том числе, бесконечен) хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$. При этом в самой точке x_0 функция может быть как определена, так и не определена.

Замечание 1. Частично приведенную классификацию можно распространить на случай, когда функция определена только с одной стороны от точки x_0 и в самой точке x_0 . Предположим, что справа. В этом случае возможны два варианта:

- устранимый разрыв, если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$,
- разрыв II рода, если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ не существует.

Замечание 2. Если функция определена только с одной стороны от точки x_0 и не определена в самой точке, то мы её не считаем точкой разрыва. Например, точка $x = 0$ не является точкой разрыва для функции $\ln x$.

Свойства числовых множеств и последовательностей

Аксиома полноты (непрерывности) числовой прямой.

Если непустые числовые множества $X \subset \mathbf{R}$ и $Y \subset \mathbf{R}$ таковы, что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$,
то $\exists c \in \mathbf{R} : \forall x \in X, \forall y \in Y$ выполнено неравенство $x \leq c \leq y$
 (существует число c , разделяющее множества).

Определения ограниченного числового множества и границы множества.

Числовое множество X называется *ограниченным сверху*, если

$$\exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad x \leq M.$$

При этом число M называется *верхней границей* множества X .

Числовое множество X называется *ограниченным снизу*, если

$$\exists m \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad x \geq m.$$

При этом число m называется *нижней границей* множества X .

Числовое множество X называется *ограниченным*, если оно ограничено и снизу, и сверху, т.е.

$$\exists m, M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad m \leq x \leq M.$$

Эквивалентное определение ограниченного множества. Числовое множество X называется *ограниченным*, если

$$\exists C > 0 : \forall x \in X \quad |x| \leq C.$$

Определения наибольшего и наименьшего элементов множества.

Элемент множества (число) $M \in X$ называется *максимальным (наибольшим) элементом* числового множества X , если

$$\forall x \in X \quad x \leq M.$$

Обозначение: $M = \max X$.

Элемент множества (число) $m \in X$ называется *минимальным (наименьшим) элементом* числового множества X , если

$$\forall x \in X \quad x \geq m.$$

Обозначение: $m = \min X$.

Упражнение. Покажите, что ограниченное сверху множество не обязательно имеет наибольший элемент, ограниченное снизу множество не обязательно имеет наименьший элемент.

Определение верхней грани числового множества.

Верхней гранью (точной верхней гранью) непустого ограниченного сверху числового множества X (обозначение $\sup X$) называется наименьшая из верхних границ этого множества.

Теорема существования верхней грани числового множества.

Каждое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет верхнюю грань.

Иными словами:

В множестве верхних границ непустого ограниченного сверху числового множества существует минимальный элемент.

Определение нижней грани числового множества.

Нижней гранью (точной нижней гранью) ограниченного снизу числового множества X (обозначение $\inf X$) называется наибольшая из нижних границ этого множества.

Рабочее определение верхней грани.

Число M называется *верхней гранью* непустого ограниченного сверху множества X , если

- 1) $\forall x \in X \quad x \leq M$,
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X : x > M - \varepsilon$.

Теорема. *Определение верхней грани и рабочее определение верхней грани эквивалентны.*

Упражнения.

1. Сформулируйте рабочее определение нижней грани.
2. Докажите эквивалентность двух определений нижней грани.

Теорема. *Непустое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань, то есть в множестве нижних границ непустого ограниченного снизу числового множества существует максимальный элемент.*

Теорема.

1. Утверждения о существовании верхней грани и нижней грани эквивалентны между собой.
2. Утверждения о существовании верхней грани и нижней грани эквивалентны аксиоме полноты.

Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности.

Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Обозначения. $\sup\{a_n\} = \sup_n a_n$ — верхняя грань множества значений последовательности. $\inf\{a_n\} = \inf_n a_n$ — нижняя грань множества значений последовательности.

Варианты и уточнения Теоремы Вейерштрасса.

- 1) Если $\{a_n\}$ — монотонно неубывающая и ограничена сверху,
то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n$.
- 2) Если $\{a_n\}$ — (строго) возрастающая и $\exists M : \forall n \quad a_n \leq M$,
то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n$, причём $\forall n \quad a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M$.
- 3) Если $\{a_n\}$ — монотонно невозрастающая и ограничена снизу,
то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n$.
- 4) Если $\{a_n\}$ — (строго) убывающая и $\exists m : \forall n \quad a_n \geq m$,
то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n$, причём $\forall n \quad a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq m$.

Теорема. Существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Определение. Числом e называется $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Определение системы стягивающихся отрезков.

Последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$ называется *системой вложенных отрезков*, если $\forall n \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

Система вложенных отрезков называется *системой стягивающихся отрезков*, если последовательность их длин стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Лемма о стягивающихся отрезках. Каждая система стягивающихся отрезков имеет общую точку, притом ровно одну.

Подробная формулировка

Если $\{[a_n, b_n]\}$ — система стягивающихся отрезков,

то $\exists ! c : \forall n \quad c \in [a_n, b_n]$.

Определение предельной точки последовательности.

Точка c называется *предельной точкой последовательности* $\{a_n\}$, если в любой её окрестности содержится бесконечно много членов последовательности.

В кванторах:

Точка c называется *предельной точкой последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 : a_n \in U_\varepsilon(c).$$

Определение частичного предела последовательности.

- 1) Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность номеров, т.е. натуральных чисел. Тогда последовательность $\{b_k = a_{n_k}\}$ (с аргументом k) называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.
- 2) Точка c называется *частичным пределом последовательности* $\{a_n\}$, если существует сходящаяся к этой точке подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$.

Теорема об эквивалентности понятий предельной точки и частичного предела последовательности.

Точка c является предельной точкой последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда она является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$.

Лемма о предельной точке последовательности.

Каждая ограниченная последовательность имеет предельную точку.

Теорема Больцано-Вейерштрасса об ограниченной последовательности.

Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Определение фундаментальной последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет *условию Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Другая форма записи условия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Критерий Коши сходимости последовательности.

Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Развёрнутая формулировка критерия Коши.

Последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Глобальные свойства непрерывных функций

Определение. Точка x_0 множества $X \subset \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой множества X* , если у неё существует окрестность, целиком содержащаяся в множестве X .

Определение. Точка $x_0 \in \mathbf{R}$ называется *предельной точкой множества* $X \subset \mathbf{R}$, если в любой её окрестности содержится бесконечно много точек множества X .

Определение. Множество $X \subset \mathbf{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры. Предельными точками множества $[0, 1) \cup \{2\}$ являются все точки отрезка $[0, 1]$ и только они. Следовательно, это множество не является замкнутым, поскольку не содержит точку $x = 1$. Множества $[0, 1] \cup \{2\}$, $\{2\}$, $[0, 1]$, $[0, 1] \cup [2, 3]$, $(-\infty, +\infty)$ являются замкнутыми.

Определение непрерывности функции на множестве.

Говорят, что функция f *непрерывна на множестве* X , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Обозначения.

$C(X)$ — множество функций, непрерывных на множестве X .

$f \in C(X)$ — функция f непрерывна на множестве X .

Первая теорема Вейерштрасса.

Если функция непрерывна на отрезке,
то она ограничена на этом отрезке.

В кванторах:

Если $f \in C[a, b]$,

то функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$\exists m, M : \forall x \in [a, b], \quad m \leq f(x) \leq M$$

(по-другому: $\exists C > 0 : \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq C$).

Замечание. Условия теоремы существенны.

- 1) Для интервала или полуинтервала первая теорема Вейерштрасса неверна, т.е. можно привести пример функции, непрерывной на интервале (a, b) или на полуинтервале $[a, b)$ и не ограниченной на этом интервале или полуинтервале. Пример: функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не ограничена на этом интервале.
- 2) Для прямой $\mathbf{R}$, а также замкнутой полупрямой $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$ первая теорема Вейерштрасса неверна.
Пример: функция $f(x) = x$.
- 3) Функция, разрывная хотя бы в одной точке отрезка, может быть неограниченной.

Например, функция $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Определение. *Верхней гранью функции*, определённой на каком-либо непустом множестве и ограниченной сверху на этом множестве, называется верхняя грань множества её значений на этом множестве.

Обозначение: $\sup_X f$ или $\sup_{x \in X} f(x)$.

Определение. *Нижней гранью функции*, определённой на каком-либо непустом множестве и ограниченной снизу на этом множестве, называется нижняя грань множества её значений на этом множестве.

Обозначение: $\inf_X f$ или $\inf_{x \in X} f(x)$.

Вторая теорема Вейерштрасса.

Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своих (точных) нижней и верхней граней.

Другая формулировка. *Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.*

Развёрнутая формулировка в кванторах:

Если $f \in C[a, b]$,

то $\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b] : \forall x \in [a, b] \quad f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$.

Замечание. *Условия теоремы существенны.*

- 1) Для интервала или полуинтервала вторая теорема Вейерштрасса неверна, т.е. можно привести пример функции, непрерывной на интервале (a, b) или на полуинтервале $(a, b]$, у которой на этом интервале или полуинтервале нет наибольшего или наименьшего значения. Например, функция $f(x) = 1/x$ на интервале $(0, 1)$ или на полуинтервале $(0, 1]$. Наибольшего или наименьшего на интервале (или полуинтервале) значения может не быть и у ограниченной функции.

Пример: $f(x) = x$ на интервале $(0, 1)$.

- 2) Для прямой $\mathbf{R}$, а также замкнутой полупрямой $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$ вторая теорема Вейерштрасса неверна.

Пример: функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

- 3) Функция, разрывная хотя бы в одной точке отрезка, может не иметь на отрезке наибольшего или наименьшего значения.

Например, функция $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$

или $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x > 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Замечания к теоремам Вейерштрасса показывают, какие именно свойства отрезка являются существенными: замкнутость и ограниченность. Оказывается, теоремы верны в следующих, наиболее общих формулировках (без доказательства):

Первая теорема Вейерштрасса (общая формулировка).

Если функция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она ограничена на этом множестве.

Расшифровка в кванторах:

Если 1) множество X замкнуто и ограничено,
2) $f \in C(X)$,

то функция f ограничена на множестве X , т. е.

$$\exists m, M : \forall x \in X \quad m \leq f(x) \leq M$$

(или по-другому, $\exists C > 0 : \forall x \in X \quad |f(x)| \leq C$).

Вторая теорема Вейерштрасса (общая формулировка).

Если функция непрерывна на непустом замкнутом ограниченном множестве, то она достигает на этом множестве своих (точных) нижней и верхней граней.

Расшифровка в кванторах:

Если 1) множество X непусто, замкнуто и ограничено,
2) $f \in C(X)$,

то $\exists x_{\min}, x_{\max} \in X : \forall x \in X \quad f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$.

Первая теорема Коши (теорема Больцано—Коши об обращении функции в ноль).

Если 1) $f \in C[a, b]$,

2) функция на концах отрезка принимает значения разных знаков (что иногда записывается как $f(a) \cdot f(b) < 0$),

то $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Словесная формулировка:

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то найдётся внутренняя точка отрезка, в которой функция обращается в ноль.

Вторая теорема Коши (теорема Больцано—Коши о промежуточных значениях непрерывной функции).

Если функция непрерывна на интервале и принимает в каких-то точках интервала значения A и B , то она принимает на этом интервале все значения, заключенные между A и B .

Замечание. Теорема верна для любого связного множества (промежутка) на прямой: для интервала, полуинтервала, отрезка, полупрямой и для самой прямой.

Замечание. Мы получили, что *функция, непрерывная на отрезке, имеет на этом отрезке наименьшее и наибольшее значения и принимает все промежуточные значения между ними.*

Таким образом, имеет место

Следствие из теорем Вейерштрасса и Больцано-Коши.

Множество значений непостоянной функции, непрерывной на отрезке, является отрезком.

Обобщения и уточнения теоремы Вейерштрасса о существовании предела монотонной последовательности на случай монотонной ограниченной функции.

Теорема 1.

Если функция f является монотонно неубывающей на интервале (a, b) и ограничена снизу на этом интервале,

то предел $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ существует и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x)$.

Теорема 2.

Если функция f является (строго) возрастающей на интервале (a, b) и ограничена снизу на этом интервале,

то 1) $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x)$;
2) $\forall x \in (a, b) f(x) > \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ (строго!).

Теорема 3.

Если функция f является монотонно неубывающей на интервале (a, b) и ограничена сверху на этом интервале,

то предел $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ существует и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$.

Теорема 4.

Если функция f является (строго) возрастающей на интервале (a, b) и ограничена сверху на этом интервале,

то 1) $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$;
2) $\forall x \in (a, b) f(x) < \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ (строго!).

Упражнение. Сформулируйте самостоятельно варианты теорем для убывающей и монотонно невозрастающей функций.

Следствие. *Функция, монотонная на промежутке, может иметь на этом промежутке точки разрыва только первого рода.*

Термин *промежуток* обозначает одно из множеств: интервал, полуинтервал, отрезок, полупрямая (с граничной точкой или без нее), прямая.

Обратная функция

Пусть функция $f(x)$ имеет область определения D_f и множество значений E_f , то есть $f: D_f \rightarrow E_f$. Пусть при этом функция f задаёт взаимно однозначное соответствие между элементами множеств D_f и E_f , то есть каждому $x \in D_f$ ставится в соответствие ровно одно значение $y = f(x) \in E_f$, и при этом каждое значение $y \in E_f$ функция f принимает ровно один раз. Тогда можно определить функцию $f^{-1}(y)$ с областью определения E_f и множеством значений D_f , ставящую в соответствие каждому элементу y множества E_f элемент x множества D_f такой, что $f(x) = y$.

Определение. Если функция $f: D_f \rightarrow E_f$ задаёт взаимно соответствие между множествами D_f и E_f , то функция $f^{-1}: E_f \rightarrow D_f$, задаваемая соотношением $f^{-1}(f(x)) = x$, называется *обратной* к функции $f(x)$.

Функции $f(x)$ и $f^{-1}(y)$ удовлетворяют соотношениям:

$$(\forall x \in D_f \quad f^{-1}(f(x)) = x) \quad \text{и} \quad (\forall y \in E_f \quad f(f^{-1}(y)) = y).$$

Таким образом, функции $f: D_f \rightarrow E_f$ и $f^{-1}: E_f \rightarrow D_f$ являются *взаимно обратными*.

Замечание. Как следует из определения, *функция, обратная к f , существует тогда и только тогда, когда f задаёт взаимно однозначное соответствие между областью определения D_f и множеством значений E_f .*

Достаточное условие существования обратной функции. *Если f строго монотонна на области определения, то существует функция, обратная к f .*

Замечание. Монотонность не является необходимым условием для существования обратной функции. Например, функция $f(x) = 1/x$ не является монотонной на области определения $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, однако к ней существует обратная функция $f^{-1}(y) = 1/y$. В самом деле, для любого $x \neq 0$ справедливо равенство $f^{-1}(f(x)) = 1: \frac{1}{x} = x$.

Пример 1. Проверьте, что функции $f(x) = e^x$ и $g(y) = \ln y$ взаимно обратны.

Пример 2. Функция $\arcsin y$ — это функция, обратная к функции $f(x)$ с областью определения $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и задаваемая формулой $f(x) = \sin x$:

$$x = \arcsin y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \sin x = y. \end{cases}$$

Областью определения функции $\arcsin u$, как и множеством значений функции $\sin x$, является отрезок $[-1, 1]$. Функция $\sin x$, по умолчанию определённая на всей числовой прямой, не имеет обратной, поскольку каждое значение она принимает бесконечно много раз. Обратная функция определяется для ограничения функции $\sin x$ на участок монотонности, на котором $\sin x$ принимает все свои возможные значения.

Упражнение. Сформулируйте определение функций $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsctg} x$.

Теорема о непрерывности обратной функции.

Если 1) $f \in C[a, b]$,

2) f возрастает на отрезке $[a, b]$,

то обратная к f функция определена, непрерывна и возрастает на отрезке $[f(a), f(b)]$.

Если 1) $f \in C[a, b]$,

2) f убывает на отрезке $[a, b]$,

то обратная к f функция определена, непрерывна и убывает на отрезке $[f(b), f(a)]$.

Замечание. Теорему о непрерывности обратной функции можно переформулировать для любого промежутка.

Например, сформулируем её для ограниченного интервала (a, b) .

Для этого введём обозначения:

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ и } f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

При этом выражения $f(a-0)$, $f(b+0)$ могут иметь как числовые значения, так и «значения» $+\infty$ или $-\infty$.

Упражнение. Приведите несколько примеров, когда различные варианты таких значений реализуются.

Теорема о непрерывности обратной функции для интервала.

Если 1) $f \in C(a, b)$,

2) f возрастает на (a, b) ,

то обратная к f функция определена, непрерывна и возрастает на промежутке $(f(a+0), f(b-0))$,

Если 1) $f \in C(a, b)$,

2) f убывает на интервале (a, b) ,

то обратная к f функция определена, непрерывна и убывает на промежутке $(f(b-0), f(a+0))$.

Вычисление пределов

Предел последовательности. «Шкала»

Можно выделить следующие «эталонные» классы бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей:

- Логарифмические и их степени: $a_n = \ln^k n$. Это бесконечно большая последовательность при $k > 0$ и бесконечно малая при $k < 0$.
- Степенные $b_n = n^k$. Это бесконечно большая последовательность при $k > 0$ и бесконечно малая при $k < 0$.
- Показательные (геометрические прогрессии): $c_n = q^n$. Это бесконечно большая последовательность при $|q| > 1$ и бесконечно малая при $|q| < 1$.
- Факториалы $n!$ — бесконечно большая последовательность.
- n^n — бесконечно большая последовательность.

Нестрого выражаясь, можно сказать, что последовательность из каждого следующего класса является «более сильной», она растёт или убывает быстрее последовательностей из предыдущих классов.

Точнее это означает следующее.

Отношение двух бесконечно больших последовательностей из разных классов стремится к нулю, если в знаменателе стоит «более сильная» последовательность, и к бесконечности, если «более сильная» стоит в числителе.

Отношение двух бесконечно малых последовательностей из разных классов стремится к нулю, если в числителе стоит «более сильная» последовательность, и к бесконечности, если «более сильная» стоит в знаменателе.

Произведение бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей из разных классов стремится к нулю или бесконечности в зависимости от того, куда стремится «более сильная».

Примеры, иллюстрирующие применение шкалы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt[10]{n}} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{20}}{1,01^n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!} = 0.$$

Теоретическое упражнение.

Обоснуйте пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

Замечание. Вся шкала для последовательностей обосновывается вместе со шкалой для функций.

«Главное слагаемое» или «Командира – вперед!»

Под «командиром» мы подразумеваем доминирующее по абсолютной величине слагаемое.

В примерах 1–3 и 5–8 раскрывается **неопределённость вида** $\frac{\infty}{\infty}$, то есть вычисляется предел отношения бесконечно больших.

Пример 1. Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 17n + 24}{4n^2 + 5n + \cos n}$. Выберем в каждом сомножителе (в данном примере, числителе и знаменателе) «командира» — слагаемое наибольшей степени — и вынесем его за скобку. При этом пренебрежем лишними деталями:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 17n + 24}{4n^2 + 5n + \cos n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2(1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})}{4n^2(1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})}{4 \cdot (1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Пренебрегая лишними деталями, мы заменили выражения $-\frac{17n}{3n^2}$, $\frac{\cos n}{4n^2}$ и некоторые другие сокращением *б.м.* (бесконечно малая). Знак перед символом *б.м.* не играет роли и не указывает на знак этой величины. Например, последовательность $\frac{\cos n}{4n^2}$ — знакопеременная. Поэтому можем писать *б.м.* с плюсом. При этом важно понимать, что $\text{б.м.} - \text{б.м.} = \text{б.м.}$, а не нулю, поскольку под сокращением *б.м.* скрываются совершенно различные последовательности.

Пример 1'.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 17n + 24}{4n^3 + 5n + \cos n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2(1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})}{4n^3(1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})}{4n \cdot (1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})} = 0. \end{aligned}$$

Пример 1''.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 17n + 24}{4n^2 + 5n + \cos n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3(1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})}{4n^2(1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n \cdot (1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})}{4 \cdot (1 + \text{б.м.} + \text{б.м.})} = +\infty. \end{aligned}$$

Замечание. Знак бесконечности в ответе, если это возможно, следует учитывать.

Пример 2.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2^{n+2} + 3^{n-1} + n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)}{3^{n-1} \left(8 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + 1 + \frac{n^3}{3^{n-1}} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n (\delta.м. - 1)}{3^{n-1} (\delta.м. + 1 + \delta.м.)} = -3.\end{aligned}$$

Пример 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 13^{2n} + \sin((n+2)!)}{((n-1)! + 4^{n-1}) \cdot (3n^2 - 14n + 15)}$. Здесь сомножителей три:

один — числитель и два в знаменателе. В каждом из них выберем «ко-

мандира»: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(1 + \delta.м. + \delta.м.)}{((n-1)!(1 + \delta.м.)) \cdot 3n^2(1 + \delta.м. + \delta.м.)}$. Учитывая, что

$$(n+1)! = (n-1)! \cdot n \cdot (n+1), \text{ имеем } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1)(1 + \delta.м.)}{3n^2(1 + \delta.м.)} = \frac{1}{3}.$$

Сведение неопределенности вида $\infty - \infty$ к $\frac{\infty}{\infty}$ (предела разности бесконечно больших к пределу отношения).

Пример 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 15} - n)$. Применим искусственный прием «до-множить и разделить на сопряжённое» и получим

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n - 15} - n)(\sqrt{n^2 + 3n - 15} + n)}{(\sqrt{n^2 + 3n - 15} + n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 15 - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n - 15} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (3 - 15/n)}{n \cdot (\sqrt{1 + 3/n - 15/n^2} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \delta.м.}{\sqrt{1 + \delta.м.} + 1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ниже мы решим аналогичный пример другим, более **рациональным и универсальным**, способом (**пример 22**).

Замечание. При вычислении пределов используются интуитивно понятные предельные переходы $\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{a}$ при $x \rightarrow a$, $\cos x \rightarrow \cos a$ при $x \rightarrow a$ и т.п. Эти переходы основаны на свойстве непрерывности элементарных функций, обсуждаемом впоследствии.

Упражнения.

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^2 + 3n^3 - 4}{4n^3 - n + 10}$$

$$1.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 + n^3 - 14}{4n^2 - 3n^4 + 1}$$

$$1.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 4^{n-1}}{4^{n+1} - 3^{n+2}}$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sin(n^3 - 1) - 4n^2}{11 \cdot (4n - n^3)}$$

$$1.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 2n^2 - 2n^4}{\cos n - 3n^4 - 3n^2}$$

$$1.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n-1)! - 2(n!) + \cos n) \cdot 3^{n+1}}{(2 \cdot 3^n - n!) \cdot 3^n}$$

$$1.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n! + \ln(n+2)}{\sqrt[3]{2n+3}}$$

$$1.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^5 + 2n)}{\ln(4n^3 + 2)}$$

$$1.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(n^5 + 2n)}{\ln^2(4n^3 + 2)}$$

$$1.19. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - 9n + 3} - \sqrt{4n^2 + 3n})$$

$$1.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 2n - 4}{4n^2 - n + 100}$$

$$1.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 5^{n+1} - 5 \cdot 4^{n-1}}{3^n - 2 \cdot 5^{n+2}}$$

$$1.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n-1} - 4 \cdot 2^{n+1}}{2^n + 5 \cdot 3^{2n+1}}$$

$$1.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 4n \sin n! + n^2}{4n - 9n^3}$$

$$1.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+2)! - 5^n - 1)}{(5 - 7n^2) \cdot n!}$$

$$1.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^5 + 2n)}{3n + \sqrt{2n+3}}$$

$$1.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n^3 + 4}{\ln(4n^3 + 2)}$$

$$1.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(n^5 + 2n)}{\ln^3(4n^3 + 2)}$$

$$1.18. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 7n - 3} - \sqrt{n^2 + 2n})$$

$$1.20. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8n^3 - 9n + 3} - \sqrt{4n^2 + 3n})$$

Предел функции при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. «Шкала».

Можно выделить следующие «эталонные» классы бесконечно больших и бесконечно малых при $x \rightarrow +\infty$ функций:

- Логарифмические и их степени: $f(x) = \ln^k x$. Это бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$ функция, если $k > 0$, и бесконечно малая при $k < 0$.
- Степенные: $g(x) = x^k$. Это тоже бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$ функция, если $k > 0$, и бесконечно малая при $k < 0$. То же самое справедливо при $x \rightarrow -\infty$, если функция определена при отрицательных аргументах.
- Показательные: $h(x) = a^x$. При $x \rightarrow +\infty$ это бесконечно большая функция, если $a > 1$, и бесконечно малая, если $0 < a < 1$. При $x \rightarrow -\infty$, наоборот, это бесконечно большая функция, если $0 < a < 1$, и бесконечно малая, если $a > 1$ (вспомните графики показательных функций!).

Аналогично случаю последовательностей, можно сказать, что функция из каждого следующего класса является «более сильной», она растет или убывает быстрее функций из предыдущих классов.

Точнее это означает следующее.

Отношение двух бесконечно больших функций из разных классов стремится к нулю, если в знаменателе стоит «более сильная» последовательность, и к бесконечности, если «более сильная» стоит в числителе.

Отношение двух бесконечно малых функций из разных классов стремится к нулю, если в числителе стоит «более сильная» последовательность, и к бесконечности, если «более сильная» стоит в знаменателе.

Произведение бесконечно большой и бесконечно малой функций из разных классов стремится к нулю или бесконечности в зависимости от того, куда стремится «более сильная».

Опорные примеры, демонстрирующие применение шкалы.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[10]{x}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{20}}{1,01^x} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^x = 0 \text{ при любом постоянном } k.$$

«Командира – вперед!»

Пример 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 21x + 24}{4x^3 + 51x + \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2(1 + o(1))}{4x^3(1 + o(1))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x} = 0.$

Пример 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2^{x+1}}{4x^2 + 2^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2^{x+1}(1 + o(1))}{2^{x-1}(1 + o(1))} = -4.$

Пример 7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 2^{x+1}}{4x^2 + 2^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2(1 + o(1))}{4x^2(1 + o(1))} = \frac{5}{4}.$

Комментарий к примерам 6 и 7: при $x \rightarrow +\infty$ функция 2^x является бесконечно большой, «более сильной», чем x^2 . При $x \rightarrow -\infty$ функция 2^x является бесконечно малой, и «командиром» в примере 7 становится x^2 .

Пример 8.
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x^4 + 23)}{\ln(7x^3 - 3)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x^4(1 + o(1)))}{\ln(7x^3(1 + o(1)))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x + \ln 3 + \ln(1 + o(1))}{3 \ln x + \ln 7 + \ln(1 + o(1))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x \cdot (1 + o(1))}{3 \ln x \cdot (1 + o(1))} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Здесь мы пользуемся тем, что $\ln x$ – бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 9.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 3x + 1}}{\sqrt[3]{-8x^3 - 5x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x| \cdot \sqrt{1 + б.м.}}{-2x \cdot \sqrt[3]{1 + б.м.}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x \cdot \sqrt{1 + б.м.}}{-2x \cdot \sqrt[3]{1 + б.м.}} = \frac{3}{2}$$

Комментарий : при извлечении корня чётной степени не следует забывать про модуль.

Упражнения.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 3e^{2x} - e^{-3x} + \sin x}{-2x^3 - 3e^{-3x} - 4e^{2x}}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} \sin \frac{1}{x} + 3x^{12}}{4e^x - 3e^{2x}}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^6 + x) \ln(1 - 3x)}{e^{-x}}$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 3e^{2x} - e^{-3x} + \sin x}{-2x^3 - 3e^{-3x} - 4e^{2x}}$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^{-2} + 6e^x - 5e^{2x}}{-3e^{2x} - 4e^x + 3x^{-2}}$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 1}}{\sqrt[5]{-32x^5 - 5x^4 - \cos x}}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 1}}{\sqrt[5]{-32x^5 - 5x^4 - \cos x}}$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{5x^3 - 3x^5}}{\sqrt[4]{16x^4 - 2x^3 + \sin^2 x}}$$

Предел функции при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow -0$. «Шкала»

Можно выделить следующие «эталонные» классы бесконечно больших и бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ функций:

- Логарифмические и их степени: $f(x) = \ln^k x$. Это бесконечно большая при $x \rightarrow +0$ функция, если $k > 0$, и бесконечно малая при $k < 0$.
- Степенные: $g(x) = x^k$. Это также бесконечно малая при $x \rightarrow +0$ функция, если $k > 0$, и бесконечно большая при $k < 0$. То же самое справедливо при $x \rightarrow -0$, если функция определена при отрицательных аргументах.
- Показательные функции вида a^x не являются при $x \rightarrow 0$ ни бесконечно большими, ни бесконечно малыми, поэтому в шкалу имеет смысл включить только функции вида a^{1/x^k} . Например, $2^{1/x^2}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$, e^{-1/x^2} и $e^{-1/\sqrt{|x|}}$ — бесконечно малые при $x \rightarrow 0$. Функция $e^{-1/x}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +0$ и бесконечно большой при $x \rightarrow -0$. (Обоснуйте эти утверждения.)

Аналогично можно сказать, что функция из каждого следующего класса является «более сильной», она растёт или убывает быстрее функций из предыдущих классов.

Эти факты легко устанавливаются с помощью следующего приёма.

Замена переменных, или переход к пределу в сложной функции.

Пример 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{e^{\sqrt{n}}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{n} = t, \\ n \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{20}}{e^t} = 0.$

Опорные примеры, иллюстрирующие применение шкалы.

$$3.1. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x = 0 \qquad 3.2. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-1/\sqrt{x}}}{x^{10}} = 0 \qquad 3.3. \lim_{x \rightarrow -0} x^{100} e^{-1/x} = +\infty$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^x = 0 \qquad 3.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

В последних двух примерах неопределённости нет, так как $e^x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$.

Раскрытие неопределённости вида $\frac{0}{0}$

(вычисление предела отношения бесконечно малых).

Пример 11. «Командира — вперед!».

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{14x^5 - 27x^3}}{4x^3 + 51x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{-27x^3 \cdot (1 + \delta.м.)}}{51x \cdot (1 + (4/51)x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \cdot \sqrt[3]{1 + \delta.м.}}{51x \cdot (1 + \delta.м.)} = \\ &= -\frac{3}{51} = -\frac{1}{17}. \end{aligned}$$

Комментарий. Среди бесконечно малых функций «командиром», т.е. наибольшей по абсолютной величине в некоторой окрестности нуля, является «наиболее слабая», медленнее других стремящаяся к нулю функция.

Пример 12.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 + 5x - 24} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3) \cdot (\sqrt{x+6} + 3)}{(x^2 + 5x - 24) \cdot (\sqrt{x+6} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+6-9)}{(x-3)(x+8)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+8)(\sqrt{x+6} + 3)} = \frac{1}{66}. \end{aligned}$$

Упражнения.

4.1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+6} - 2}$

4.2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+11} - 3}{x^2 + x - 2}$

4.3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$

4.4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 7}{1 - x^2}$

4.5. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - x - x^2}{x^3 - 2x + 21}$

4.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3x - 5}$

4.7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3x - 5}$

4.8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3x - 5}$

«Первый замечательный» предел и его следствия**Теорема** (о первом замечательном пределе.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Опорные задачи.

5.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

5.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

5.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

5.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

5.5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

5.6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

5.7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$

5.8. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}$

Проинтерпретируйте результаты в последних четырёх примерах.

«Второй замечательный» предел и его следствия**Теорема 1.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ существует.**Определение.** $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ **Теорема 2** (второй замечательный предел).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Пример 13.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{3n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{-3n-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2} \left((-3n-1) \cdot \frac{2}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \right)^{(-3n-1) \cdot \frac{2}{n}} = e^{-6}.\end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали тот факт, что $\left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n/2} \rightarrow e$, а $(-3n-1) \cdot \frac{2}{n} \rightarrow -6$.

Аналогичный пример ниже мы решим **другим, более рациональным** способом (см. **примеры 18–20**).

Упражнения.

$$6.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n} \qquad 6.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n-2} \right)^{\frac{3n-4}{5}}$$

$$6.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n-2} \right)^{\frac{3-7n}{5}} \qquad 6.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n-1} \right)^{\frac{5n-2}{3}}$$

Теоретические упражнения.

Докажите, что

$$7.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad 7.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad 7.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

Вычислите и проинтерпретируйте результат.

$$7.4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \qquad 7.5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} \qquad 7.6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

Простейшие эквивалентности и символ o -малое.

Определения и простейшие свойства см. на стр. 30

Простейшие эквивалентности.

При $t \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{ll}\sin t \sim t & \Leftrightarrow \sin t = t + o(t); \\ \ln(1+t) \sim t & \Leftrightarrow \ln(1+t) = t + o(t); \\ e^t - 1 \sim t & \Leftrightarrow e^t = 1 + t + o(t); \\ 1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2} & \Leftrightarrow \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2);\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\arcsin t \sim t & \Leftrightarrow \arcsin t = t + o(t); \\
\operatorname{tg} t \sim t & \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = t + o(t); \\
\operatorname{arctg} t \sim t & \Leftrightarrow \operatorname{arctg} t = t + o(t); \\
\text{при } p \neq 0 \quad (1+t)^p - 1 \sim pt & \Leftrightarrow (1+t)^p = 1 + pt + o(t).
\end{array}$$

Замечание. Равенство $(1+t)^p = 1 + pt + o(t)$ верно и при $p=0$.

При $z \rightarrow 1$

$$\ln z \sim z - 1 \quad \Leftrightarrow \ln z = z - 1 + o(z - 1).$$

Замечание. В таблице простейших эквивалентностей для аргумента введено обозначение t , поскольку замена на эквивалентную часто применяется в сложных функциях. Например, при рассмотрении выражения $\sin(x^2 - 4)$ при $x \rightarrow 2$ важно, что к нулю стремится выражение $t = x^2 - 4$, стоящее под знаком синуса. Таким образом, $\sin(x^2 - 4) \sim x^2 - 4$ при $x \rightarrow 2$. Аналогично, $\sin(1/x) \sim 1/x$ при $x \rightarrow \infty$.

Теоретическое упражнение. Обоснуйте приведенные эквивалентности, исходя из соответствующих пределов.

Пример 14. Найдите C и n , определяемые соотношением

$$3\operatorname{tg}^3(e^{2x^2} - 1) \sim Cx^n \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Решение. При $x \rightarrow 0$

$$3\operatorname{tg}^3(e^{2x^2} - 1) = 3\left(\operatorname{tg}(e^{2x^2} - 1)\right)^3 \sim 3(e^{2x^2} - 1)^3 \sim 3 \cdot (2x^2)^3 = 24x^6.$$

Значит, $C = 24$, $n = 6$.

Пример 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \{ \sin 5x \sim 5x \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5.$

Пример 16. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^2 - n) \cdot \operatorname{arctg} \frac{3n - 2}{2n^3 + 4} =$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{aligned} -2n^2 - n &= -2n^2(1 + o(1)) \sim -2n^2 \\ \frac{3n - 2}{2n^3 + 4} &\rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{3n - 2}{2n^3 + 4} \sim \frac{3n - 2}{2n^3 + 4} = \frac{3n(1 + o(1))}{2n^3(1 + o(1))} \sim \frac{3}{2n^2} \end{aligned} \right\} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^2) \cdot \frac{3}{2n^2} = -3.
\end{aligned}$$

Пример 17. В сумме слагаемые нельзя заменять на эквивалентные, поэтому используем разложение с $o(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 4x - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{4x + o(x) - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x(1 + o(1))} = 5.$$

Раскрытие неопределенностей вида 0^0 , ∞^0 и 1^∞ ,

то есть $(б.м.)^{б.м.}$, $(б.б.)^{б.м.}$ и $(1 + б.м.)^{б.б.}$.

Исследование неопределенности указанного вида сводится к исследованию неопределенности вида $0 \cdot \infty$ с помощью преобразования

$$\lim_{x \rightarrow ?} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow ?} \exp(v(x) \ln u(x)) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow ?} (v(x) \cdot \ln u(x))\right)$$

(примеры 18 – 21).

Обозначение. $\exp(t) = e^t$.

Пример 18.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (\cos x)^{1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{(1/x^2) \ln \cos x} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} \ln \cos x\right) = \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} (\cos x - 1)\right) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) = e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Пример 19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^{1/\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x+1)\right) = e,$

так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1.$

Пример 20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{\frac{3x^2+2}{x}} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2}{x} \cdot \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)\right) =$

$$= \left\{ \frac{x-1}{x+3} \rightarrow 1 \Rightarrow \ln \frac{x-1}{x+3} \sim \frac{x-1}{x+3} - 1 = \frac{-4}{x+3} \sim \frac{-4}{x} \right\} =$$

$$= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2}{x} \cdot \frac{-4}{x}\right) = e^{-12}.$$

Пример 21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^{\frac{3x+2}{2x}} = (1/2)^{3/2}.$ В этом примере нет неопределенности.

Пример 22. Вычислите $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - 6x^2} + \sqrt{4x^2 + 4x - 17}\right).$

Преобразуем слагаемые: при $x \rightarrow -\infty$

$$\text{а) } \sqrt[3]{8x^3 - 6x^2} = 2x \left(1 - \frac{3}{4x} \right)^{1/3} = 2x \left(1 - \frac{1}{4x} + o(1/x) \right) = 2x - 1/2 + o(1);$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{4x^2 + 4x - 17} &= |2x| \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + o(1/x) \right)^{1/2} = \\ &= (-2x) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + o(1/x) \right) + o \left(\frac{1}{x} + o(1/x) \right) \right) = \\ &= (-2x) \left(1 + \frac{1}{2x} + o(1/x) \right) = -2x - 1 + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1/2 + o(1) + (-2x - 1 + o(1))) = -3/2$.

Упражнения.

8.1. Дано: $\sin \left(\sqrt[3]{1 - 5 \operatorname{tg}^2 3x} - 1 \right) \sim Cx^n$ при $x \rightarrow 0$. Найдите C и n .

8.2. Дано: $\sin^3 (5^{4x^2} - 1) \sim Cx^n$ при $x \rightarrow 0$. Найдите C и n .

8.3. Для каждой из следующих функций определите, какие из приведенных ниже утверждений являются верными.

Функции:

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $f(x) = x^2 + x^4$ | 2) $f(x) = x^2 + \sin x^4$ | 3) $f(x) = x^2 + \cos x^4$ |
| 4) $f(x) = x \cdot (e^{-1/x^2} - 1)$ | 5) $f(x) = x \cdot e^{-1/x^2}$ | 6) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$ |
| 7) $f(x) = \ln x^2$ | 8) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ | |

Утверждения:

- | | |
|--|--|
| а) $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow 0$ | б) $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$ |
| в) $f(x) = o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$ | г) $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ |
| д) $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow +\infty$ | е) $f(x) = o(x^3)$ при $x \rightarrow +\infty$ |
| ж) $f(x) \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$ | з) $f(x) \sim x^4$ при $x \rightarrow 0$ |
| и) $f(x) \sim x^2$ при $x \rightarrow +\infty$ | к) $f(x) \sim x^4$ при $x \rightarrow +\infty$ |

8.4. Для функций из предыдущего упражнения найдите константы C и n , если таковые существуют, при которых выполнены условия:

- | | |
|---|---|
| а) $f(x) \sim Cx^n$ при $x \rightarrow 0$ | б) $f(x) \sim Cx^n$ при $x \rightarrow +\infty$ |
|---|---|

8.5. Дано: $\sqrt[3]{8x^3 + 15x^2} = ax + b + o(1)$ при $x \rightarrow \infty$. Найдите a и b .

$$8.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sin 4x - 3x}$$

$$8.7. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - 5\sqrt{x})}{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}$$

$$8.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + 4x} - 6x}{4x}$$

$$8.9. \lim_{n \rightarrow \infty} (3n + 4) \cdot \operatorname{tg} \frac{5n^2 - n}{7n^3 + 4n}$$

$$8.10. \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^2 - n) \cdot \operatorname{arctg} \frac{3n-2}{2n^3+4}$$

$$8.11. \lim_{x \rightarrow +0} \ln(1-2x) \left(\ln^5 2x - \frac{1}{\ln(1-4x)} \right)$$

$$8.13. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/\ln x}$$

$$8.15. \lim_{x \rightarrow +0} x^{1/\ln x}$$

$$8.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{2x+4} \right)^{\frac{3x+2}{5x}}$$

$$8.19. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{3}{x} \right)^{1/\ln(5 \sin 2x)}$$

$$8.21. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+1)^{\frac{3}{5-4 \ln x}}$$

$$8.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} - \sin 4x)}{\operatorname{tg}(\sin 7x)}$$

$$8.25. \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-6x) \cdot (x^{-4} + x)$$

$$8.12. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$$

$$8.14. \lim_{x \rightarrow +0} x^x$$

$$8.16. \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$$

$$8.18. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$$

$$8.20. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{6}{\sin 3x} \right)^{\frac{5}{2 \ln 4x+1}}$$

$$8.22. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{2^x - \frac{1}{4}}$$

$$8.24. \lim_{x \rightarrow +0} \sin 4x \cdot \left(\ln^2 2x - \frac{5}{e^{2x}-1} \right)$$

$$8.26. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \sqrt[3]{3x}}{\sin(2\sqrt[4]{x} - 4x)}$$

Основные формулы Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

При $x \rightarrow 0$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^p = 1 + \frac{p}{1}x + \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2}x^2 + \dots + \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{p-n+1}{n}x^n + o(x^n)$$

Замечание. Обратите внимание на степень остаточного члена в формулах для $\sin x$ и $\cos x$. Например, в разложении синуса мы можем считать, что приведено разложение не до степени $2n+1$, а учтено слагаемое сте-

пени $2n+2$, поскольку коэффициенты при чётных степенях — нулевые. Аналогичные рассуждения применимы и к разложению косинуса.

Теоретическое упражнение*. Докажите, что при $x \rightarrow 0$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

(поделите столбиком разложение синуса на разложение косинуса).

Пример 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x) - 6x}{\arcsin x \cdot \operatorname{tg} 4x}$. Заменяя сомножители знаменателя на эквивалентные, получим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x) - 6x}{4x^2}$, следовательно, числитель нужно раскладывать с точностью до $o(x^2)$.

$$\ln(1+6x) - 6x = 6x - \frac{1}{2} \cdot (6x)^2 + o(x^2) - 6x = -18x^2 + o(x^2). \text{ Отсюда}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x) - 6x}{\arcsin x \cdot \operatorname{tg} 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-18x^2 + o(x^2)}{4x^2} = -\frac{9}{2}.$$

Упражнения.

9.1. Для каждой из следующих функций определите, какие из приведённых ниже утверждений являются верными.

Утверждения:

- | | |
|--|--|
| а) $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow 0$ | б) $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$ |
| в) $f(x) = o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$ | г) $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ |
| д) $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow +\infty$ | е) $f(x) = o(x^3)$ при $x \rightarrow +\infty$ |

Функции:

- | | | |
|--|---|--------------------------|
| 1) $f(x) = \sin x^2 - x^2$ | 2) $f(x) = \sin x - x$ | 3) $f(x) = \ln(1+x) - x$ |
| 4) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$ | 5) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x - x$ | 6) $f(x) = \sin x - x$ |
| 7) $f(x) = \sin x - x$ | 8) $f(x) = \sin x - x$ | 9) $f(x) = x^2 + x^4$ |

9.2. Для каждой из функций из предыдущего упражнения найдите константы C и n , при которых выполнены условия

- | | |
|---|---|
| ж) $f(x) \sim Cx^n$ при $x \rightarrow 0$ | з) $f(x) \sim Cx^n$ при $x \rightarrow +\infty$ |
|---|---|

9.3. Дано: $(2x^2 + 3x) \left(\cos \frac{3}{\sqrt{2x}} - 1 \right) = ax + b + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Найдите a и b .

9.4. Найдите константы a, b, c , определяемые равенством:

а) $(3x^3 - 3x^2) \cdot \left(\ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) - \frac{2}{x} \right) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$.

б) $(2x^2 + 4x) \cdot (e^{-3/x} - 1) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$.

Вычислите пределы, используя формулы Маклорена и не используя правила Лопиталя.

9.5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x} \cdot e^{\frac{1}{2x}} - 2x - \frac{3}{2}}{\sin \frac{1}{x}}$

9.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

9.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^{2x^2} - 1} + \frac{1}{\cos 2x - 1} \right)$

9.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} \cos 2x - 1}{\ln(\cos 3x^2)}$

9.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{tg} x^4 - 3x^5}{\ln(1 + 2x^2) + \cos 2x - 1}$

9.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2x^2} \right)^{\frac{2}{3x^2}}$

9.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^{2x^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 6x^2} - 1} \right)$

9.12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 6x} - e^{2x}}{\arcsin x^2}$

10. Разные пределы.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{1}{n}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \cos \frac{1}{n}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin x}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} x \cdot (\ln(x+1) - \ln x)$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\ln(x+1) - \ln x)$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \sin 2x}{7 \sin x - 5x}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 2x}{7 \sin x - 5x}$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - 5n + 1} - \sqrt{4n^2 + n})$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 3) \cdot \sin \frac{7n - 2}{3n^2 - 4n + 5}$

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 3) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n + 2}$

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x \right)$

15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{3 - x}$

16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x)}{\ln(2x - 1)}$

17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x-2)}{\sin(x^2-1)}$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3-x} + 5x^2 + 1}{3x^2 - 2^{1-x}}$
19. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3x - \sin 2x}{6\sin x - 5x}$
20. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{3x - \sin 2x}{\pi \sin x - 5x}$
21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - \sin 2x}{6\sin x - 5x}$
22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x^3 \cdot \ln^3 x}{x}$
23. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos^2 x - \cos^2 3}{x - 3}$
24. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{tg^2 x - tg^2 4}{x - 4}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) + e^{-2x} - 1}{x^3}$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+6x} - e^{2x}}{\cos 2x \cdot \arcsin x^2}$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x) - 6x}{\arcsin x \cdot (3^x - 1)}$
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1 + 8x^2}{(2^x - 1) \cdot tg(2x^3)}$
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+12x) - 12x}{\arcsin x \cdot (e^{9x} - 1)}$
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-6x} - e^{-3x}}{\cos 2x \cdot \operatorname{arctg} x^2}$
31. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln^2 x}{x}$
32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x \cdot \ln^2 x}{x}$
33. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3x - 5}$
34. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3x - 5}$
35. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3x - 5}$
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - e^{2x}}{\cos x \cdot \arcsin x^2}$
37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1 + 8x^2}{\sin^2 x \cdot tg(2x^2)}$
38. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{2-x} + 3x^2}{5x^4 - 3^{1-x}}$
39. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3-x} + 5x^2 + 1}{3x^2 - 2^{1-x}}$
40. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{3-x} + 5x^2 + 1}{3x^2 - 2^{1-x}}$
41. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(3x))^{4/x^2}$
42. $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{(2/\ln x)}$
43. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x+3}{9-x} \right)^{3/(4-2x)}$
44. $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{3x+3}{x-3} \right)^{5/(6+2x)}$
45. $\lim_{x \rightarrow 2+0} \left(\frac{2x+3}{7-x} \right)^{5/(4-2x)}$
46. $\lim_{x \rightarrow -2-0} \left(\frac{5-2x}{x+9} \right)^{3/(4+2x)}$
47. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x)^{3/x}$
48. $\lim_{x \rightarrow -0} (e^x + \sin x + 1)^{3/x}$
49. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1)^{3/x}$
50. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3+2x)^{\frac{2}{3\ln x - 2}}$

- $$51. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln(3x^3 + 5e^{-3x}) + \frac{9x-5}{3} \right)$$
- $$52. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln(4x + 3e^{-4x}) + \frac{16x+5}{4} \right)$$
- $$53. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \ln(1+4x) - \sin 4x}{x^3}$$
- $$54. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} \cdot \cos(6\sqrt{2} \cdot x) - \sqrt{1+12x}}{\arctg x^3}$$
- $$55. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x) - 6x + 18x^2}{\arcsin^2 x \cdot \operatorname{tg} 4x}$$
- $$56. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$
- $$57. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{3-x} - x^2 + 8}{2x^2 - 2^{1+x} - 2}$$
- $$58. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3-x} + 5x^2 - 8}{2 + 3x^2 - 2^{1-x}}$$

Дополнительные задачи для подготовки к контрольной № 1

1. Нарисуйте графики, на которых будут отражены следующие свойства функций:

- 1.1. $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$,
 $f(x) = 2 + o(x-1)$ при $x \rightarrow 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
- 1.2. $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow -\infty$,
 $f(x) = -x + o(x+1)$ при $x \rightarrow -1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$
- 1.3. $f(x) = -|x| + 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$,
 $f(x) = 1 + o(x-2)$ при $x \rightarrow 2$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 2 + 0$
- 1.4. $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$,
 $f(x) = o(x+1)$ при $x \rightarrow -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 - 0$
- 1.5. $f(x) = -x - 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$,
 $f(x) = (x-1) + o(x-1)$ при $x \rightarrow 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
- 1.6. $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \rightarrow -\infty$,
 $f(x) = -x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$
- 1.7. $f(x) = |x-1| + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$,
 $f(x) = -x + o(x+1)$ при $x \rightarrow -1$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$
- 1.8. $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$,
 $f(x) = x + o(x-1)$ при $x \rightarrow 1$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +0$
- 1.9. $f(x) = -\frac{x}{2} - 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow -\infty$,
 $f(x) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ при $x \rightarrow +0$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

$$1.10. f(x) = |x| - 1 + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

$$f(x) = -1 + o(x+1) \text{ при } x \rightarrow -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1 + 0$$

$$1.11. f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

$$f(x) \sim \sqrt[3]{x-1} \text{ при } x \rightarrow 1,$$

$$f(x) = o(x) \text{ при } x \rightarrow +0$$

$$1.12. f(x) = x + 1 + o(1) \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

$$f(x) = o(-1) \text{ при } x \rightarrow 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} > 0$$

$$1.13. f(x) = 1 - o(1) \text{ при } x \rightarrow -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x-1} = -1,$$

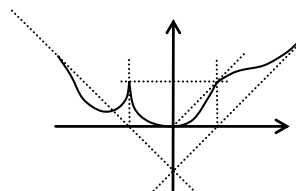
$$f(x) \sim x-1 \text{ при } x \rightarrow 1$$

$$1.14. f(x) = -\frac{x}{2} + 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

$$f(x) = \sqrt{x} + o(x) \text{ при } x \rightarrow +0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

2. В следующих задачах по графику определите указанные пределы. В случае бесконечного предела, если это возможно, следует указать знак бесконечности. В случае конечного предела, если это возможно, следует указать на стремление к пределу сверху или снизу, то есть привести ответ в виде $A-0$ или $A+0$. Все обозначенные точки на осях соответствуют либо 1, либо -1 .



$$2.1. \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x)$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow -0} f(x)$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x+1}$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-1}{x-1}$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-1}{x-1}$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} \text{ без указания сверху-снизу}$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x)-1}{x-1}$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x)-1}{x-1}$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$$

Теоретические вопросы и задачи по разделу «Пределы и непрерывность»

1. Упражнения с кванторами

- а) Для каждой пары «высказывание — последовательность» определите, верно ли высказывание по отношению к последовательности. Результаты занесите в таблицу вида

	п1	...	п18
в1		...	
...		...	
в17		...	

В клетку поставьте «плюс», если высказывание верно, и «минус», если оно неверно.

- б) Попробуйте сформулировать в других терминах, что означает каждое из высказываний.

Высказывания

$$(в1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 : |a_n| > \varepsilon$$

$$(в2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 : |a_n| < \varepsilon$$

$$(в3) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall n_0, \forall n \geq n_0 \quad |a_n| > \varepsilon$$

$$(в4) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \exists n \geq n_0 : |a_n| > \varepsilon$$

$$(в5) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \exists n \geq n_0 : |a_n| < \varepsilon$$

$$(в6) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |a_n| > \varepsilon$$

$$(в7) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |a_n| < \varepsilon$$

$$(в8) \quad \exists \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |a_n| > \varepsilon$$

$$(в9) \quad \exists \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - 1| < \varepsilon$$

$$(в10) \quad \exists \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - 1| > \varepsilon$$

$$(в11) \quad \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 : |a_n| < \varepsilon$$

$$(в12) \quad \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n| < \varepsilon$$

$$(в13) \quad \forall A \in \mathbf{R} \quad \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0, \forall n \geq n_0 \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

$$(в14) \quad \forall A \in \mathbf{R} \quad \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

$$(в15) \quad \forall A \in \mathbf{R} \quad \exists \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

$$(в16) \quad \exists A \in \mathbf{R} : \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$$

$$(в17) \quad \exists A \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

Последовательности

(п1) $a_n = (-1)^n$

(п2) $a_n = n + 2(-1)^n n$

(п3) $a_n = \sin n$

(п4) $a_n = n \cdot \sin \frac{1}{n}$

(п5) $a_n = \sqrt{n} + \sin n$

(п6) $a_n = 1 + (-2)^n$

(п7) $a_n = n \cdot (-1)^n$

(п8) $a_n = n^2 \cdot \sin \frac{\pi}{n}$

(п9) $a_n = n \cos \frac{\pi n}{2}$

(п10) $a_n = 1 + (-1)^n$

(п11) $a_n = \cos \frac{\pi n}{2}$

(п12) $a_n = n + \frac{(-1)^n}{n+1}$

(п13) $a_n = 2n + (-1)^n n$

(п14) $a_n = n^{(-1)^n}$

(п15) $a_n = (-1)^n / n$

(п16) $a_n = (1 + (-1)^n) n$

(п17) $a_n = \frac{\sin n}{n}$

(п18) $a_n = n^{10} / 2^n$

- Приведите пример последовательности, имеющей ровно одну предельную точку и не имеющей предела.
- Приведите пример последовательности, имеющей бесконечно много предельных точек.
- Приведите пример последовательности, имеющей ровно три предельные точки.
- Приведите пример ограниченной последовательности, не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего элемента.
- Приведите пример немонотонной последовательности, сходящейся к нулю справа.
- Приведите пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что при любом $p > 0$ выполнено $a_n = o(n^{-p})$ и при этом $(n!)^{-1} = o(a_n)$.
- Приведите пример неограниченной последовательности, имеющей предельную точку.
- Приведите пример неограниченной последовательности, имеющей ровно две предельные точки.
- Приведите пример последовательности, имеющей две предельные точки, и при этом такой, что множество $\{a_n\}$ не имеет ни нижней грани, ни верхней грани.
- Может ли последовательность, не имеющая наибольшего элемента, иметь предел? Ответ обоснуйте.
- Может ли последовательность, не имеющая наименьшего элемента, иметь предел? Ответ обоснуйте.
- Покажите, что если положительная последовательность, начиная с некоторого номера, убывает, то она имеет наибольший элемент.

14. Покажите, что последовательность $a_n = n^k q^n$ при $0 < q < 1$, $k = \text{const}$, убывает, начиная с некоторого номера.
15. Покажите, что последовательность $x_n = \frac{a^n}{n!}$ ($a > 0$) убывает, начиная с некоторого номера.
16. Докажите, что если последовательность не содержит бесконечно большую подпоследовательность, то она ограничена.
17. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет ровно две предельные точки, а последовательность $\{y_n\}$ сходится. Докажите, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет ровно две предельные точки. Что можно сказать о предельных точках последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$? Ответ полностью обоснуйте.
18. Из приведённых ниже укажите последовательности, которые
 - а. являются бесконечно малыми;
 - б. являются бесконечно большими;
 - в. имеют предельную точку и не ограничены;
 - г. имеют несколько предельных точек;
 - д. имеют монотонную подпоследовательность:
 - 1) $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n - 1$
 - 2) $a_n = \sin \frac{\pi n}{2}$
 - 3) $a_n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2}$
 - 4) $a_n = n \cdot \ln \frac{n+1}{n-1}$
 - 5) $a_n = n \cdot \arccot(1/n)$
 - 6) $a_n = n + (-1)^n \cdot n$
 - 7) $a_n = n^2 (e^{1/n} - 1)$
 - 8) $a_n = 3^{(-1)^n \cdot n}$
 - 9) $a_n = n^2 \cdot \sin(3^{-n})$
 - 10) $a_n = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$
 - 11) $a_n = n^{1/n} + (-1)^n$
 - 12) $a_n = \frac{\sin n!}{2^n}$
 - 13) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$
 - 14) $a_n = n^2 \cdot \ln \frac{n+1}{n}$
19. **Может ли последовательность иметь предел, если она не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента? Ответ обоснуйте.
20. **Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет ровно две предельные точки. Сколько предельных точек может иметь последовательность $\{\cos(x_n)\}$? Дайте наиболее полный и обоснованный ответ.
21. **Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет ровно две предельные точки. Сколько предельных точек может иметь последовательность $\{e^{x_n}\}$?
22. **Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет ровно три предельные точки. Сколько предельных точек может иметь последовательность $\{\cos(x_n)\}$?

23. Покажите с помощью неравенств, что $\sin x - \sin a$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
24. Покажите с помощью неравенств, что $\cos x - \cos a$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
25. Приведите пример функции, разрывной во всех точках отрезка.
26. Приведите пример двух разрывных во всех точках отрезка функций, сумма которых непрерывна.
27. Приведите пример функции, определённой на всей числовой прямой и непрерывной ровно в одной точке.
28. Приведите пример функции, определённой на всей числовой прямой и непрерывной ровно в двух точках.
29. Приведите пример функции, определённой на отрезке и не являющейся ограниченной на этом отрезке.
30. Приведите пример функции, определённой на отрезке, ограниченной на этом отрезке и не имеющей на нём наибольшего значения.
31. Приведите пример функции, определённой на отрезке и не имеющей на этом отрезке наименьшего значения.
32. Приведите пример функции, определённой на отрезке и принимающей на этом отрезке все действительные значения.
33. Приведите пример функции, определённой на отрезке и принимающей на этом отрезке не все промежуточные значения.
34. Приведите пример разрывной и непрерывной в одной и той же точке функций, произведение которых непрерывно.
35. Покажите, что функция $f(x) = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}$ имеет устранимый разрыв.
36. Определите характер точки разрыва функции $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Ответ обоснуйте.
37. Определите характер точки разрыва функции $f(x) = (1 + x)^{1/x}$.
38. Как доопределить функцию $f(x) = (1 + x)^{1/x}$, чтобы она стала непрерывной в нуле? Ответ обоснуйте.
39. Найдите все точки разрыва (и докажите, что других нет) функции $f(x) = \frac{\frac{\sin x}{x} - a}{x^2}$. Определите характер точки разрыва при различных значениях параметра a .
40. Сформулируйте в позитивной форме утверждение о том, что функция не является непрерывной на интервале (a, b) .
41. Приведите пример функции, непрерывной в точке $x = a$ и не являющейся непрерывной в любой окрестности этой точки.

42. Из приведённых ниже укажите функции, которые

- являются бесконечно малыми при $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow -0$, $x \rightarrow 0$ (отдельно для каждого случая);
- являются бесконечно большими $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow -0$, $x \rightarrow 0$;
- являются бесконечно малыми при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$;
- являются бесконечно большими при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$;
- ограничены на всей области определения;
- имеют в точке $x = 0$ устранимый разрыв.

1) $f(x) = e^x / x$

2) $f(x) = (\arctg x) / x^2$

3) $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x}$

5) $f(x) = x^2 \cdot \sin(1/x)$

6) $f(x) = (\cos x) / x$

7) $f(x) = e^{1/\ln x}$

8) $f(x) = x^2 \cdot \arctg(1/x^2)$

9) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x^2}$

10) $f(x) = \ln|x|$

11) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{-1/x}$

12) $f(x) = \ln(1+2x) - \ln 2x$

13) $f(x) = \frac{\arctg|x|}{x^2}$

14) $f(x) = (x+1) \arctg(1/x)$

15) $f(x) = x \cdot \ln^2 x$

16) $f(x) = x \cdot 2^{-1/x}$

43. Укажите точки разрыва и их характер для приведенных ниже функций. Обоснуйте.

43.1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$

43.2. $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$

43.3. $f(x) = x \cdot \ln|x|$

43.4. $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}$

43.5. $f(x) = x^2 \cdot \arctg(1/x^2)$

43.6. $f(x) = \cos(1/x)$

43.7. $f(x) = \arctg(1/x^2)$

43.8. $f(x) = \frac{1 - \cos\sqrt{|x|}}{x}$

43.9. $f(x) = x \cdot e^{1/x}$

43.10. $f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-3}$

43.11. $f(x) = x \cdot \ln^2 x$

43.12. $f(x) = \frac{e^x - e}{3x-3}$

43.13. $f(x) = \frac{\ln(1+|x|)}{x^2}$

43.14. $f(x) = \frac{\ln(1+|3x|)}{x}$

- 44. Укажите, какие из следующих утверждений верны. Ответ обоснуйте.**
- 44.1. Сумма двух бесконечно больших последовательностей является бесконечно большой последовательностью.
 - 44.2. Сумма двух ограниченных последовательностей является ограниченной последовательностью.
 - 44.3. Сумма двух расходящихся последовательностей является расходящейся последовательностью.
 - 44.4. Сумма двух бесконечно больших последовательностей может быть ограниченной последовательностью.
 - 44.5. Сумма двух бесконечно больших последовательностей может быть бесконечно малой последовательностью.
 - 44.6. Сумма двух ограниченных последовательностей может быть бесконечно малой последовательностью.
 - 44.7. Сумма ограниченной последовательности и сходящейся последовательности является ограниченной последовательностью.
 - 44.8. Сумма бесконечно большой последовательности и ограниченной последовательности является бесконечно большой последовательностью.
 - 44.9. Сумма бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей является бесконечно большой последовательностью.
 - 44.10. Сумма ограниченной последовательности и неограниченной последовательности может быть сходящейся последовательностью.
 - 44.11. Произведение бесконечно большой последовательности и ограниченной последовательности является бесконечно большой последовательностью.
 - 44.12. Произведение бесконечно большой последовательности и бесконечно малой последовательности является бесконечно малой последовательностью.
 - 44.13. Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности является бесконечно малой последовательностью.
 - 44.14. Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности является ограниченной последовательностью.
 - 44.15. Произведение двух бесконечно больших последовательностей является бесконечной большой последовательностью.
 - 44.16. Произведение двух ограниченных последовательностей является ограниченной последовательностью.

44. Укажите, какие из следующих утверждений верны.

- 44.17. Произведение двух бесконечно больших последовательностей может быть ограниченной последовательностью.
- 44.18. Произведение двух ограниченных последовательностей может быть бесконечно малой последовательностью.
- 44.19. Произведение двух ограниченных последовательностей может быть неограниченной последовательностью.
- 44.20. Произведение ограниченной последовательности и неограниченной последовательности является неограниченной последовательностью.
- 44.21. Произведение бесконечно большой последовательности и ограниченной последовательности может быть ограниченной последовательностью.
- 44.22. Произведение бесконечно большой последовательности и ограниченной последовательности может быть бесконечно малой последовательностью.
- 44.23. Произведение бесконечно большой последовательности на бесконечно малую последовательность может быть бесконечно большой последовательностью.
- 44.24. Произведение бесконечно большой последовательности на бесконечно малую последовательность может быть бесконечно малой последовательностью.
- 44.25. Отношение двух бесконечно больших последовательностей может быть бесконечно большой последовательностью.
- 44.26. Отношение двух бесконечно больших последовательностей может быть ограниченной последовательностью.
- 44.27. Отношение ограниченной и бесконечно большой последовательностей является бесконечно малой последовательностью.
- 44.28. Отношение ограниченной и бесконечно большой последовательностей является ограниченной последовательностью.
- 44.29. Отношение ограниченной и бесконечно малой последовательностей является бесконечно большой последовательностью.
- 44.30. Отношение ограниченной и бесконечно малой последовательностей является неограниченной последовательностью.
- 44.31. Отношение бесконечно малой и ограниченной последовательностей является бесконечно малой последовательностью.
- 44.32. Отношение двух ограниченных последовательностей может быть неограниченной последовательностью.
- 44.33. Отношение двух бесконечно малых последовательностей может быть бесконечно малой последовательностью.

44. Укажите, какие из следующих утверждений верны.

- 44.34. Отношение двух бесконечно малых последовательностей может быть бесконечно большой последовательностью.
- 44.35. Отношение двух ограниченных последовательностей может быть бесконечно малой последовательностью.
- 44.36. Отношение двух ограниченных последовательностей может быть бесконечно большой последовательностью.
- 44.37. Отношение ограниченной и бесконечно малой последовательностей может быть бесконечно малой последовательностью.
- 44.38. Отношение ограниченной и бесконечно малой последовательностей может быть ограниченной последовательностью.
- 44.39. Сумма двух функций, бесконечно больших при $x \rightarrow a$, может быть функцией, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.
- 44.40. Сумма функции, бесконечно большой при $x \rightarrow a$, и функции, ограниченной при $x \rightarrow a$, является функцией, бесконечно большой при $x \rightarrow a$.
- 44.41. Сумма двух функций, неограниченных при $x \rightarrow a$, является функцией, неограниченной при $x \rightarrow a$.
- 44.42. Сумма функции, ограниченной при $x \rightarrow a$, и функции, неограниченной при $x \rightarrow a$, может быть функцией, ограниченной при $x \rightarrow a$.
- 44.43. Сумма функции, бесконечно малой при $x \rightarrow a$, и функции, ограниченной при $x \rightarrow a$, может быть функцией, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.
- 44.44. Произведение двух локально ограниченных при $x \rightarrow a$ функций локально ограничено при $x \rightarrow a$.
- 44.45. Произведение функции, бесконечно малой при $x \rightarrow a$, и функции, ограниченной при $x \rightarrow a$, является функцией, ограниченной при $x \rightarrow a$.
- 44.46. Произведение функции, бесконечно большой при $x \rightarrow a$, и функции, ограниченной при $x \rightarrow a$, является функцией, бесконечно большой при $x \rightarrow a$.
- 44.47. Произведение двух функций, неограниченных при $x \rightarrow a$, может быть функцией, ограниченной при $x \rightarrow a$.
- 44.48. Отношение функции, бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, и функции, ограниченной в окрестности бесконечности, является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow +\infty$.
- 44.49. Отношение функции, ограниченной при $x \rightarrow a$, и функции, бесконечно большой при $x \rightarrow a$, является функцией, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

44. Укажите, какие из следующих утверждений верны.

- 44.50. Сумма функции, имеющей в точке $x = a$ неустранимый разрыв первого рода, и функции, имеющей в точке $x = a$ разрыв второго рода, может иметь в точке $x = a$ разрыв первого рода.
- 44.51. Сумма двух функций, имеющих в точке $x = a$ неустранимый разрыв первого рода, имеет в точке $x = a$ разрыв первого рода.
- 44.52. Сумма функции, имеющей в точке $x = a$ разрыв второго рода, и функции, непрерывной в точке $x = a$, имеет в точке $x = a$ разрыв второго рода.
- 44.53. Сумма двух функций, имеющих в точке $x = a$ разрыв второго рода, имеет в точке $x = a$ разрыв второго рода.
- 44.54. Произведение двух функций, имеющих в точке $x = a$ разрыв второго рода, может иметь в точке $x = a$ устранимый разрыв
- 44.55. Произведение функции, имеющей в точке $x = a$ разрыв первого рода, и функции, имеющей в точке $x = a$ разрыв второго рода, имеет в точке $x = a$ разрыв второго рода.
- 44.56. Произведение функции, имеющей в точке $x = a$ разрыв второго рода, и функции, непрерывной в точке $x = a$, имеет в точке $x = a$ разрыв второго рода.
- 44.57. Произведение двух функций, имеющих в точке $x = a$ неустранимый разрыв первого рода, может иметь в точке $x = a$ разрыв второго рода.
- 44.58. $\sin n^2 \sim n^2$ при $n \rightarrow \infty$.
- 44.59. $\ln n \sim n - 1$ при $n \rightarrow \infty$.
- 44.60. $\ln z \sim z - 1$ при $z \rightarrow 0$.
- 44.61. Если $f = o(g)$ и $f = o(h)$ при $x \rightarrow a$, то $g \sim h$ при $x \rightarrow a$.
- 44.62. Если $f = o(g)$ при $x \rightarrow a$, то $o(f + g) = o(g)$ при $x \rightarrow a$.
- 44.63. Если $f \sim g$ при $x \rightarrow a$, то $f - g = o(f)$ при $x \rightarrow a$.
- 44.64. Если $f \sim g$ при $x \rightarrow a$, то $f - g = o(1)$ при $x \rightarrow a$.
- 44.65. Если $g = o(f)$ при $x \rightarrow a$, то $f + g \sim f$ при $x \rightarrow a$.
- 44.66. Если $f \sim h$ и $g \sim h$ при $x \rightarrow a$, то $f - g = o(h)$ при $x \rightarrow a$.
- 44.67. Если $f - g = o(1)$ при $x \rightarrow a$, то $f \sim g$ при $x \rightarrow a$.
- 44.68. Если $f = o(g)$ и $f = o(h)$ при $x \rightarrow a$, то $f = o(g - h)$ при $x \rightarrow a$.
- 44.69. Если $f \sim g$ при $x \rightarrow a$, то $o(f) = o(f + g)$ при $x \rightarrow a$.
- 44.70. Если $f \sim g$ и $g \sim h$ при $x \rightarrow a$, то $o(f) = o(h)$ при $x \rightarrow a$.
- 44.71. Если $f - g = o(g)$ при $x \rightarrow a$, то $f \sim g$ при $x \rightarrow a$.
- 44.72. Если $f = o(h)$, $g = o(k)$ и $h \sim k$ при $x \rightarrow a$, то $f \sim g$ при $x \rightarrow a$.

44. Укажите, какие из следующих утверждений верны.

- 44.73. Если функция непрерывна в точке x_0 , то она непрерывна в некоторой окрестности этой точки.
- 44.74. Если функция непрерывна в точке x_0 , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.
- 44.75. Если функция непрерывна в точке x_0 , то она ограничена в любой окрестности этой точки.
- 44.76. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то функция $1/f(x)$ ограничена в некоторой окрестности этой точки.
- 44.77. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то в любой окрестности точки x_0 $f(x) > 0$.
- 44.78. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x) < 0$, то существуют такая окрестность точки x_0 и такое число $c > 0$, что для любого x из окрестности выполняется неравенство $f(x) < -c$.
- 44.79. Множество значений функции, непрерывной на интервале, может быть отрезком.
- 44.80. Если функция определена на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.
- 44.81. Если функция определена на отрезке, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения.
- 44.82. Если функция непрерывна на полуинтервале $(a, b]$, то она достигает на этом полуинтервале наибольшего значения.
- 44.83. Если функция монотонна и ограничена на интервале (a, b) , то она достигает на интервале наибольшего значения.
- 44.84. Множество значений функции, непрерывной на интервале, является интервалом.
- 44.85. Множество значений функции, непрерывной на всей числовой прямой, может быть отрезком.
- 44.86. Если функция имеет на отрезке наибольшее и наименьшее значения, то она непрерывна на этом отрезке.
- 44.87. Множество значений функции, непрерывной на отрезке, может быть интервалом.
- 44.88. Любая функция, непрерывная на отрезке, имеет наибольшее значение на этом отрезке.
- 44.89. Если функция непрерывна на интервале, то она ограничена на этом интервале.
- 44.90. Если множество значений функции, непрерывной на отрезке, является отрезком, то функция непрерывна на этом отрезке.

45. В следующих задачах необходимо указать, как соотносятся между собой утверждения (1) и (2):
- (А) — если (1) $\Leftrightarrow$ (2)
 - (Б) — если (1) $\Rightarrow$ (2), но (2) $\neq \Rightarrow$ (1)
 - (В) — если (2) $\Rightarrow$ (1), но (1) $\neq \Rightarrow$ (2)
 - (Г) — если утверждения (1) и (2) друг друга исключают
 - (Д) — если ни один из предыдущих вариантов ответа не верен
- 45.1. (1) Последовательность $\{a_n\}$ имеет ровно одну предельную точку.
(2) Последовательность $b_n = a_n / n$ имеет ровно две предельных точки.
- 45.2. (1) Последовательность $\{a_n\}$ сходится.
(2) Последовательность $\{a_n\}$ имеет не более одной предельной точки.
- 45.3. (1) Последовательность $\{a_n\}$ имеет ровно одну предельную точку.
(2) Последовательность $\{a_n\}$ сходится.
- 45.4. (1) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена.
(2) Последовательность $\{na_n\}$ не ограничена.
- 45.5. (1) Последовательность $\{a_n\}$ имеет ровно одну предельную точку.
(2) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху и является неубывающей.
- 45.6. (1) Из последовательности $\{n + a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
(2) Последовательность $\{a_n\}$ сходится.
- 45.7. (1) $f(x) = o(x^4)$ при $x \rightarrow \infty$.
(2) $f(x) = o(x^5)$ при $x \rightarrow \infty$.
- 45.8. (1) $f(x) = o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$.
(2) $f(x) = o(x^5)$ при $x \rightarrow 0$.
- 45.9. (1) $f(x) = o(x^3) + o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$.
(2) $f(x) = o(x^4) + o(x^5)$ при $x \rightarrow 0$.
- 45.10. (1) $f(x) = 3x + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$.
(2) $f(x) = 3x + 3x^2 + o(2x)$ при $x \rightarrow 0$.
- 45.11. (1) $f(x) = 1 - x + 2x^2 + o(x)$ при $x \rightarrow +0$.
(2) $f(x) = 1 - x + 3x^2 + o(x^2)$ при $x \rightarrow +0$.
- 45.12. (1) $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow -0$.
(2) $f(x) = o(1 - \cos 3x)$ при $x \rightarrow -0$.

- 45.13. (1) $f(x) = 2x^2 + o(x^2 - o(x^3))$ при $x \rightarrow \infty$.
(2) $f(x) = 2x + o(x^4 - o(x^3))$ при $x \rightarrow \infty$.
- 45.14. (1) $f(x) = 4/x + 3/x^2 + o(1/x^2)$ при $x \rightarrow \infty$.
(2) $f(x) = 4/x + o(3/x^2 + o(1/x))$ при $x \rightarrow \infty$.
- 45.15. (1) $f(x) = \sqrt{2x + x^2}$.
(2) $f(x) = o(x^{4/3})$ при $x \rightarrow +\infty$.
- 45.16. (1) $f(x) = x^2 - \sqrt[3]{x^4} + o(x)$ при $x \rightarrow 0$.
(2) $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow 0$.
- 45.17. (1) Функция $f(x)$ ограничена в любой окрестности точки $x = a$.
(2) Функция $f(x)$ не ограничена при $x \rightarrow +\infty$.
- 45.18. (1) Функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$.
(2) Функция $f(x)$ не ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$.
- 45.19. (1) Функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$.
(2) Функция $f(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$.
- 45.20. (1) Функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$.
(2) Функция $f(x)$ ограничена в любой проколотой окрестности точки $x = a$.
- 45.21. (1) Функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ устранимый разрыв
(2) Функция $1/f(x)$ имеет в точке $x = a$ неустранимый разрыв 1-го рода
- 45.22. Функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки a
(1) Существует такая окрестность U точки a и такое число $c > 0$, что для любого $x \in U$ выполняется неравенство $f(x) < -c$.
(2) $f(a) < 0$.
- 45.23. (1) Функции $f(x) + 2g(x)$ и $f(x) - 3g(x)$ непрерывны в точке $x = a$.
(2) Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$.
- 45.24. (1) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.
(2) Множество значений функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ является бесконечным полуинтервалом.
- 45.25. (1) Функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на интервале (a, b) .
(2) Множество значений функции $f(x)$ на интервале (a, b) есть интервал.

- 45.26. Функция $f(x)$ определена и непостоянна на отрезке $[a; b]$.
- (1) Множество значений функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ является отрезком.
 - (2) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.
46. Дано: $f(x) = -x + 1 - 1/x + o(1)$, $g(x) = -x + 1 - 1/x + o(1/x)$ при $x \rightarrow -\infty$. Что можно сказать о положении графиков этих функций (выше или ниже) относительно прямой $y = -x + 1$ при $x \rightarrow -\infty$? При формулировке утверждения точно укажите с помощью кванторов, к каким x оно относится. Ответ полностью обоснуйте, используя при необходимости определение o -малого и лемму об устойчивости знака, указав конкретно, как и к чему она применяется.
47. Дано: $f(x) - f(-3) = -2(x+3) + o(1)$,
 $g(x) - g(-3) = 3(x+3) + o(x+3)$ при $x \rightarrow -3 + 0$. Что можно сказать о знаке приращений этих функций в достаточно малой правой проколотой окрестности точки $x = -3$? Охарактеризуйте эту окрестность с помощью кванторов. Ответ полностью обоснуйте, используя при необходимости определение o -малого и лемму об устойчивости знака, указав конкретно, как и к чему она применяется.
48. Дано: $f(x) - f(-1) = -2(x+1)^2 + o((x+1)^2)$,
 $g(x) - g(-1) = 3(x+1)^2 + o(x+1)$ при $x \rightarrow -1$. Что можно сказать о знаке приращений этих функций в достаточно малой проколотой окрестности точки $x = -1$? Охарактеризуйте эту окрестность с помощью кванторов. Ответ полностью обоснуйте, используя при необходимости определение o -малого и лемму об устойчивости знака, указав конкретно, как и к чему она применяется.

Примерные экзаменационные вопросы по разделу «Пределы и непрерывность»

(В контрольной и экзаменационной работах формулировки могут быть изменены.)

Всюду, где в вопросах написано $x \rightarrow a$, следует также учитывать возможные случаи $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$. Всяду, где идет речь о бесконечно малых и бесконечно больших функциях, а также об эквивалентностях и o -малых, подразумевается, что рассматривается один из приведённых случаев поведения аргумента.

1. Понятие окрестности точки, проколотой окрестности, односторонней окрестности (полуокрестности), окрестности бесконечности, окрестности плюс и минус бесконечности. Пересечение окрестностей.

2. Определение последовательности. Определение предела последовательности, сходящейся последовательности. Теорема о единственности предела последовательности.
3. Определение бесконечно малой последовательности. Теорема о связи понятий предела последовательности и бесконечно малой последовательности.
4. Определение бесконечно большой последовательности.
5. Теорема о соотношении бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей.
6. Теорема сравнения бесконечно малых последовательностей.
7. Теорема о сумме двух бесконечно малых последовательностей.
8. Понятие ограниченной последовательности (в частности, сверху и снизу); понятие верхней границы и нижней границы последовательности. Эквивалентность двух определений ограниченности последовательности.
9. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
10. Теорема о произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей. Следствия из теоремы.
11. Лемма об устойчивости знака (для последовательностей). Усиленный вариант леммы об устойчивости знака. Обобщение леммы об устойчивости знака.
12. Следствие из леммы об устойчивости знака (для двух последовательностей).
13. Лемма об ограниченности последовательности $\{1/b_n\}$.
14. Теорема о пределе суммы двух последовательностей.
15. Теорема о пределе произведения двух последовательностей.
16. Теорема о пределе отношения двух последовательностей.
17. Теорема о переходе к пределу в неравенстве (для двух последовательностей).
18. Теорема о двойном неравенстве для последовательностей.
19. Понятие предела функции. Теорема о единственности предела функции.
20. Определение функции, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.
21. Определение функции, бесконечно большой при $x \rightarrow a$.
22. Теорема о соотношении бесконечно большой и бесконечно малой функций при $x \rightarrow a$.
23. Теорема сравнения бесконечно малых функций.
24. Теорема о сумме двух бесконечно малых функций.
25. Определение ограниченности функций на множестве (в частности, сверху и снизу); понятие верхней границы и нижней границы. Эквивалентность двух определений ограниченности функции на множестве.

26. Определение локальной ограниченности функции (ограниченности при $x \rightarrow a$).
27. Теорема о произведении бесконечно малой функции на локально ограниченную функцию. Следствия из теоремы.
28. Теорема о пределе суммы и произведения двух функций.
29. Лемма об устойчивости знака (для различных случаев предела функции). Усиленный вариант леммы об устойчивости знака. Обобщение леммы об устойчивости знака.
30. Следствие из леммы об устойчивости знака (для двух функций).
31. Лемма о локальной ограниченности функции $1/g(x)$.
32. Теорема о пределе отношения функций.
33. Теорема о переходе к пределу в неравенстве.
34. Теорема о двойном неравенстве для функций.
35. Теорема о предельном переходе в сложной функции (формулировка).
36. Теорема о первом замечательном пределе.
37. Теорема о втором замечательном пределе: вывод равенств

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Предполагается, что известно определение числа e .

38. Вывод пределов $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x}$.
39. Свойства отношения эквивалентности.
40. Определение эквивалентных функций. Свойства эквивалентности функций. Теорема о замене функций на эквивалентные в произведении и отношении (при вычислении пределов).
41. Определение o -малого. Свойства символа o -малое.
42. Необходимое и достаточное условие эквивалентности двух функций, выраженное с помощью o -малого.
43. Определение класса $\tilde{o}(f)$. Понятие сравнимых функций при $x \rightarrow a$, теорема о совпадении классов вида $\tilde{o}(f)$ для сравнимых функций.
44. Вывод основных эквивалентностей и формул с o -малым.
45. Формулы Маклорена для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$ при $x \rightarrow 0$. (Общий вид без доказательства и вывод для частных случаев малых степеней n).
46. Виды неопределённостей. Способы раскрытия неопределённостей.
47. Понятие наклонной асимптоты. Вычисление параметров наклонной асимптоты.
48. Обоснование стремления графика функции к наклонной асимптоте сверху (снизу) при использовании разложений по формулам Маклорена (с использованием леммы об устойчивости знака.)

49. Определение непрерывности функции в точке (по Коши). Определение одной-сторонней непрерывности функции в точке.
50. Определение предела функции по Гейне. Определение непрерывности функции по Гейне. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне. Эквивалентность определений непрерывности функции по Коши и по Гейне. Примеры применения определения по Гейне.
51. Лемма об устойчивости знака для функции, непрерывной в точке. Усиленный вариант леммы об устойчивости знака. Обобщение леммы об устойчивости знака.
52. Следствие из леммы об устойчивости знака (для двух функций, непрерывных в точке).
53. Лемма о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке.
54. Определение точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.
55. Теорема о непрерывности суммы функций.
56. Теорема о непрерывности произведения функций.
57. Теорема о непрерывности отношения функций.
58. Теорема о непрерывности сложной функции (доказательство без использования теоремы о пределе сложной функции).
59. Непрерывность элементарных функций. Формулировка. Обоснование для функций x^n , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.
60. Определения ограниченного числового множества и границы множества (верхней границы и нижней границы).
61. Проблема полноты (непрерывности) множества действительных чисел. Аксиома полноты (непрерывности) множества действительных чисел.
62. Определения ограниченного числового множества, верхней границы и нижней границы числового множества.
63. Определение верхней грани числового множества.
64. Рабочее определение верхней грани; его эквивалентность исходному определению.
65. Эквивалентность аксиомы полноты и утверждения о существовании верхней грани непустого ограниченного сверху числового множества.
66. Определение нижней грани числового множества. Рабочее определение нижней грани; его эквивалентность исходному определению. Теорема о существовании нижней грани непустого ограниченного снизу множества (сведение к теореме о существовании верхней грани).
67. Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности (подробная формулировка и доказательство).

68. Обоснование пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k q^n = 0$ (при $|q| < 1$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \text{ (при } a > 1) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

69. Сходимость последовательности $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$. Определение числа e .

70. Второй замечательный предел (две формы записи).

71. Определение системы стягивающихся отрезков. Лемма о стягивающихся отрезках.

72. Определение предельной точки последовательности. Лемма о предельной точке последовательности.

73. Определение подпоследовательности. Связь между сходимостью последовательности и сходимостью подпоследовательности.

74. Связь между сходимостью подпоследовательности и предельной точкой последовательности.

75. Теорема Больцано-Вейерштрасса об ограниченной последовательности.

76. Определение фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

77. Критерий Коши существования предела функции (формулировка).

78. Теоремы о пределе функций, монотонных и ограниченных на интервале.

79. Определение непрерывности функции на множестве.

80. Первая теорема Вейерштрасса для функции на отрезке.

81. Вторая теорема Вейерштрасса для функции на отрезке.

82. Первая теорема Коши (теорема Больцано—Коши об обращении функции в нуль).

83. Вторая теорема Коши (теорема Больцано—Коши о промежуточных значениях непрерывной функции).

84. Следствие из теорем Вейерштрасса и Больцано—Коши для функции, непрерывной на отрезке.

85. Обратная функция, необходимое и достаточное условие существования обратной функции, достаточное условие существования обратной функции. Формулировка теоремы о непрерывности обратной функции.

РАЗДЕЛ

«Производные и их применение»

Примерные вопросы

для микроконтрольной по разделу

«Производные и их применение»

1. Сформулируйте определение производной.
2. Сформулируйте геометрический смысл производной.
3. Сформулируйте механический смысл производной.
4. Приведите экономический пример использования производной.
5. Сформулируйте определение дифференцируемой в точке функции и определение дифференциала.
6. Сформулируйте геометрический смысл дифференциала.
7. Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.
8. Сформулируйте теорему о соотношении дифференцируемости и непрерывности функции.
9. Приведите, с обоснованием, пример функции, непрерывной, но не дифференцируемой в точке $x = x_0$.
10. Напишите уравнение касательной к графику функции, дифференцируемой в точке $x = x_0$.
11. Приведите, с обоснованием, пример функции, дифференцируемой ровно в одной точке $x = x_0$.
12. Сформулируйте теорему о производной суммы.
13. Приведите, с обоснованием, пример, показывающий, что дифференцируемость слагаемых не является необходимым условием дифференцируемости суммы двух функций.
14. Сформулируйте теорему о производной произведения.
15. Приведите, с обоснованием, пример, показывающий, что дифференцируемость сомножителей не является необходимым условием дифференцируемости произведения двух функций.
16. Сформулируйте теорему о производной отношения.

17. Приведите, с обоснованием, пример, показывающий, что дифференцируемость числителя и знаменателя не является необходимым условием дифференцируемости отношения двух функций.
18. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
19. Приведите с обоснованием пример, показывающий, что дифференцируемость внешней функции не является необходимым условием дифференцируемости сложной функции.
20. Приведите, с обоснованием, пример, показывающий, что дифференцируемость внутренней функции не является необходимым условием дифференцируемости сложной функции.
21. Сформулируйте в развернутом виде теорему об инвариантности первого дифференциала.
22. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
23. Приведите пример, показывающий, что из условия $f'(x_0) > 0$ не следует возрастание $f(x)$ ни в какой окрестности точки x_0 .
24. Сформулируйте определение точки максимума функции в общем случае с учётом области определения.
25. Сформулируйте определение точки минимума функции в общем случае с учётом области определения.
26. Сформулируйте определение точки внутреннего минимума функции $f(x)$.
27. Сформулируйте определение точки строгого внутреннего минимума функции $f(x)$.
28. Сформулируйте определение точки внутреннего максимума функции $f(x)$.
29. Сформулируйте определение точки строгого внутреннего максимума функции $f(x)$.
30. Сформулируйте необходимое условие внутреннего экстремума для дифференцируемой функции (теорему Ферма).
31. Сформулируйте необходимое условие экстремума (в общем случае).
32. Приведите и поясните пример, показывающий, что необходимое условие экстремума первого порядка не является достаточным.
33. Приведите два принципиально различных примера точки экстремума, не описываемых теоремой Ферма.
34. Сформулируйте теорему Ролля.
35. Сформулируйте геометрическую интерпретацию теоремы Ролля.
36. Сформулируйте теорему Лагранжа о конечных приращениях.
37. Сформулируйте геометрическую интерпретацию теоремы Лагранжа о конечных приращениях.

38. Сформулируйте необходимое условие того, что функция, дифференцируемая на интервале, является возрастающей (неубывающей, невозрастающей, убывающей) на этом интервале.
39. Сформулируйте достаточное условие того, что функция является возрастающей (неубывающей, невозрастающей, убывающей) на интервале.
40. Сформулируйте теорему Коши о конечных приращениях.
41. Сформулируйте геометрическую интерпретацию теоремы Коши о конечных приращениях.
42. Сформулируйте правило Лопиталя для случая неопределенности типа $\frac{0}{0}$ при $x \rightarrow x_0$.
43. Сформулируйте правило Лопиталя для случая неопределенности типа $\frac{0}{0}$ при $x \rightarrow +\infty$.
44. Сформулируйте правило Лопиталя для случая неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \rightarrow x_0$.
45. Сформулируйте правило Лопиталя для случая неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \rightarrow +\infty$.
46. Приведите пример, показывающий, что наличие неопределенности является существенным условием в формулировке правила Лопиталя.
47. Приведите пример, показывающий, что существование предела отношения производных является существенным условием в формулировке правила Лопиталя.
48. Напишите формулу для дифференциала второго порядка и приведите пример нарушения инвариантности формы второго дифференциала.
49. Сформулируйте теорему о случаях инвариантности формы дифференциалов высших порядков.
50. Сформулируйте определение остаточного члена в формулах Маклорена и Тейлора.
51. Напишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, сформулировав предпосылки, при которых справедлива эта формула (в виде теоремы).
52. Напишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, сформулировав предпосылки, при которых справедлива эта формула (в виде теоремы).

53. Напишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, сформулировав предпосылки, при которых справедлива эта формула (в виде теоремы).
54. Напишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Коши, сформулировав предпосылки, при которых справедлива эта формула (в виде теоремы).
55. Напишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для функции e^x .
56. Напишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для функции $\sin x$.
57. Напишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для функции $\cos x$.
58. Напишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для функции $\ln(1+x)$.
59. Напишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для функции $(1+x)^p$.
60. Напишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа для функции e^x .
61. Напишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $\sin x$.
62. Напишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $\cos x$.
63. Выпишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \ln(1+x)$.
64. Выпишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = (1+x)^p$.
65. Сформулируйте теорему о сходимости к нулю при фиксированном x остаточного члена в формуле Маклорена для функции e^x .
66. Сформулируйте теорему о сходимости к нулю при фиксированном x остаточного члена в формуле Маклорена для функции $\sin x$.
67. Сформулируйте теорему о сходимости к нулю при фиксированном x остаточного члена в формуле Маклорена для функции $\cos x$.
68. Сформулируйте теорему о сходимости к нулю при фиксированном x остаточного члена в формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$.
69. Сформулируйте теорему о сходимости к нулю при фиксированном x остаточного члена в формуле Маклорена для функции $(1+x)^p$.
70. Сформулируйте достаточное условие минимума, выражаемое через первую производную (достаточное условие первого порядка). Приведите формулировку, которая будет включать в себя и случай недифференцируемой в точке минимума функции.

71. Сформулируйте достаточное условие максимума, выражаемое через первую производную (достаточное условие первого порядка). Приведите формулировку, которая будет включать в себя и случай недифференцируемой в точке минимума функции.
72. Приведите пример, показывающий, что достаточное условие экстремума первого порядка не является для дифференцируемых функций необходимым.
73. Сформулируйте достаточное условие второго порядка для точки экстремума.
74. Приведите пример, показывающий, что достаточное условие экстремума второго порядка не является для дважды дифференцируемых функций необходимым.
75. Сформулируйте необходимое условие второго порядка для максимума функции.
76. Сформулируйте достаточное условие высшего порядка для минимума функции.
77. Сформулируйте достаточное условие высшего порядка для максимума функции.
78. Сформулируйте достаточное условие высшего порядка для отсутствия экстремума функции.
79. Сформулируйте определение выпуклой комбинации точек A и B в пространстве $\mathbb{R}^m$.
80. Выразите через точки A, B и положительные числа p и q точку C , которая делит отрезок AB в пространстве $\mathbb{R}^m$ в отношении $p : q$, считая от A .
80. Сформулируйте определение выпуклой (строго выпуклой) функции без предположения о дифференцируемости (геометрический и аналитический варианты).
81. Сформулируйте определение вогнутой (строго вогнутой) функции без предположения о дифференцируемости (геометрический и аналитический варианты).
82. Сформулируйте связь между дифференцируемостью и выпуклостью функции (в виде «если ..., то ...»; в виде необходимого условия; в виде достаточного условия).
83. Сформулируйте связь между непрерывностью и выпуклостью функции (в виде «если ..., то ...»; в виде необходимого условия; в виде достаточного условия).
84. Сформулируйте определение выпуклой (строго выпуклой) функции через касательные (геометрический и аналитический варианты).

85. Сформулируйте определение вогнутой (строго вогнутой) функции через касательные (геометрический и аналитический варианты).
86. Сформулируйте необходимое и достаточное условие выпуклости функции, дифференцируемой на интервале, в терминах первой производной.
87. Сформулируйте необходимое и достаточное условие строгой выпуклости функции, дифференцируемой на интервале, в терминах первой производной.
88. Сформулируйте необходимые и достаточные условия выпуклости (строгой выпуклости) непрерывной функции, кусочно дифференцируемой на промежутке (a, b) .
89. Сформулируйте достаточное условие выпуклости (строгой выпуклости) функции, дважды дифференцируемой на интервале, в терминах второй производной.
90. Сформулируйте необходимое условие выпуклости (строгой выпуклости) функции, дважды дифференцируемой на интервале, в терминах второй производной.
91. Сформулируйте определение точки перегиба.
92. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба для дважды дифференцируемой функции.
93. Сформулируйте достаточное условие точки перегиба.
94. Сформулируйте лемму о функции, имеющей на интервале нулевую производную.
95. Сформулируйте теорему о функциях, имеющих на интервале одинаковые производные.
96. Сформулируйте понятие первообразной и неопределённого интеграла.

Задачи по разделу «Производные и их применение»

Вычисление производных

1. Задачи для обучения из Сборника задач Б. П. Демидовича. №№ 834, 835, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 851, 852, 854, 860, 861, 862, 864, 866, 868, 872, 875, 876, 877, 879, 881, 887, 888, 894, 895, 901, 910, 912, 913, 914, 915, 918, 920, 921, 922, 925, 932, 939, 942, 952, 958, 964, 965, 966, 972, 979, 981, 991.

2. Некоторые задачи на дифференцирование сложной функции.
- 2.1. $y = 2^{\sin x}$ 2.2. $y = 2^{\sin 2x}$ 2.3. $y = 2^{\sin^2 x}$
 2.4. $y = 2^{\sin(\ln x)}$ 2.5. $y = 2^{\sin(x^3)}$ 2.6. $y = (2^{\sin x})^2$
 2.7. $y = x^{\sin x}$ 2.8. $y = (\ln x)^{\lg x}$ 2.9. $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{\ln^2 x}$
 2.10. $y = (\arcsin x)^{\ln 2}$ 2.11. $y = (\ln 3)^{1/x}$ 2.12. $y = x^{(e^2)}$
3. Примерные образцы задач для контрольной № 3 и спецварианта.
- 3.1. $y = 8^{\lg^2 4x}$ 3.2. $y = x^6 \cdot \sqrt{\operatorname{arctg} x + 4} \cdot \operatorname{tg} 2$
 3.3. $y = \frac{\ln(\ln 2 - \sqrt{x})}{\operatorname{arctg} 4x}$ 3.4. $y = \ln(\sin(\pi^4 - \operatorname{tg} x))$
 3.5. $y = (\operatorname{tg} 2x)^{5x+3}$ 3.6. $y = e^3 \cdot x^5 \cdot \ln(3 \cos x - 1)$
 3.7. $y = \frac{\sqrt[4]{4x-2}}{\operatorname{arctg}(1/x^3)}$ 3.8. $y = \sqrt[5]{\arcsin(\ln 4x)}$
 3.9. $y = (6-3x)^{\ln 2x}$ 3.10. $y = 6^{\sin^3(1/x^3)}$
 3.11. $y = \sqrt[3]{\arccos(\operatorname{tg} 3x)}$ 3.12. $y = (3-9x)^{\sin 2x}$
 3.13. $y = \frac{\sqrt[5]{4x+2}}{\arccos(2/x^4)}$ 3.14. $y = \frac{\sin(\sqrt{x} - \ln 7)}{\operatorname{arctg} 2x}$

Графики

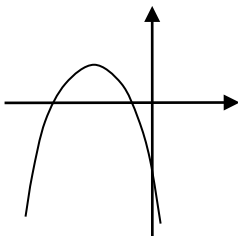
I. Распознавание графиков по характерным признакам

Примечание. На всех графиках по умолчанию горизонтальная ось (абсцисс) соответствует переменной x , а вертикальная ось (ординат) соответствует переменной y (значению функции).

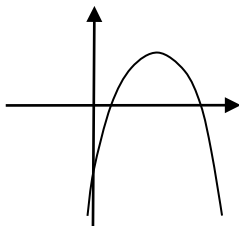
1. Используя характерные признаки, определите, каким функциям наиболее соответствуют приведённые ниже два графика. Объясните.
- а) $x^2 + 4x + 2$ б) $x^2 + 4x - 2$ в) $-x^2 + 4x + 2$ г) $-x^2 + 4x - 2$
 д) $x^2 - 4x + 2$ е) $x^2 - 4x - 2$ ж) $-x^2 - 4x + 2$ з) $-x^2 - 4x - 2$

Другая постановка задачи. Напишите **конкретный** пример функции вида $y = ax^2 + bx + c$, характерные особенности которой отражены на графике (все параметры должны быть заданы). Кратко объясните выбор параметров.

1.



2.



2. Используя характерные признаки, определите, каким функциям наиболее соответствуют приведённые ниже шесть графиков (асимптоты могут быть и не обозначены). Объясните.

- | | | | |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| а) $\sqrt[3]{x(x-2)}$ | б) $\sqrt[3]{x(x-2)^2}$ | в) $\sqrt[3]{x(x-2)^4}$ | г) $\sqrt[3]{x(x-2)^5}$ |
| д) $\sqrt[3]{x^2(x-2)}$ | е) $\sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$ | ж) $\sqrt[3]{x^2(x-2)^4}$ | з) $\sqrt[3]{x^2(x-2)^5}$ |
| и) $\sqrt[3]{x^4(x-2)}$ | к) $\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}$ | л) $\sqrt[3]{x^4(x-2)^4}$ | м) $\sqrt[3]{x^4(x-2)^5}$ |
| н) $\sqrt[3]{x^5(x-2)}$ | о) $\sqrt[3]{x^5(x-2)^2}$ | п) $\sqrt[3]{x^5(x-2)^4}$ | р) $\sqrt[3]{x^5(x-2)^5}$ |

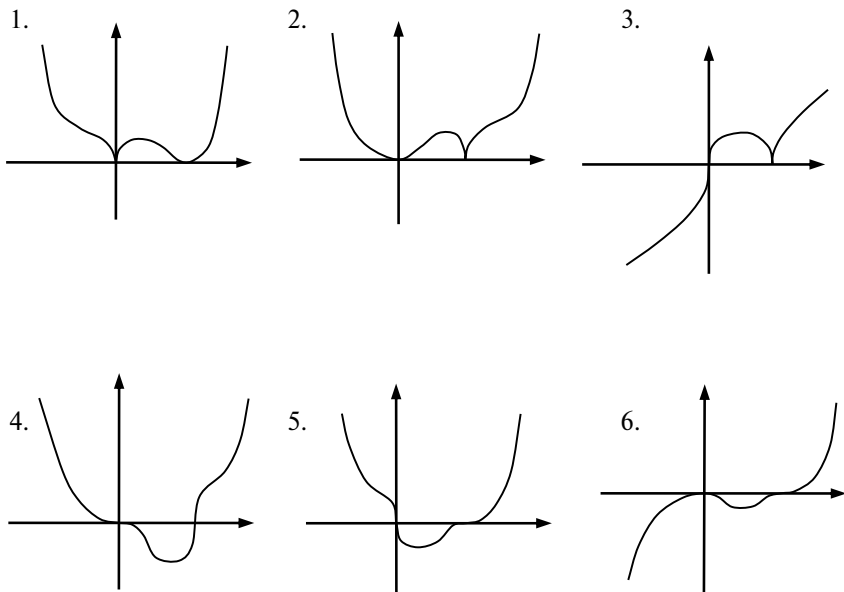
Важное замечание. Мы привыкли к тому, что степенные функции $x^{p/q}$ с дробными показателями определены для положительных или неотрицательных x . В принципе, для этого есть основания. Например, если $x < 0$, то естественное определение $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ даёт отрицательное значение, при этом если считать $x^{1/3} = x^{2/6} = \sqrt[6]{x^2}$, то получается положительный результат, то есть из-за неоднозначности представления рациональной дроби возникает неоднозначное определение степени отрицательного числа.

Однако, если договориться, что **в показателе степени могут быть только несократимые дроби**, то эта неоднозначность устраняется, а при нечётном знаменателе мы можем рассматривать степенные функции $x^{p/q}$ и при $x < 0$. Представление в виде $x^{p/q}$ часто оказывается более удобным для восприятия и анализа, чем $\sqrt[q]{x^p}$. Более того, формулы производных степенных функций при таком соглашении оказываются справедливыми и для $x < 0$ при нечётном q .

В соответствии с договорённостью набор функций перепишем в виде

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| а) $x^{1/3}(x-2)^{1/3}$ | б) $x^{1/3}(x-2)^{2/3}$ | в) $x^{1/3}(x-2)^{4/3}$ | г) $x^{1/3}(x-2)^{5/3}$ |
| д) $x^{2/3}(x-2)^{1/3}$ | е) $x^{2/3}(x-2)^{2/3}$ | ж) $x^{2/3}(x-2)^{4/3}$ | з) $x^{2/3}(x-2)^{5/3}$ |
| и) $x^{4/3}(x-2)^{1/3}$ | к) $x^{4/3}(x-2)^{2/3}$ | л) $x^{4/3}(x-2)^{4/3}$ | м) $x^{4/3}(x-2)^{5/3}$ |
| н) $x^{5/3}(x-2)^{1/3}$ | о) $x^{5/3}(x-2)^{2/3}$ | п) $x^{5/3}(x-2)^{4/3}$ | р) $x^{5/3}(x-2)^{5/3}$ |

Другая постановка задачи. Напишите **конкретный** пример функции вида $y = x^\beta(x+c)^\alpha$, характерные особенности которой отражены на графике (все параметры должны быть заданы). Кратко объясните выбор параметров.



Пример. Графику 1 из предложенных соответствует функция

$$f(x) = x^{2/3}(x-2)^{4/3}.$$

Пояснение: $f(x)$ имеет корни в точке 0 и в положительной точке, значит $c < 0$. В нуле график касается оси ординат и функция не меняет знак. Поэтому можно положить $\beta = 2/3$. В точке $x = -c$ график касается оси абсцисс и функция сохраняет знак, поэтому можно положить $\alpha = 4/3$.

Возможные другие ответы при второй постановке: $x^{2/5}(x-3)^2$, $x^{4/5}(x-1)^{8/7}$ и т.п.

3. Используя характерные признаки, определите, каким функциям наиболее соответствуют приведённые ниже четыре графика (асимптоты могут быть и не обозначены). Объясните.

а) xe^x

б) xe^{-x}

в) x^2e^x

г) x^2e^{-x}

д) x^3e^x

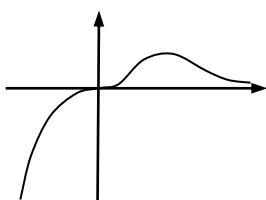
е) x^3e^{-x}

ж) $\sqrt[3]{x^2}e^x$

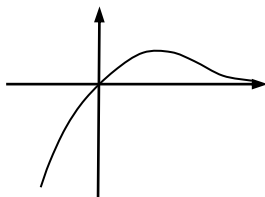
з) $\sqrt[3]{x^2}e^{-x}$

Другая постановка задачи. Напишите **конкретный** пример функции вида $y = x^a e^{bx}$, характерные особенности которой отражены на графике (все параметры должны быть заданы). Кратко объясните выбор параметров.

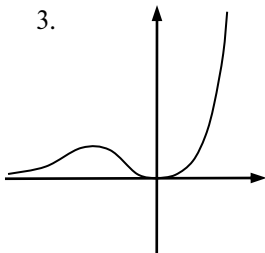
1.



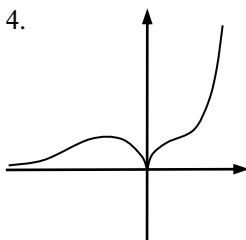
2.



3.



4.



Пример. Графику 1 из предложенных соответствует функция

$$f(x) = x^3 e^{-x}.$$

Пояснение: График касается в нуле оси абсцисс с переходом через неё. Можно считать, что $f(x) \sim x^3$ при $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$. Поэтому $b < 0$. Возможные другие ответы при второй постановке: $x^5 e^{-2x}$, $x^{5/3} e^{-3x}$ и т.п.

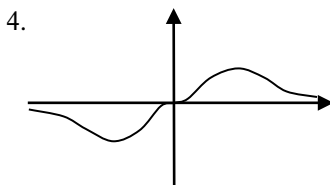
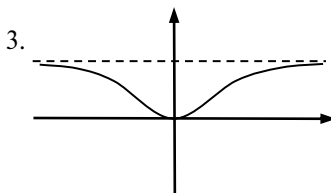
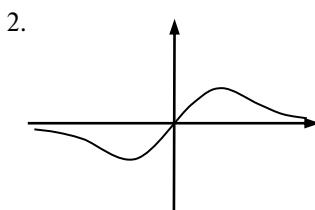
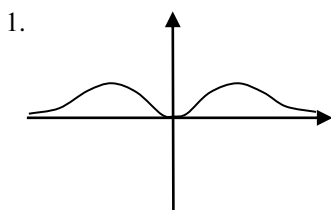
4. Используя характерные признаки, определите, каким функциям наиболее соответствуют приведённые ниже четыре графика. Объясните. В этом номере ответ может быть неединственным.

- а) xe^{x^2} б) xe^{-x^2} в) $x^2e^{x^2}$ г) $x^2e^{-x^2}$
 д) $x^3e^{x^2}$ е) $x^3e^{-x^2}$ ж) $x/(1+x^2)$ з) $x^2/(1+x^2)$
 и) $x^3/(1+x^2)$ к) $x^4/(1+x^2)$ л) $x^2/(1+x^4)$ м) $x^3/(1+x^4)$

Другая постановка задачи. Выберите вид функции и напишите **конкретный** пример функции выбранного вида, характерные особенности которой отражены на графике (все параметры должны быть заданы). Кратко объясните выбор параметров.

$$y = x^a e^{bx^c} \text{ или } y = \frac{x^m}{p + qx^n}.$$

Здесь вид функции может выбираться неоднозначно.



Пример. Графику 2 из предложенных соответствуют функции

$$f(x) = xe^{-x^2} \text{ и } g(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Пояснение: Функции нечётные; $f(x) \sim g(x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$, значит $a=1, m=1$. Из нечётности функций следует, что c и n — чётные; $f(x), g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Для $f(x)$ это означает, что показатель экспоненты стремится к $-\infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$, ещё и поэтому c — чётное, $b < 0$. Для $g(x)$ — что степень знаменателя выше степени числителя и чётная, корней у знаменателя нет. Поэтому $a, b > 0$.

Возможные другие ответы: xe^{-x^4} , $\frac{x}{1+x^4}$, $\frac{6x}{6+x^6}$ и т.п.

5. Используя характерные признаки, определите, каким функциям наиболее соответствуют приведённые ниже четыре графика. Объясните.

а) $x^3 + x$

б) $x^3 - x$

в) $x - x^3$

г) $x^3 + x^2$

д) $x^3 - x^2$

е) $x^2 - x^3$

ж) $x^4 + x^2$

з) $x^2 - x^4$

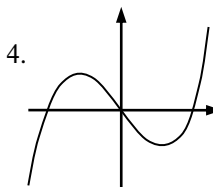
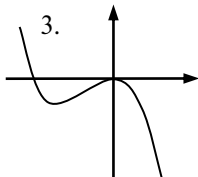
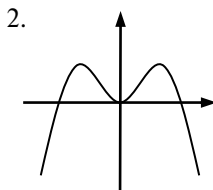
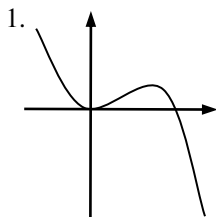
и) $x^4 - x^2$

к) $x^4 + x^3$

л) $x^4 - x^3$

м) $-x^3 - x^4$

Другая постановка задачи. Напишите **конкретный** пример функции вида $y = ax^m + bx^n$, характерные особенности которой отражены на графике (все параметры должны быть заданы). Кратко объясните выбор параметров.



Пример. Графику 4 из предложенных соответствует функция

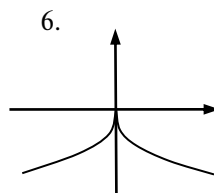
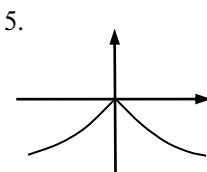
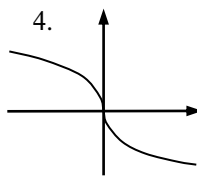
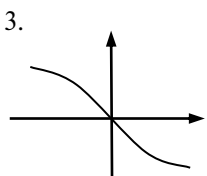
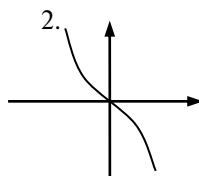
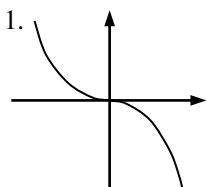
$$f(x) = x^3 - x.$$

Пояснение: Функция нечётная; $f(x) \sim -x$ при $x \rightarrow 0$; старшая степень нечётная: $f(x) = x^3(1 + o(1)) \sim x^3$ при $x \rightarrow \infty$; функция имеет три корня, например $0, \pm 1$. Возможные другие ответы при второй постановке: $-x + x^5$, $-x + 2x^3$ и т.п.

6. Используя характерные признаки, определите, каким функциям наиболее соответствуют приведённые ниже шесть графиков (асимптоты могут быть и не обозначены). Объясните.

В этом номере ответ может быть неединственным.

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------------|---|---------------------------|
| а) x^3 | б) $-x^3$ | в) $-x x $ | г) $-x^{1/3}$ |
| д) $x^{1/3}$ | е) $-x^{2/3}$ | ж) $\operatorname{tg} x$ | з) $-\operatorname{tg} x$ |
| и) $\operatorname{arctg} x$ | к) $-\operatorname{arctg} x$ | л) $-\left \operatorname{arctg} x\right $ | |



Пример. Графику 3 из предложенных соответствует функция

$$f(x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Пояснение: Участки монотонности и выпуклости соответствуют функциям $-x^{1/3}$ и $-\operatorname{arctg} x$. При этом $f(x) \sim -x$ при $x \rightarrow 0$, а график $y = -x^{1/3}$ касается оси ординат.

7. Используя характерные признаки, определите, каким функциям наиболее соответствуют приведённые ниже шесть графиков. Объясните.

а) $\frac{x^2+1}{x}$

б) $\frac{x^2-1}{x}$

в) $\frac{-x^2+1}{x}$

г) $\frac{-x^2-1}{x}$

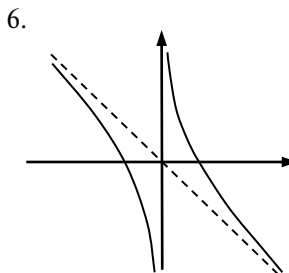
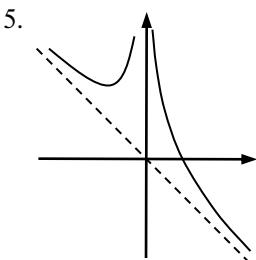
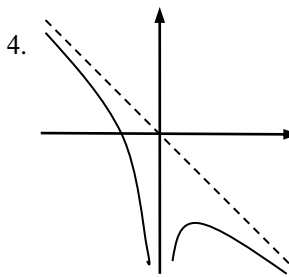
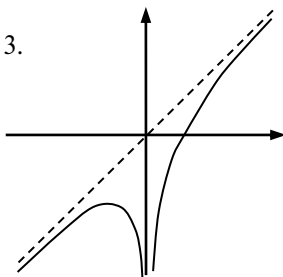
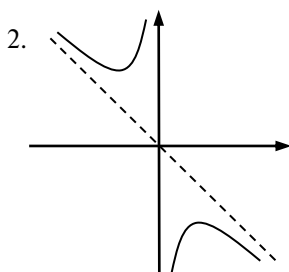
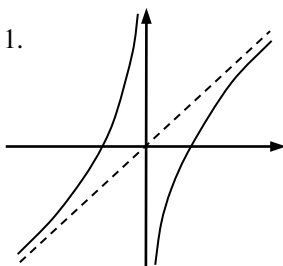
д) $\frac{x^3+1}{x^2}$

е) $\frac{x^3-1}{x^2}$

ж) $\frac{-x^3+1}{x^2}$

з) $\frac{-x^3-1}{x^2}$

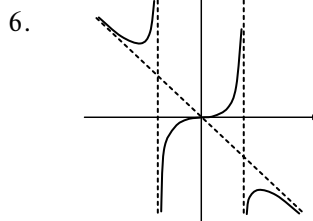
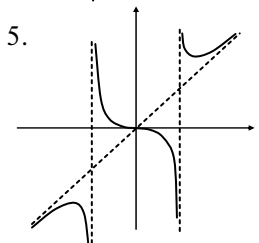
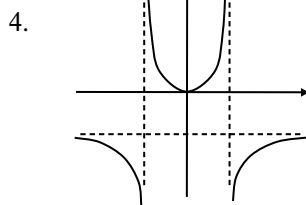
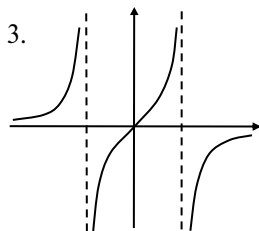
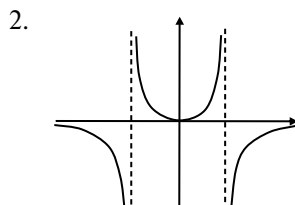
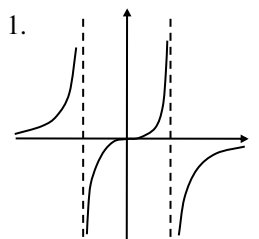
Другая постановка задачи. Напишите **конкретный** пример функции вида $y = ax + \frac{b}{x^n}$, характерные особенности которой отражены на графике (все параметры должны быть заданы). Кратко объясните выбор параметров.



8. Используя характерные признаки, определите, каким функциям наиболее соответствуют приведённые ниже шесть графиков. Объясните. В этом номере ответ может быть неединственным.

а) $\frac{x^5}{1-x^6}$	б) $\frac{x}{1-x^4}$	в) $\frac{x}{x^2+1}$	г) $\frac{x^3}{1-x^3}$	д) $\frac{x^3}{x^2-1}$
е) $\frac{x}{x^4-1}$	ж) $\frac{x^2}{1-x^4}$	з) $\frac{x^2}{x^4-1}$	и) $\frac{x}{1-x^2}$	к) $\frac{x^2}{1-x^2}$
л) $\frac{x^3}{1-x^2}$	м) $\frac{x^2}{x^2-1}$	н) $\frac{x^3}{1-x^4}$	о) $\frac{x^2}{1-x^3}$	п) $\frac{x^3}{x^2+1}$

Другая постановка задачи. Напишите конкретный пример функции вида $y = \frac{x^m}{a+bx^n}$, характерные особенности которой отражены на графике (все параметры должны быть заданы). Кратко объясните выбор параметров.



II. Асимптоты

1. Пользуясь разложением по формуле Маклорена, найдите константы a, b, c , определяемые равенством, и укажите асимптоты графиков соответствующих функций. Можно ли сказать, с какой стороны график подходит к асимптоте (отдельно при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$):

$$1.1. (6x^2 - 4x) \cdot \ln\left(1 - \frac{4}{x}\right) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

$$1.2. (3x^3 - 3x^2) \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x} \right) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

$$1.3. (3x^2 - 3x) \cdot (e^{-2/x} - 1) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

$$1.4. (4x^3 - 4x^2) \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) - \frac{3}{x} \right) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

$$1.5. (6x + 2) \cdot e^{-3/x} = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

$$1.6. (2x^2 + 2x) \cdot (e^{-3/x} - 1) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

2. Найдите все (вертикальные и невертикальные) асимптоты для графиков следующих функций:

$$2.1. y = \frac{x^2 + 6x - 7}{2 - x}$$

$$2.2. y = (2 - x) \cdot e^{9/x}$$

$$2.3. y = \sqrt[3]{-8x^3 + 24x^2}$$

$$2.4. y = \sqrt[4]{x^4 + 12x^3 - x}$$

3. Для каждой из следующих функций определите, имеет ли она наклонную или горизонтальную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$. Определите, с какой стороны график функции подходит к асимптоте, сверху или снизу.

$$3.1. f(x) = \frac{3 - 2x - x^2}{x^2 + 5x - 2}$$

$$3.2. f(x) = \frac{3 - 2x - x^3}{x^2 + 5x - 2}$$

$$3.3. f(x) = \frac{3 - 2x - x^4}{x^2 + 5x - 2}$$

$$3.4. f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$$

$$3.5. f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x^3}$$

$$3.6. f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$$

$$3.7. f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$$

$$3.8. f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^4}$$

$$3.9. f(x) = (3x - x^2) \cdot \sin(1/x)$$

$$3.10. f(x) = (3x - x^2) \cdot \cos(1/x)$$

3.11. $f(x) = (3x - 2) \cdot \cos(1/x)$ 3.12. $f(x) = (3x - x^2) \cdot \arctg(1/x)$

3.13. $f(x) = (3x - x^2) \cdot \operatorname{arctg}(1/x)$ 3.14. $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

3.15. $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{-1/x}$ 3.16. $f(x) = (x - 1) \cdot e^{1/x^2}$

3.17. $f(x) = (x - 2) \cdot e^{-1/x}$ 3.18. $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

3.19. $f(x) = (x - 3) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 3.20. $f(x) = (x^2 - 3) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

3.21*. $f(x) = (3x - 2) \cdot \operatorname{arctg}(1/x)$

4. Дано: $f(x) = -x + 1 - 1/x + o(1)$, $g(x) = -x + 1 - 1/x + o(1/x)$ при $x \rightarrow -\infty$. Что можно сказать о положении графиков этих функций (выше или ниже) относительно прямой $y = -x + 1$ при $x \rightarrow -\infty$? Ответ полностью обоснуйте.

III. Построение графиков с полным исследованием

При построении графиков следует обсуждать (по возможности кратко)

- область определения функции;
- чётность, нечётность, периодичность;
- нули функции, положительность и отрицательность;
- пересечение с осью ординат;
- поведение функции на границе области определения:
предельные значения в граничных точках, характер точек разрыва, вертикальные асимптоты;
горизонтальные и наклонные асимптоты или их отсутствие;
с какой стороны график функции подходит к асимптоте;
- знаки первой производной, участки монотонности и экстремумы;
- поведение функции в окрестности точек недифференцируемости;
- знаки второй производной, направления выпуклости функции, точки перегиба;
- угол вхождения графика в особые точки (например, в начало координат для функции $y = x \ln x$).

Координаты характерных точек (которые могут быть вычислены) следует указывать на графике.

1. $y = -x^2 - 4x - 3$

2. $y = 6x^2 - x^3$

3. $y = x^3 - 12x$

4. $y = x^3 - 6x^2 - 5x$

5. $y = \frac{6-3x}{x+1}$

7. $y = x + \frac{1}{x}$

9. $y = x + \frac{1}{x^2}$

11. $y = \frac{15-2x-x^2}{x+6}$

13. $y = \frac{x^2-x-6}{x^2-1}$

15. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$

17. $y = \frac{(x-2)^2(x-4)}{x^2}$

19. $y = \frac{x^2(x-2)}{(x+2)^2}$

21. $y = \sqrt[3]{8x^3-24x^2}$

23. $y = x \cdot \sqrt[3]{x-3}$

25. $y = x \cdot e^x$

27. $y = x^2 \cdot e^x$

29. $y = (2x^2 - x^3) \cdot e^{-x}$

31. $y = e^{1/x}$

33. $y = e^{2x-x^2}$

35. $y = \frac{x-6}{x-10} \cdot e^{x/5}$

37. $y = (2-x) \cdot e^{9/x}$

39. $y = x \cdot \ln x$

41. $y = x \cdot \ln^2 x$

43. $y = \frac{\ln x}{x}$

45. $y = \frac{(2-\ln x)^2}{x}$

47. $y = \frac{x}{2-\ln x}$

6. $y = \frac{6-4x}{6x-9}$

8. $y = x - \frac{1}{x}$

10. $y = -x + \frac{1}{x^2}$

12. $y = \frac{x^2-8x+7}{x+1}$

14. $y = \frac{x^3-8}{x}$

16. $y = \frac{x^3+4x+16}{x}$

18. $y = \frac{(x-1) \cdot (x+2)^2}{x^2}$

20. $y = \frac{(x+4)(x^2-2x+8)}{x^2}$

22. $y = \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{x+2}$

24. $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$

26. $y = (x+3) \cdot e^{-x}$

28. $y = (4x-3x^2) \cdot e^{2x}$

30. $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^x$

32. $y = e^{-x^2}$

34. $y = \frac{1}{x+1} \cdot e^{-x}$

36. $y = x \cdot e^{1/x}$

38. $y = (3-x) \cdot e^{-4/x}$

40. $y = x^2 \cdot \ln x$

42. $y = x^2 \cdot \ln^2 x$

44. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$

46. $y = \frac{x}{\ln x}$

48. $y = \ln(e^{-2x} - 2e^{-x} + 2)$

49. $y = \sin x^2$

50. $y = \sin(1/x)$

51. $y = \frac{\sin x}{x}$

52. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$

53. $y = (x-1) \cdot \operatorname{arctg} x$

54. $y = 3x + \operatorname{arctg} x$

55. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$

Дополнительные задачи на построение графиков.

56. $y = \frac{x^2 + 6x - 7}{2 - x}$

57. $y = \frac{12 + 4x - x^2}{x + 3}$

58. $y = \frac{x^2 + 7x + 10}{x - 1}$

59. $y = \frac{x^2}{2 - x}$

60. $y = \frac{x^4}{x^3 - 2}$

61. $y = \frac{(x+2) \cdot (x-4)^2}{x^2}$

62. $y = \frac{(x+2)^2(3-x)}{x^2}$

63. $y = \frac{(x-2)^2 \cdot x}{(x-4)^2}$

64. $y = \frac{x^2(x+5)}{(x+2)^2}$

65. $y = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2}$

66. $y = \frac{(x+2)(-x^2 + x - 2)}{x^2}$

67. $y = \frac{(1-x)(x^2 + 4x + 4)}{x^2}$

68. $y = \sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^3}$

69. $y = (2-x) \cdot e^{2x}$

70. $y = x^3 \cdot e^x$

71. $y = x^4 \cdot e^{-x}$

72. $y = (3x - 2x^2) \cdot e^{-x}$

73. $y = (1 - 2x - 3x^2) \cdot e^{2x}$

74. $y = (2x^2 - x - 1) \cdot e^{-x}$

75. $y = (x^3 + x^2) \cdot e^{2x}$

76. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot e^{-x}$

77. $y = \sqrt[3]{x} \cdot e^{-x}$

78. $y = (x+1) \cdot e^{-x^2}$

79. $y = x^3 \cdot e^{-x^2}$

80. $y = e^{x^3}$

81. $y = x \cdot e^{x^3}$

82. $y = e^{2x} - (e^4 + e) \cdot e^x + e^5$

83. $y = (e^x - e)(e^x - e^2)$

84. $y = e^{-2x} - (e^{-3} + e^{-1}) \cdot e^{-x} + e^{-4}$

85. $y = \frac{e^x}{x-2}$

86. $y = \frac{e^{2x}}{x+1}$

87. $y = \frac{9}{x-3} \cdot e^{-x}$

88. $y = x \cdot e^{\left(\frac{9}{2-x}\right)}$

89. $y = x \cdot e^{\left(\frac{4}{x-3}\right)}$

90. $y = (x+4) \cdot e^{2/x}$

91. $y = x \cdot (\ln x + 2)$

92. $y = (x-1) \cdot \ln(1-x)$

94. $y = x \cdot (\ln x - 1)^2$

96. $y = \frac{\ln(-x)}{x}$

98. $y = \frac{x}{\ln x + 1}$

100. $y = \ln(e^{2x} - 2e^x + 2)$

93. $y = x^2 \cdot (1 - \ln x)$

95. $y = x^2 \cdot \ln^2(-x)$

97. $y = \frac{1 - \ln x}{x}$

99. $y = \frac{x-2}{\ln(2-x)}$

101. $y = \ln(3x^2 - 2x^3)$

Другие задачи

- Оцените точность, с которой можно вычислить $\sin(1/2)$, используя разложение по формуле Маклорена до x^3 .
- До какой степени нужно разложить по формуле Маклорена функцию, чтобы вычислить $\cos 1$ с точностью до 10^{-4} ? Тот же вопрос для $\cos 2$, $\cos(1/3)$.
- Вычислите $\ln(4/3)$, $\sqrt{35}$, $\sqrt[5]{33}$, $\sqrt{e}$ с точностью до 10^{-4} .
- Доопределите функцию по непрерывности в точке устранимого разрыва и вычислите, используя определение, первую и вторую производные в этой точке.

4.1. $f(x) = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$

4.1. $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}-1}{x-2}$

4.2. $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{2x}$

4.3. $f(x) = \frac{\ln(4-x)}{x-3}$

4.4. $f(x) = \frac{\ln x}{1-x}$

4.5. $f(x) = \frac{\ln(2x-5)}{x-3}$

4.6. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-15}-1}{x-4}$

4.7. $f(x) = \frac{\ln(2x-3)-\ln 5}{x-4}$

4.8. $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

4.10. $f(x) = \frac{e^x - e^2}{x-2}$

- Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x = -2$.
- Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^4$ в точке $x = -3$.
- Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^x$ в точке $x = -1$.

8. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2$, параллельной отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами $x = -1$ и $x = -5$.
9. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3$, параллельной отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами $x = 1$ и $x = 4$.
10. Существует ли касательная к графику функции, задаваемой условиями $f(x) = x^2 - x$ при $x \geq 2$, $f(x) = (x-1)^3 + 2$ при $x < 2$, в точке $x = 2$? Если существует – напишите уравнение.

Неопределённый интеграл.

Ориентировочный список упражнений на неопределённый интеграл из Сборника задач Б.П. Демидовича.

№№ 1628, 1630, 1631, 1633, 1639, 1640, 1641, 1646, 1647, 1650, 1655, 1656, 1657, 1658, 1659, 1661, 1662, 1663, 1664, 1667, 1668, 1669, 1674, 1675, 1676, 1677, 1678, 1679, 1681, 1690, 1693, 1694, 1695, 1697, 1698, 1700, 1702, 1704, 1709, 1710, 1716, 1721, 1721.1, 1723, 1724, 1731, 1734, 1741, 1748, 1750, 1752, 1755, 1756, 1757, 1758, 1759, 1766, 1773, 1780, 1791, 1795, 1797, 1798, 1799, 1803, 1804, 1808, 1837, 1838, 1840, 1847, 1849, 1851, 1852, 1866, 1867, 1871, 1872, 1877, 1878, 1879, 1881, 1882, 1926, 1991, 1992, 1994, 1997, 1998, 2000, 2001, 2002, 2003, 2006, 2025, 2032, 2083, 2087, 2169, 2174, 2175.

Теоретические вопросы и задачи по разделу «Производные и их применение»

1. Приведите пример функции, имеющей производную в точке и разрывной во всех точках некоторой проколотой окрестности точки $x = a$.
2. Приведите пример функции, не имеющей производной в точке $x = a$.
3. Приведите пример функции, дифференцируемой ровно в одной точке.
4. Приведите пример функции, не дифференцируемой ни в одной точке.
5. Приведите пример непрерывной функции, не дифференцируемой ровно в двух точках.
6. Приведите пример двух функций, сумма которых дифференцируема, но не равна сумме производных.
7. Приведите пример функции, имеющей положительную производную в некоторой точке и не являющейся монотонной ни в какой окрестности этой точки.
8. Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале $(2; 5)$ и ограничена снизу на этом интервале. Докажите, что существует $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x)$.

9. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и её график расположен между прямыми $y = x + 3$ и $y = 2x + 2$.
- а) Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$?
 - б) Что можно сказать о производной функции $f(x)$ в этой точке (дайте полный и обоснованный ответ)?
10. Известно, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(-5, 3)$. При этом $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$ и $\forall x \in (-5, 3) \quad -2 < f''(x) < 2$.
- а) В каких пределах заключено значение функции $f(2)$?
 - б) В каких пределах заключено значение функции $f(-4)$?
 - в) Может ли быть $f(2) > 1/2$? Как обосновать ответ?
 - г) Обязательно ли $f(2) < -1$? Как обосновать ответ?
 - д) Обязательно ли $f(2) < 1/2$? Как обосновать ответ?
 - е) Может ли быть $f(-4) > 27$? Как обосновать ответ?
 - ж) Может ли быть $f(-4) < -20$? Как обосновать ответ?
 - з) Обязательно ли $f(-4) < 33$? Как обосновать ответ?
11. Известно, что функция $f(x)$ трижды дифференцируема на интервале $(-5, 3)$. При этом $f(-1) = -1$, $f'(-1) = 2$, $f''(-1) = 2$ и $\forall x \in (-5, 3) \quad 2 \leq f'''(x) \leq 4$.
- а) В каких пределах заключено значение функции $f(2)$?
 - б) В каких пределах заключено значение функции $f(-4)$?
 - в) Может ли быть $f(2) > 33$? Как обосновать ответ?
 - г) Обязательно ли $f(2) > 21$? Как обосновать ответ?
 - д) Обязательно ли $f(2) < 27$? Как обосновать ответ?
 - е) Может ли быть $f(-4) < -21$? Как обосновать ответ?
 - ж) Может ли быть $f(-4) > -9$? Как обосновать ответ?
 - з) Обязательно ли $f(-4) < -13$? Как обосновать ответ?
12. Известно, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(1, 8)$. При этом $f(4) = 4$, $f'(4) = 6$ и $\forall x \in (1, 8) \quad 3 \leq f''(x) \leq 3,2$.
- а) В каких пределах заключено значение функции $f(2)$?
 - б) В каких пределах заключено значение функции $f(7)$?
 - в) Может ли быть $f(2) < -1$? Как обосновать ответ?
 - г) Обязательно ли $f(2) > -1,8$? Как обосновать ответ?
 - д) Обязательно ли $f(2) < -2,2$? Как обосновать ответ?
 - е) Может ли быть $f(7) > 36,6$? Как обосновать ответ?
 - ж) Может ли быть $f(7) > 35,8$? Как обосновать ответ?
 - з) Обязательно ли $f(7) < 35$? Как обосновать ответ?
 - и) В каких пределах заключена погрешность при вычислении значения функции $f(x)$ на интервале $(1, 8)$ с помощью многочлена Тейлора второй степени?

- к) В каких пределах заключены значения функции $f(x)$ на интервале $(1, 8)$
13. Известно, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(1, 8)$. При этом $f(4) = 4$, $f'(4) = 6$ и $\forall x \in (1, 8) \quad 3 \leq f''(x) \leq 4$.
- а) В каких пределах заключены значения функции $f'(x)$ на интервале $(1, 8)$?
- б) Может ли быть $f'(2) > 1$? Как обосновать ответ?
- в) Обязательно ли $f'(2) < 1$? Как обосновать ответ?
- г) Обязательно ли $f'(2) < -1$? Как обосновать ответ?
- д) Может ли быть $f'(7) > 6\pi$? Как обосновать ответ?
- е) Может ли быть $f'(7) < \sqrt{290}$? Как обосновать ответ?
- ж) Обязательно ли $f'(7) < 17$? Как обосновать ответ?
14. Известно, что функция $f(x)$ трижды дифференцируема на интервале $(1, 8)$. При этом $f(5) = 1$, $f'(5) = -2$, $f''(5) = 2$ и $\forall x \in (1, 8) \quad -3 \leq f'''(x) \leq -2$.
- а) В каких пределах заключено значение функции $f(2)$?
- б) В каких пределах заключено значение функции $f(7)$?
- в) Может ли быть $f(2) > 27$? Как обосновать ответ?
- г) Обязательно ли $f(2) < 24$? Как обосновать ответ?
- д) Обязательно ли $f(2) > 27$? Как обосновать ответ?
- е) Может ли быть $f(7) < -\sqrt{3}$? Как обосновать ответ?
- ж) Может ли быть $f(7) > -\sqrt{2}$? Как обосновать ответ?
- з) Обязательно ли $f(7) < -e$? Как обосновать ответ?
- и) В каких пределах заключена погрешность при вычислении значения функции $f(x)$ на интервале $(1, 8)$ с помощью многочлена Тейлора второй степени?
- к) В каких пределах заключены значения функции $f(x)$ на интервале $(1, 8)$
15. Применима ли теорема Лагранжа о конечном приращении к функции $f(x) = \sqrt{2(x-1)^2 + (x-1)^3}$ на отрезке $[0; 3]$? Обоснуйте.
16. Применима ли теорема Лагранжа о конечном приращении к функции $f(x) = (x-1)^{2/3}$ на отрезке $[0; 65]$? Обоснуйте.
17. Применима ли теорема Лагранжа о конечном приращении к функции $f(x) = \sqrt[3]{x} - \pi \cdot \sin x$ на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$? Обоснуйте.
18. Пусть $f(x) = 1 + x + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$ и $f(0) = 1$. Обязательно ли существует $f'(0)$? Если существует, то каково её значение? Аналогичный вопрос про $f''(0)$.
19. Докажите, что если нечётная функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$, то $a_0 = a_2 = 0$.

20. Докажите, что если чётная функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$, то $a_1 = a_3 = 0$.
21. Функция $H(x)$ нечётна, дифференцируема в точке $x = 2$ и $H'(2) = 4$. Используя определение производной, выясните, дифференцируема ли она в точке $x = -2$, если да, то найдите $H'(-2)$.
22. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$ и $f(a) > 0$. Докажите, не используя теорему о производной сложной функции, что функция $g(x) = \ln f(x)$ также дифференцируема в точке $x = a$.
23. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$. Докажите, не используя теорему о производной сложной функции, что функция $g(x) = e^{f(x)}$ также дифференцируема в точке $x = a$.
24. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$. Докажите, не используя теорему о производной сложной функции, что функция $g(x) = \sin f(x)$ также дифференцируема в точке $x = a$.
25. Вычислите, используя определение, первую производную функции
 - а) $f(x) = \cos(3x + 4)$ б) $f(x) = \sin(5 - 6x)$
 - в) $f(x) = (3 - 4x)^2$ г) $f(x) = e^{3-2x}$ д) $f(x) = \frac{1}{1+3x}$.
26. Выведите формулу производной для функции $f(x) = \sin 3x^2$, используя определение производной и не используя формулы производной сложной функции.
27. Существует ли касательная к графику функции $f(x) = e^x - 1$ при $x \geq 0$, $f(x) = \arctg x$ при $x < 0$ в точке $x = 0$? Если существует, то напишите уравнение.
28. Исследуйте функцию $f(x) = \sqrt[3]{x-4} \cdot \ln(x-3)$ на дифференцируемость в точке $x = 4$.
29. Известно, что $f(2) = 4$ и $\forall x \quad f(x) \leq x^2 - |x - 2|$. Докажите, что $f(x)$ не дифференцируема в точке $x = 2$.
30. Известно, что $f(4) = 1$ и $\forall x \quad f(x) \geq 2x + |x - 4| - 7$. Докажите, что $f(x)$ не дифференцируема в точке $x = 4$.
31. Существуют ли $f'(0)$, $f''(0)$ и $f'''(0)$, если $f(x) = x^2 \cdot |\sin x|$?
32. Существуют ли $f'(0)$, $f''(0)$ и $f'''(0)$, если $f(x) = |x^3 - x^4|$?
33. Исследуйте функцию $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ на дифференцируемость на всей области определения. Вычислите $f'_+(1)$.
34. Исследуйте функцию $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ на дифференцируемость на всей области определения. Вычислите $f'_-(0)$.

35. Функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условиям

а) $f(x) = 2x + 1 + o((x-2)^{1/3})$ при $x \rightarrow 2$, $f(2) = 5$,

б) $g(x) = 4x - 1 + o(x-2)$ при $x \rightarrow 2$, $g(2) = 5$,

в) $h(x) = 3x - 1 + o((x-2)^{5/3})$ при $x \rightarrow 2$, $h(2) = 5$.

Проведите полное исследование этих функций на дифференцируемость в точке $x = 2$.

36. Функция $f(x)$ определена в точке $x = 5$ и имеет в этой точке разрыв первого рода. Используя определение производной, докажите, что функция $g(x) = (x-5)^2 f(x)$ имеет производную в точке $x = 5$.

37. Функция $f(x)$ определена в точке $x = 4$ и имеет в этой точке неустраняемый разрыв первого рода. Используя определение производной, докажите, что функция $g(x) = (x-4)f(x)$ не имеет производной в точке $x = 4$.

38. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(0, +\infty)$ и $f(x) = o(1/x^2)$ при $x \rightarrow +\infty$. Следует ли из этого, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$?

39. **Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(0, +\infty)$ и $f(x) \geq x^2$ на этом промежутке. Следует ли из этого, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$?

40. **Пусть функция $f(x)$ на промежутке $(0, +\infty)$ дважды дифференцируема и $f(x) \geq 1/x^2$. Следует ли из этого, что $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = -\infty$?

41. Докажите, что сумма двух функций $g(x)$ и $h(x)$, строго выпуклых на интервале $(a; b)$, является функцией, строго выпуклой на интервале $(a; b)$.

42. Докажите, что сумма двух выпуклых (не обязательно гладких) на интервале функций выпукла на этом интервале. Можно ли то же утверждать о разности?

43. Докажите, что сумма двух выпуклых дважды дифференцируемых на интервале функций выпукла на этом интервале.

44. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[2; 4]$, дважды дифференцируема на интервале $(2; 4)$ и $f(3) < \frac{f(2) + f(4)}{2}$. Докажите, что найдётся такая точка $c \in (2; 4)$, что $f''(c) > 0$.

45. Для каждой из следующих функций определите, является ли она дифференцируемой в точке $x = 0$, является ли она дважды дифференцируемой в точке $x = 0$, а также определите, является ли она выпуклой на интервале $(-1, 1)$.

45.1. $f(x) = x$ при $x < 0$; $f(x) = 2x$ при $x \geq 0$

45.2. $f(x) = 2x$ при $x < 0$; $f(x) = x$ при $x \geq 0$

45.3. $f(x) = -x$ при $x < 0$; $f(x) = 2x$ при $x \geq 0$

45.4. $f(x) = x$ при $x < 0$; $f(x) = x^2$ при $x \geq 0$

45.5. $f(x) = x^2$ при $x < 0$; $f(x) = x$ при $x \geq 0$

45.6. $f(x) = x^2$ при $x < 0$; $f(x) = x^3$ при $x \geq 0$

45.7. $f(x) = x^3$ при $x < 0$; $f(x) = x^2$ при $x \geq 0$

45.8. $f(x) = -x^3$ при $x < 0$; $f(x) = x^2$ при $x \geq 0$

45.9. $f(x) = -x$ при $x < 0$; $f(x) = x^3$ при $x \geq 0$

45.10. $f(x) = x^4$ при $x < 0$; $f(x) = x^3$ при $x \geq 0$

45.11. $f(x) = e^x - 1$ при $x < 0$; $f(x) = x$ при $x \geq 0$

45.12. $f(x) = e^x - 1$ при $x < 0$; $f(x) = 2x$ при $x \geq 0$

45.13. $f(x) = e^{2x} - 1$ при $x < 0$; $f(x) = x$ при $x \geq 0$

45.14. $f(x) = e^{-x} - 1$ при $x < 0$; $f(x) = x^2$ при $x \geq 0$

45.15. $f(x) = x^2$ при $x < 0$; $f(x) = 1 - e^{-x^2}$ при $x \geq 0$

45.16. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x < 0$; $f(x) = x$ при $x \geq 0$

45.17. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x < 0$; $f(x) = 2x$ при $x \geq 0$

45.18. $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$ при $x < 0$; $f(x) = x$ при $x \geq 0$

45.19. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x < 0$; $f(x) = x^2$ при $x \geq 0$

45.20. $f(x) = 1 - x$ при $x < 0$; $f(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x \geq 0$

45.21. $f(x) = \sin x$ при $x < 0$; $f(x) = x$ при $x \geq 0$

45.22. $f(x) = \sin^2 x$ при $x < 0$; $f(x) = x^2$ при $x \geq 0$

45.23. $f(x) = \sin x^2$ при $x < 0$; $f(x) = x^2$ при $x \geq 0$

45.24. $f(x) = |x^2 + 3x - 1|$

45.25. $f(x) = |x^2 + 2x|$

45.26. $f(x) = x \cdot \cos(1/x)$ при $x \neq 0$; $f(0) = 0$

45.27. $f(x) = x^2 \cdot \cos(1/x)$ при $x \neq 0$; $f(0) = 0$

45.28. $f(x) = x^2 \cdot \sin(1/x)$ при $x \neq 0$; $f(0) = 1$

45.29. $f(x) = x^3 \cdot \sin(1/x)$ при $x \neq 0$; $f(0) = 1$

45.30. $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{arctg}(1/x)$ при $x \neq 0$; $f(0) = 1$

45.31. $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}(1/x)$ при $x \neq 0$; $f(0) = 1$

45.32. $f(x) = x \cdot D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле.

45.33. $f(x) = x^2 \cdot D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле.

46. Функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условиям

а) $f(x) = 2x + 1 + o((x-2)^{1/3})$ при $x \rightarrow 2$, $f(2) = 5$,

б) $g(x) = 4x - 1 + o(x-2)$ при $x \rightarrow 2$, $g(2) = 5$,

в) $h(x) = 3x - 1 + o((x-2)^{5/3})$ при $x \rightarrow 2$, $h(2) = 5$.

Проведите полное исследование этих функций на дифференцируемость в точке $x = 2$.

47. Даны три функции:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \frac{1}{1-x}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{x/2}, & x < 0 \\ \frac{1}{1-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad h(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x < 0 \\ \frac{2}{1-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

а) Являются ли эти функции дифференцируемыми в точке $x = 0$?

б) Являются ли эти функции дважды дифференцируемыми в точке $x = 0$?

в) Являются ли эти функции выпуклыми на интервале $(-1, 1)$?

г) Напишите, если это возможно, уравнение касательной к графику функции в точке $x = 0$.

д) Напишите, если это возможно, дифференциал функции в точке $x = 0$.

48. Даны три функции:

$$f(x) = \begin{cases} \arctg x, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \arctg x + 1, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$
$$h(x) = \begin{cases} \arctg x, & x < 0 \\ e^{2x} - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

а) Являются ли эти функции дифференцируемыми в точке

б) Являются ли эти функции дважды дифференцируемыми в точке $x = 0$?

в) Являются ли эти функции выпуклыми на интервале $(-1, 1)$?

г) Напишите, если это возможно, уравнение касательной к графику функции в точке $x = 0$.

д) Напишите, если это возможно, дифференциал функции в точке $x = 0$.

49. Докажите, используя определение, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctg x}{x}, & x \neq 0 \\ 9/10, & x = 0 \end{cases} \quad \text{имеет минимум в точке } x = 0.$$

50. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ имеет точку максимума

$x = 0$.

51. **Приведите пример функции, определенной и дифференцируемой на отрезке, обратная к которой дифференцируема не на всей своей области определения.
52. **Докажите, что у функции $f(x) = x^5 \cdot \sin x \cdot e^{-x^2}$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$ есть наибольшее значение.
53. **Имеет ли функция $f(x) = 3\sin x + x^2$ локальные экстремумы
 а) на множестве $(0, +\infty)$? б) на множестве $(-\infty, 0)$?
54. Для каждой из следующих функций определите, имеет ли она локальные экстремумы на промежутке $(0, +\infty)$. Уточните, по возможности, характер экстремумов. Имеет ли функция наибольшее и наименьшее значение на этом промежутке?

а) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, б) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$, в) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

г) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, д) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$, е) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x}$

55. Напишите формулу Маклорена для функции $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ с точностью до $o(x^3)$.
56. Напишите формулу Маклорена для функции $f(x) = \frac{1}{(1+3x)^2}$ с точностью до $o(x^2)$.
57. Напишите формулу Маклорена для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ с точностью до $o(x^3)$.
58. Разложите функцию $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 12$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.
59. Оцените точность, с которой можно вычислить $\sin(1/2)$, используя разложение по формуле Маклорена до третьей степени.
60. Пусть $f(x) = x^3 \cdot e^{x^2}$. Используя формулу Маклорена, найдите $f^{(101)}(0)$ и $f^{(102)}(0)$.
61. Пусть $f(x) = x^{100} \cdot \sin x$. Найдите $f^{(2024)}(0)$ и $f^{(2025)}(0)$.
62. Пусть $f(x) = (x-1)^3 \cdot \ln x$. Найдите $f^{(101)}(1)$.

63. Укажите, какие из следующих утверждений верны. Ответ обоснуйте.

- 63.1. Если $f(x) = 2x - 1 + o(1)$ при $x \rightarrow 4$ и $f(4) = 7$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 4$.
- 63.2. Если $f(x) = 2x - 1 + o(1)$ при $x \rightarrow 4$ и $f(4) = 7$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 4$.
- 63.3. Если $f(x) = 2x - 4 + o(x - 3)$ при $x \rightarrow 3$ и $f(3) = 2$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 3$.
- 63.4. Если $f(x) = 2x - 4 + o(x - 3)$ при $x \rightarrow 3$ и $f(3) = 2$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 3$.
- 63.5. Если функция $f(x)$ определена и ограничена в некоторой окрестности точки $x = 0$, то функция $g(x) = x \cdot f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$.
- 63.6. Если функция $f(x)$ определена и ограничена в некоторой окрестности точки $x = 0$, то функция $g(x) = x \cdot f(x)$ не дифференцируема в точке $x = 0$.
- 63.7. Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ неустранимый разрыв первого рода и определена в самой точке $x = a$, то функция $g(x) = (x - a) \cdot f(x)$ не дифференцируема в точке $x = a$.
- 63.8. Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ неустранимый разрыв первого рода и определена в самой точке $x = a$, то функция $g(x) = (x - a)^2 \cdot f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$.
- 63.9. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке, то функция $f(x) + g(x)$ не дифференцируема в точке $x = a$.
- 63.10. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке, то функция $f(x) + g(x)$ может быть дифференцируемой в точке $x = a$.
- 63.11. Сумма двух не дифференцируемых в точке $x = a$ функций является функцией, не дифференцируемой в этой точке.
- 63.12. Сумма двух не дифференцируемых в точке $x = a$ функций может быть функцией, дифференцируемой в этой точке.
- 63.13. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке, то функция $f(x) \cdot g(x)$ не дифференцируема в точке $x = a$.
- 63.14. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке, то функция $f(x) \cdot g(x)$ может быть дифференцируемой в точке $x = a$.
- 63.15. Произведение двух не дифференцируемых в точке $x = a$ функций может быть функцией, дифференцируемой в этой точке.

63. Укажите, какие из следующих утверждений верны.

- 63.16. Произведение двух не дифференцируемых в точке $x = a$ функций является функцией, не дифференцируемой в этой точке.
- 63.17. Если $f'(a) > 0$, то $\forall x > a \quad f(x) > f(a)$.
- 63.18. Если $f'(a) > 0$, то $\exists x > a : f(x) > f(a)$.
- 63.19. Если $f'(a) > 0$, то $\exists U(a) : \forall (x \in U(a) : x > a) \quad f(x) > f(a)$.
- 63.20. Если $f'(a) < 0$, то функция $f(x)$ убывает в некоторой окрестности точки $x = a$.
- 63.21. Если $f'(a) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в некоторой окрестности точки $x = a$.
- 63.22. Если функция $f(x)$ возрастает в некоторой окрестности точки $x = a$ и дифференцируема в точке $x = a$, то $f'(a) > 0$.
- 63.23. Если функция $f(x)$ убывает в некоторой окрестности точки $x = a$ и дифференцируема в точке $x = a$, то $f'(a) \leq 0$.
- 63.24. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$ и для любого $x > a$ выполнено неравенство $f(x) - f(a) < x - a$, то $f'(a) < 1$.
- 63.25. Существует функция $f(x)$ такая, что для любого $x < a$ выполнено неравенство $f(x) - f(a) < x - a$, и при этом $f'(a) > 1$.
- 63.26. Существует такая функция $f(x)$, что для любого $x > a$ выполнено неравенство $f(x) - f(a) < x - a$, и при этом $f'(a) = 1$.
- 63.27. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.
- 63.28. Если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ убывает на этом интервале, то $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < 0$.
- 63.29. Если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастает на этом интервале, то $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$.
- 63.30. Если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастает на этом интервале, то $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0$.
- 63.31. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\exists x \in (a, b) : f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.
- 63.32. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале и $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) \geq 0$, то функция $f(x)$ выпукла на этом интервале.
- 63.33. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$, то функция $f(x)$ выпукла на этом интервале.

63. Укажите, какие из следующих утверждений верны.

- 63.34. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) < 0$, то функция $f(x)$ выпукла на этом интервале.
- 63.35. Если дважды дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ строго выпукла на этом интервале, то $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$.
- 63.36. Если дважды дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ строго выпукла на этом интервале, то $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) \geq 0$.
- 63.37. Если график функции $f(x)$ на интервале (a, b) лежит не ниже касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке $c \in (a, b)$, то функция выпукла на этом интервале.
- 63.38. Если график функции $f(x)$ на интервале (a, b) лежит не ниже касательной, проведенной к графику функции в любой точке $c \in (a, b)$, то функция выпукла на этом интервале.
- 63.39. Если функция $f(x)$ выпукла на интервале (a, b) то она имеет минимум на этом интервале.
- 63.40. Если $f''(a) > 0$, то $x = a$ — точка локального минимума функции $f(x)$.
64. В следующих задачах необходимо указать, как соотносятся между собой утверждения (1) и (2):
- (А) — если (1) $\Leftrightarrow$ (2)
- (Б) — если (1) $\Rightarrow$ (2), но (2) $\neq \Rightarrow$ (1)
- (В) — если (2) $\Rightarrow$ (1), но (1) $\neq \Rightarrow$ (2)
- (Г) — если утверждения (1) и (2) друг друга исключают
- (Д) — если ни один из предыдущих вариантов ответа не верен
- 64.1. Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a .

(1) Функция $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ имеет неустранимый разрыв 1-го рода в точке a .

(2) Функция $f(x)$ непрерывна в точке a .

64.2. Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a .

(1) Функция $f(x)$ разрывна в точке a .

(2) Функция $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ имеет устранимый разрыв в точке a .

- 64.3. Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a .
- (1) Функция $f(x)$ дифференцируема в точке a .
 - (2) Функция $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ имеет в точке a разрыв 1-го рода (устранимый или неустранимый).
- 64.4. Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a .
- (1) $f'(a) = 0$.
 - (2) $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и $f(x) = C + o(x-a)$ при $x \rightarrow a$, где C — некоторая константа.
- 64.5. Функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(-1; 3)$
- (1) $\forall x \in (-1; 3) \quad |f'(x)| \geq 1$.
 - (2) $\exists (x_1, x_2 \in (-1; 3) : x_1 \neq x_2) : |f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$.
- 64.6. Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1; 3)$
- (1) $\exists x \in (-1; 3) : f'(x) > 3$.
 - (2) $\forall (x_1, x_2 \in (-1; 3) : x_1 < x_2) \quad f(x_2) - f(x_1) < 3(x_2 - x_1)$
- 64.7. Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1; 3)$
- (1) $\forall x \in (-1; 3) \quad f'(x) < 1$
 - (2) $\forall (x_1, x_2 \in (-1; 3) : x_1 < x_2) \quad f(x_2) - f(x_1) < (x_2 - x_1)$
- 64.8. Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1; 3)$
- (1) $\exists x \in (-1; 3) : |f'(x)| > 2$
 - (2) $\exists (x_1, x_2 \in (-1; 3) : x_1 \neq x_2) : |f(x_2) - f(x_1)| > 2 |x_2 - x_1|$.
- 64.9. Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1; 3)$.
- (1) Функция $f(x)$ вогнута (выпукла вверх) в некоторой окрестности точки $x = 0$.
 - (2) $x = 0$ — точка строгого минимума функции $f(x)$.
- 64.10. $f(x)$ — дважды дифференцируема в точке x_0 .
- (1) В некоторой проколотой окрестности точки x_0 график лежит над касательной, проведённой в точке x_0 .
 - (2) $f''(x_0) > 0$
- 64.11. Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1; 1)$.
- (1) $\forall x_0 \in (-1; 1)$ график $y = f(x)$ на интервале $(-1; 1)$ лежит строго выше (кроме точки касания) касательной, проведённой к нему в точке x_0 .
 - (2) $f'(x)$ возрастает на интервале $(-1; 1)$.
- 64.12. (1) Функция $f(x)$ имеет не более одной точки минимума на интервале $(a; b)$.
- (2) Функция $f(x)$ строго выпукла (вниз) на интервале $(a; b)$.

- 64.13. $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $\exists x_0 \in (a; b) : f'(x_0) < 0$.
- (1) $f(x)$ убывает на интервале $(a; x_0)$.
 - (2) $\forall x \in (a; x_0) \quad f''(x) \geq 0$.
- 64.14. $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $\exists x_0 \in (a; b) : f'(x_0) = 0$.
- (1) $\forall x \in (x_0; b) \quad f''(x) > 0$.
 - (2) $f(x)$ строго убывает в интервале $(x_0; b)$.
- 64.15. $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $\exists x_0 \in (a; b) : f'(x_0) = 0$.
- (1) $f(x)$ является неубывающей в интервале $(a; x)$.
 - (2) $\forall x \in (a; x_0) \quad f''(x) \geq 0$.
- 64.16. $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $\exists x_0 \in (a; b) : f'(x_0) = 0$.
- (1) $f(x)$ является неубывающей в интервале $(a; x_0)$.
 - (2) $\forall x \in (a; x_0) \quad f''(x) < 0$.
- 64.17. Функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на промежутке $(0, +\infty)$ и бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$, а также $g'(x) < 0$ при всех $x > 0$.
- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ не существует.
 - (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует.
- 64.18. (1) $\frac{f(x)}{x} = \frac{C}{x} + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$, где C — некоторая константа.
- (2) $f(x)$ локально ограничена при $x \rightarrow +\infty$.
- 64.19. Функция $f(x)$ дифференцируема на всей прямой.
- (1) $f(x) + x$ — бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$.
 - (2) $f'(x) \rightarrow -2$ при $x \rightarrow +\infty$.
- 64.20. (1) $y = 2x - 4$ — асимптота для функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.
- (2) Функция $f(x)$ строго вогнута (строго выпукла вверх) при $x > 0$ и существует $a > 0$, для которого $f(a) > 2a - 3$.
- 64.21. Функция дважды $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1; 1)$.
- (1) Функция $f(x)$ строго вогнута на интервале $(-1; 1)$.
 - (2) Для любого $x \in (-1; 1)$ справедливо неравенство $f''(x) < 0$.

- 64.22. Функция дважды $f(x)$ дифференцируема на интервале $(1; 1)$.
- (1) Функция $f(x)$ строго вогнута на интервале $(1; 1)$.
 - (2) $f'(x)$ (строго) убывает на интервале $(1; 1)$.
- 64.23. Функция дважды $f(x)$ дифференцируема на интервале $(1; 1)$.
- (1) Функция $f(x)$ строго убывает на интервале $(-1; 1)$.
 - (2) $f'(x) < 0$ на интервале $(1; 1)$.

Экзаменационные вопросы по разделу «Производные и их применение»

(В экзаменационном варианте формулировки могут быть изменены)

1. Определение производной. Геометрический, механический и экономический смысл производной. Понятие правой и левой производных. Примеры функций, не имеющих производную в точке.
2. Теоремы о производных суммы и произведения. Теорема о производной отношения.
3. Теорема о производной сложной функции.
4. Вывод производных основных элементарных функций.
5. Производная обратной функции (без доказательства). Вывод производной для функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arccotg} x$.
6. Определение дифференцируемой функции и дифференциала. Геометрический смысл дифференциала.
7. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции одной переменной; единственность дифференциала.
8. Связь понятий непрерывности и дифференцируемости функции.
9. Теоремы о дифференциале суммы, произведения и отношения.
10. Теорема об инвариантности первого дифференциала.
11. Эластичность функции по аргументу, её экономический смысл. Различные формы представления эластичности.
12. Производные и дифференциалы высших порядков, их свойства. Нарушение инвариантности формы второго дифференциала при нелинейной замене переменной.
13. Определение точки максимума, минимума и экстремума функции. Различные виды точек экстремума. Необходимое условие внутреннего локального экстремума (включая теорему Ферма). Является ли это условие достаточным?
14. Теорема Ролля и её геометрический смысл.

15. Теорема Лагранжа о конечных приращениях и её геометрический смысл.
16. Теорема Коши и её геометрический смысл.
17. Формулировка правила Лопиталя для четырёх случаев (доказательство для случая $\frac{0}{0}$).
18. Теорема о формулах Маклорена и Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
19. Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
20. Формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$.
21. Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$.
22. Теоремы о сходимости (по n) остаточного члена в формуле Маклорена для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$.
23. Использование формул Маклорена и Тейлора для приближённых вычислений.
24. Определение монотонности и строгой монотонности функции на интервале. Необходимые условия монотонности и строгой монотонности функции на интервале. Достаточные условия монотонности и строгой монотонности функции на интервале.
25. Достаточное условие наличия и отсутствия внутреннего локального экстремума выраженное через первую производную, для функции, не обязательно дифференцируемой в точке экстремума (достаточное условие первого порядка). Почему оно не является необходимым? Существенность условия непрерывности.
26. Достаточное условие экстремума второго порядка. Является ли оно необходимым?
27. Необходимое условие экстремума второго порядка. Является ли оно достаточным?
28. Достаточное условие экстремума или его отсутствия, выраженное через производные высших порядков.
29. Определения выпуклости и строгой выпуклости функции без предположения о дифференцируемости: геометрическое и аналитическое. Определения вогнутости и строгой вогнутости функции. Неравенство угловых коэффициентов хорд.
30. Непрерывность и односторонняя дифференцируемость выпуклой функции.
31. Необходимые и достаточные условия первого порядка для выпуклости и вогнутости функции (в том числе, для кусочно гладкой).

32. Необходимые и достаточные условия второго порядка для выпуклости и вогнутости.
33. Определение выпуклости через касательные, его эквивалентность исходному определению для дифференцируемой функции.
34. Определение точки перегиба. Необходимое условие точки перегиба, достаточное условие точки перегиба.
35. Лемма о функции, имеющей на интервале нулевую производную. Теорема о функциях, имеющих на интервале одинаковые производные. Понятие первообразной. Понятие неопределённого интеграла.
36. Таблица интегралов.
37. Замена переменной в неопределённом интеграле. Примеры применения.
38. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле. Примеры применения.
39. Интегрирование рациональных дробей. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей (формулировка и практические навыки).
40. Интегрирование кусочно заданных функций.
41. Понятие неберущегося интеграла. Примеры.

Примерная структура и ориентировочные образцы контрольных и экзаменационных работ

Структура письменных работ

Описываемая структура работ примерно отражает сложившуюся практику последних лет. В каждом учебном году порядок прохождения тем, набор контрольных работ, их структура, отводимое на них время, распределение баллов по работам и по вопросам, а также критерии оценок могут быть изменены, о чём студенты информируются в начале семестра.

Экзаменационная оценка выставляется по итогам промежуточного контроля и письменной экзаменационной работы. В течение семестра проводятся три основные контрольные работы: две — по проверке практических навыков (первая и третья) и одна — теоретическая по разделу «Пределы и непрерывность». Кроме того, в течение семестра для проверки и стимулирования освоения теоретического материала проводятся две микроконтрольные. Итоговая экзаменационная работа проводится в сессию.

По каждой из трёх основных контрольных работ установлен минимум, так называемый критерий, набрать который необходимо для того, чтобы работа была зачтена. Если у студента не зачтена хотя бы одна из двух практических контрольных работ (№ 1 или № 3), то он в обязательном порядке пишет на экзамене так называемый спецвариант, включающий в себя практические и самые простые теоретические материалы всего семестра. При этом он заведомо получает оценку не выше, чем «удовлетворительно». Этот же вариант (с теми же возможностями) можно выбрать и добровольно.

Если зачтены практические работы, но не зачтена теоретическая работа (№ 2), студент может писать на экзамене основной вариант, но получает оценку не выше, чем «хорошо».

На экзамене также установлены критерии, необходимые (но не достаточные) для получения той или иной оценки.

Оценка «отлично» выставляется при всех зачѐнных основных контрольных работах, включая теоретическую работу № 2, выполнении критериев по основному варианту на экзамене, а также критерия по общей сумме баллов.

Оценка «хорошо» выставляется при зачѐнных практических контрольных работах, выполнении соответствующих критериев по основному варианту на экзамене, а также соответствующего критерия по общей сумме баллов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в одном из трех случаев:

- на основном варианте при выполнении соответствующих критериев на экзамене, а также соответствующего критерия по общей сумме баллов;
- на спецварианте, при условии выполнения критерия по экзамену;
- на спецварианте, при условии выполнения более низкого экзаменационного критерия, с учётом достаточного количества баллов, набранных за семестр.

Микроконтрольные

За семестр в каждой группе на занятиях проводятся две микроконтрольные, на которых проверяется знание и понимание формулировок основных определений и теорем, а также умение строить соответствующие примеры. В каждой из них необходимо ответить на 10 вопросов. Ориентировочные вопросы для микроконтрольных приведены в настоящем пособии. На каждую работу отводится 20 минут. Проводятся они в октябре и начале декабря.

Контрольная работа № 1

(практическая; пределы и элементы графиков)

Первая работа содержит около 20 задач на тему «Пределы» различного уровня сложности. Большая часть из них рассчитана на применение простейших приёмов и формул вычисления пределов. Более сложные задачи (часть 2 из образца) требуют владения более тонкими навыками и оцениваются большим количеством баллов. Часть задач посвящена графическому отображению предельных свойств функций. Работа проводится во второй половине октября. Время: 1 час 50 минут. Содержание работы соответствует параграфам «Вычисление пределов» и «Дополнительные задачи для подготовки к контрольной № 1».

Контрольная работа № 2

(теоретическая; множества, пределы, непрерывность)

Контрольная работа № 2 проводится ориентировочно в начале ноября. Работа состоит из двух частей; на каждую отводится 1 час 10 минут. Первая часть содержит около 20 тестовых задач, на которые требуется дать ответ без обоснования. Примеры таких вопросов приведены в параграфе «Теоретические вопросы и задачи по разделу «Пределы и непрерывность».

Во второй части требуется на каждый из 6 – 8 теоретических вопросов дать развернутый ответ с обоснованием. Из них 2 – 3 вопроса посвящены формулировке и доказательству теорем. При этом, конечно, следует привести необходимые определения. Дополнительно в этих вопросах может потребоваться обосновать существенность условий теоремы или ответить на вопрос, является ли некоторое условие необходимым или достаточным, и т.д. Примерные вопросы приведены в параграфе «Экзаменационные вопросы по разделу «Пределы и непрерывность». Кроме этого, могут быть предложены несколько задач или вопросов теоретического характера. Ответы на эти вопросы необходимо обосновывать, используя в рассуждениях ссылки на теоремы. Некоторые вопросы могут быть взяты из первой части, но на них потребуется дать обоснованный ответ. Так что, при подготовке к тестовой части не следует заучивать ответы, а каждый раз нужно пытаться обосновать их.

Контрольная работа № 3

(практическая; производные и их применение, графики)

Контрольная работа № 3 проводится в конце семестра, в декабре. Время: 1 час 50 минут. Состоит из двух частей; они пишутся без перерыва.

В первой части предлагаются 4 – 5 задач на вычисление производных и 4 – 5 задач на распознавание функций по характерным особенностям, отражённым на их графиках. Во второй части предлагаются задачи по материалам второй половины семестра, в том числе на вычисление производных первого и второго порядка с использованием определения, уравнение касательной к графику функции, дифференциал функции, на формулы Тейлора или Маклорена с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа, асимптотическое поведение функции, приближённые вычисления и др.

Для подготовки используйте параграф «Задачи по разделу «Производные и их применение».

Экзаменационная работа

Основной вариант.

Основной вариант могут писать студенты, у которых зачтены контрольные работы № 1 и № 3. Итоговая оценка зависит как от результатов экзамена, так и от результатов работы в семестре.

По своей структуре основной вариант похож на теоретическую контрольную № 2. Он состоит из двух частей. Примерное время: 1 час 20 минут + 1 час 50 минут с перерывом.

Первая часть – тестовая, в ней проверяются только ответы, помещённые в таблицу. Состоит примерно из двадцати вопросов.

Во второй части даются развёрнутые ответы с полным обоснованием. Она содержит 7 – 10 теоретических вопросов и задач, а также несколько примеров на неопределённые интегралы.

В основе экзамена лежат материалы параграфов «Экзаменационные вопросы по разделу «Производная и её применение» и «Теоретические вопросы и задачи по разделу «Производная и её применение». В экзамен входят вопросы по ключевым понятиям и теоремам первой половины семестра. Кроме того, предполагается свободное владение всеми практическими навыками, приобретёнными в течение семестра.

Спецвариант.

Спецвариант пишут студенты, претендующие лишь на удовлетворительную оценку. В частности, его обязаны писать те, кому не зачтена хотя бы одна из контрольных № 1 или № 3.

Примерное время: 2 часа.

Спецвариант базируется на материалах контрольных работ № 1 и № 3. В него входят также стандартные задачи на неопределённый интеграл. Кроме того, требуется знание основных определений и формулировок основных теорем из курса.

Ориентировочные образцы вариантов

Важное примечание. Варианты контрольных, которые Вы будете писать, могут и, скорее всего, будут отличаться по структуре и по содержанию от приведённых образцов.

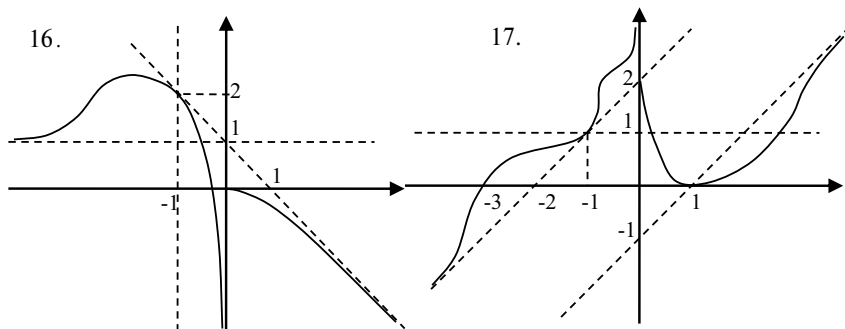
Ориентировочный образец варианта контрольной № 1.

Часть 1. Подробно решить и ответы свести в таблицу.

- Дано: $\operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{1-5\sin^3 x}-1\right) \sim Cx^n$ при $x \rightarrow 0$. Найти C и n .
- $\lim_{x \rightarrow +0} \ln^3 \sqrt{x} \cdot \ln(1-4 \cdot \sqrt[4]{x})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)^{\frac{4}{5-3\ln x}}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln(5x+5e^{-2x}) + \frac{12x+7}{6} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos x^2 - \cos 4}{x-2}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \ln(x-3) \log_{(x/2-1)} 5$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt[5]{4x^3-2x^5}}{\sqrt[4]{16x^4-24x^3+\sin x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \cos \frac{1}{x} + x^{12}}{e^x - 2e^{2x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-2x) \left(\ln^5 x - \frac{1}{\ln(1+7x)} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{3x+4} \right)^{\frac{x+2}{5x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (tg 2x)^{3x+1}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n-1)! - 4(n!) + \cos n) \cdot 3^{n+1}}{(3^n - n!) \cdot 3^{n-1}}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \sqrt[6]{4x}}{\sin(2\sqrt[3]{x-2x})}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} x^4 - 3x^5}{\ln(1+2x^2) + \cos 2x - 1}$

В задачах 16 и 17 по графику определите указанные пределы. В случае бесконечного предела, если это возможно, следует указать знак бесконечности. В случае конечного предела, если это возможно, следует указать на стремление к пределу сверху или снизу, то есть привести ответ в виде $A+0$ или $A-0$.

- | | | |
|--|---|-------------------------------------|
| 16. а) $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x)$ | б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{4x}$ | в) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ |
| 17. а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$ | б) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ | в) $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)$ |



Часть 2 (с обоснованием, по 2 балла)

18. Дано: $(3x^2 - x) \left(\cos \frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) = ax + b + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Найдите a и b .

Вычислите пределы, не применяя правила Лопиталя и обосновывая все действия:

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^{\frac{1}{2x^2}}$

21. Нарисуйте график функции $y = f(x)$, определённой всюду, кроме одной точки, на котором будут отражены следующие соотношения:

$$f(x) = -2x - 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \rightarrow -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty;$$

$$f(x) = x + o(x+1) \text{ при } x \rightarrow -1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 - 0.$$

Оrientировочный образец варианта части 1 контрольной № 2.

В задачах с 1 по 4 формулируется утверждение, а под номерами (1), (2) и (3) задаются функции или последовательности. Необходимо определить, какие из приведённых объектов удовлетворяют данному утверждению и указать соответствующий вариант ответа.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| (А) — ни один не удовлетворяет | (Д) — удовлетворяют все, кроме (1) |
| (Б) — удовлетворяет только (1) | (Е) — удовлетворяют все, кроме (2) |
| (В) — удовлетворяет только (2) | (Ж) — удовлетворяют все, кроме (3) |
| (Г) — удовлетворяет только (3) | (З) — удовлетворяют все объекты |

1. Последовательность a_n - бесконечно малая.

$$(1) a_n = n^2 \sin(1/n^2)$$

$$(2) a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$$

$$(3) a_n = \sqrt{n} (e^{1/n} - 1)$$

2. $\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N \quad |a_n - A| < \varepsilon$

$$(1) a_n = \operatorname{arctg}(1/n)$$

$$(2) a_n = n^{(-1)^n \cdot n}$$

$$(3) a_n = \sin(1/n)$$

3. Функция $f(x)$ - бесконечно большая при $x \rightarrow +0$.

$$(1) f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$(2) f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

$$(3) f(x) = e^{-1/x}$$

4. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода.

$$(1) f(x) = e^{1/x}$$

$$(2) f(x) = \frac{\cos |x|}{x}$$

$$(3) f(x) = x \sin(1/x^2)$$

В задачах с 5 по 8 задается функция или последовательность и утверждения под номерами (1), (2) и (3). Необходимо определить, какие из приведенных утверждений верны в отношении данной функции или последовательности, и указать соответствующий вариант ответа.

(А) — ни одно из них не верно

(Д) — верны все, кроме (1)

(Б) — верно только (1)

(Е) — верны все, кроме (2)

(В) — верно только (2)

(Ж) — верны все, кроме (3)

(Г) — верно только (3)

(З) — верны все утверждения

5. Дана функция $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$

(1) $f(x)$ имеет в точках $x = 0$ устранимый разрыв

(2) $f(x)$ ограничена на промежутке $(0, \pi/2)$

(3) $f(x)$ - бесконечно большая при $x \rightarrow -\infty$

6. Дана функция $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

(1) $f(x) = o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$

(2) $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow 0$

(3) $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow +\infty$

7. Дана последовательность $a_n = n^{\cos(\pi n / 2)}$.
- (1) Последовательность a_n имеет ровно одну предельную точку.
 - (2) Последовательность $b_n = a_n / n$ имеет ровно одну предельную точку.
 - (3) Из последовательности a_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

8. Дана последовательность $a_n = 2^{(-1)^n \cdot n}$

- (1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \exists n \geq N : |a_n| > \varepsilon$
- (2) $\exists \varepsilon > 0 : \exists N : \exists n \geq N : |a_n| < \varepsilon$
- (3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |a_n| > \varepsilon$

В задачах с 9 по 12 необходимо определить, какие из приведённых под номерами (1), (2) и (3) утверждений верны, и указать соответствующий вариант ответа.

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| (А) — ни одно из них не верно | (Д) — верны все, кроме (1) |
| (Б) — верно только (1) | (Е) — верны все, кроме (2) |
| (В) — верно только (2) | (Ж) — верны все, кроме (3) |
| (Г) — верно только (3) | (З) — верны все утверждения |

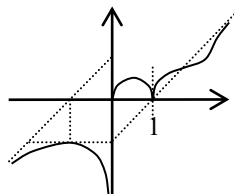
9. (1) Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей является ограниченной последовательностью.
- (2) Сумма двух бесконечно больших последовательностей может быть ограниченной последовательностью.
- (3) Отношение двух бесконечно больших последовательностей может быть бесконечно большой последовательностью.
10. (1) Отношение функции, бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, и функции, ограниченной в окрестности бесконечности, является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow +\infty$.
- (2) Сумма функции, бесконечно малой при $x \rightarrow a$, и функции, ограниченной при $x \rightarrow a$, может быть функцией, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.
- (3) Произведение двух локально ограниченных функций (в одной окрестности) локально ограничено.
11. (1) Если $f = o(h)$, $g = o(k)$ и $h \sim k$ при $x \rightarrow a$, то $f \sim g$ при $x \rightarrow a$
- (2) Если $f - g = o(g)$ при $x \rightarrow a$, то $f \sim g$ при $x \rightarrow a$
- (3) Если $f \sim g$ и $g \sim h$ при $x \rightarrow a$, то $o(f) = o(h)$ при $x \rightarrow a$

12. (1) Произведение функции, имеющей в точке $x = a$ разрыв второго рода, и функции, непрерывной в точке $x = a$, имеет в точке $x = a$ разрыв второго рода.
 (2) Если функция непрерывна на интервале, то она ограничена на этом интервале.
 (3) Множество значений функции, определенной на отрезке, может быть интервалом.

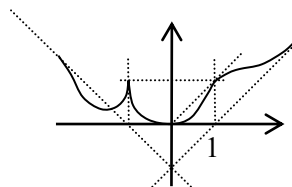
В задачах с 13 по 15 необходимо определить, какие из характерных особенностей функции $f(x)$, приведенных под номерами (1), (2) или (3), отражены на соответствующем графике, и указать подходящий вариант ответа:

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| (А) ни одна не отражена | (Д) отражены все, кроме (1) |
| (Б) отражена только (1) | (Е) отражены все, кроме (2) |
| (В) отражена только (2) | (Ж) отражены все, кроме (3) |
| (Г) отражена только (3) | (З) отражены все |

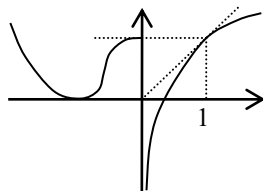
13. (1) $f(x) = -1 + o(x+1)$ при $x \rightarrow -1$
 (2) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x} = -1$
 (3) $f(x) = x + 1 + 1/x + o(1/x)$ при $x \rightarrow -\infty$



14. (1) $f(x) \sim x^{4/3}$ при $x \rightarrow 0$
 (2) $f(x) = x + o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$
 (3) $\frac{f(x)}{x} = -1 - 1/x + o(1/x)$ при $x \rightarrow -\infty$



15. (1) $f(x) = x + o(x-1)$ при $x \rightarrow 1$
 (2) $f(x) = o(1)$ при $x \rightarrow +0$
 (3) $f(x) - 1 \sim x - 1$ при $x \rightarrow 1$



В следующих задачах необходимо указать, как соотносятся между собой утверждения (1) и (2):

- (А) — если $(1) \Leftrightarrow (2)$
(Б) — если $(1) \Rightarrow (2)$, но $(2) \neq \Rightarrow (1)$
(В) — если $(2) \Rightarrow (1)$, но $(1) \neq \Rightarrow (2)$
(Г) — если утверждения (1) и (2) друг друга исключают
(Д) — если ни один из предыдущих вариантов ответа не верен
16. (1) Функция $f(x)$ ограничена в любой окрестности точки $x = a$.
(2) Функция $f(x)$ не ограничена при $x \rightarrow +\infty$.
17. (1) Последовательность a_n имеет ровно одну предельную точку.
(2) Последовательность $b_n = a_n / n$ имеет ровно две предельных точки
18. (1) $f(x) = 2x + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$.
(2) $f(x) = 2x + 3x^2 + o(x)$ при $x \rightarrow 0$.
19. (1) Функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ устранимый разрыв
(2) Функция $1/f(x)$ имеет в точке $x = a$ неустранимый разрыв 1-го рода
20. Функция $f(x)$ определена и не постоянна на отрезке $[a; b]$.
(1) Множество значений функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ является отрезком.
(2) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Оrientировочный образец варианта части 2 контрольной №2.

1. Сформулируйте и докажите теорему о переходе к пределу в неравенстве для последовательности. Обязано ли сохраняться строгое неравенство при переходе к пределу? Может ли оно сохраняться?
2. Докажите, что произведение двух функций, бесконечно больших при $x \rightarrow 2-0$, является функцией, бесконечно большой при $x \rightarrow 2-0$.
3. Используя соответствующий предел и определения, обоснуйте соотношения $\sin x = x + o(x)$ и $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$.
4. Дано: $f(x) = o(\sin^2(1/x) + o(1/x^3))$ при $x \rightarrow \infty$. Используя определение o -малого, выясните, можно ли $f(x)$ представить в виде $o(1/x^2)$.
5. Найдите все точки разрыва (и докажите, что других нет) функции

$$f(x) = \frac{e^{-4x} - 1}{x} + b$$
 и определите их характер при различных значениях параметра b . Если возможно, доопределите функцию по непрерывности.

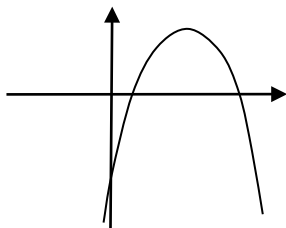
6. Дано: $f(x) - f(-3) = -2(x+3) + o(1)$, $g(x) - g(-3) = 3(x+3) + o(x+3)$ при $x \rightarrow -3$. Что можно сказать о знаке приращений этих функций в достаточно малой проколотой левой полуокрестности точки $x = -3$? Охарактеризуйте эту окрестность с помощью кванторов. Ответ полностью обоснуйте, используя при необходимости определение o -малого и лемму об устойчивости знака, указав конкретно, как и к чему она применяется. Изобразите графически.

Оrientировочный образец варианта контрольной № 3.

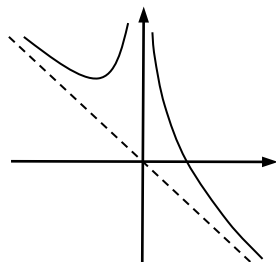
Часть 1 (собирается через 50 мин.)

№ 1-4. Напишите **конкретный** пример функции данного вида, характерные особенности которой отражены на графике (все параметры должны быть заданы). Кратко объясните выбор параметров.

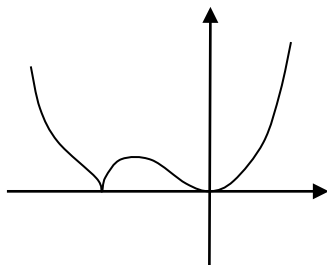
1. $y = ax^2 + bx + c$



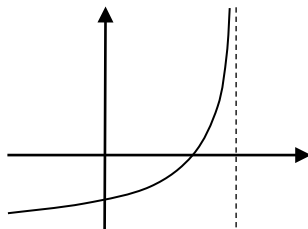
2. $y = ax + \frac{b}{x^n}$



3. $y = (x+c)^\alpha x^\beta$



4. $y = a \ln(bx + c)$



5. Из приведенного списка выберите функцию, соответствующую графику. Кратко объясните.

$$-\sqrt[3]{x}$$

$$|\arctg x|$$

$$-x^3$$

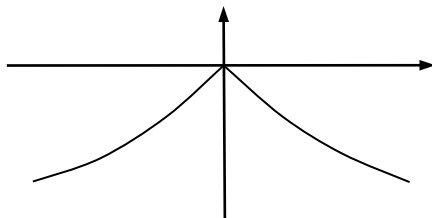
$$-\arctg x$$

$$-x|x|$$

$$-|\arctg x|$$

$$-\sqrt[3]{x^2}$$

$$-|tg x|$$



Вычислите производные функций:

6. $y = \frac{\ln(tgx - 2)}{\sqrt{1 + \cos x}}$

7. $y = 7^{tg^2(2\sqrt{x})}$

8. $y = (\ln x)^{1/x^3}$

9. $y = \pi^5 x^7 \arctg(x/2)$

10. $y = \arccos(\sin(3 - 5x))$

Часть 2.

Постройте графики, проведя полное исследование:

11. $y = (x + 1) \cdot e^{-x}$

12. $y = \sqrt[3]{(x + 3)(6 - x)^2}$

13. Доопределите функцию $f(x) = \frac{e^{-3x} - 1}{x}$ по непрерывности в точке

устранимого разрыва и вычислите, используя определение и не используя правила Лопиталя, первую производную в этой точке. Напишите уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в этой точке. Напишите дифференциал функции в этой точке.

14. Вычислите (с обоснованием) значение $\sqrt{e}$ с точностью до 10^{-3} .

Экзаменационная работа.

Оrientировочный образец части 1 основного варианта.

В задачах с 1 по 5 необходимо определить, какие из приведённых под номерами (1), (2) и (3) утверждений верны, и указать соответствующий вариант ответа.

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| (А) — ни одно из них не верно | (Д) — верны все, кроме (1) |
| (Б) — верно только (1) | (Е) — верны все, кроме (2) |
| (В) — верно только (2) | (Ж) — верны все, кроме (3) |
| (Г) — верно только (3) | (З) — верны все утверждения |

1. (1) Если функция $f(x)$ имеет в точке $x=0$ неустранимый разрыв первого рода и определена в самой точке $x=0$, то функция $g(x)=x \cdot f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$.
 (2) Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x=0$, то функция $g(x)=x^2 \cdot f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$.
 (3) Если $f(x)=2x+5+o(x^2-1)$ при $x \rightarrow -1$ и $f(-1)=3$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=-1$.
2. (1) Если $f'(a)>0$, то $\exists U(a) : \forall(x \in U(a) : x>a)$ будет выполнено неравенство $f(x)>f(a)$.
 (2) Если график функции $f(x)$ на интервале (a, b) лежит не ниже касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке $c \in (a, b)$, то функция выпукла в некоторой окрестности точки $x=c$.
 (3) Существует такая функция $f(x)$, что для любого $x < a$ выполнено неравенство $f(x)-f(a)<x-a$ и при этом $f''(a)>0$.
3. (1) Если $f'(a)>0$, то функция $f(x)$ возрастает в некоторой окрестности точки $x=a$.
 (2) Сумма двух дважды дифференцируемых в точке $x=a$ функций является функцией, дважды дифференцируемой в этой точке.
 (3) Если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастает на этом интервале, то $\forall x \in (a, b) \quad f'(x)>0$.
4. (1) Если дважды дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ строго выпукла на этом интервале, то $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) \geq 0$.
 (2) Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b) \quad f''(x)<0$, то функция $f(x)$ выпукла на этом интервале.
 (3) Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\exists x \in (a, b) : f'(x)<0$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

5. (1) Сумма двух не дифференцируемых в точке $x = a$ функций может быть функцией, дифференцируемой в этой точке.
(2) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке, то функция $f(x) + g(x)$ не дифференцируема в точке $x = a$.
(3) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке, то функция $f(x) \cdot g(x)$ может быть дифференцируемой в точке $x = a$.

В задачах с 6 по 10 даны функция и утверждения под номерами (1), (2) и (3). Необходимо определить, какие из приведённых утверждений верны в отношении данной функции, и указать соответствующий вариант ответа.

- (А) — ни одно из них не верно (Д) — верны все, кроме (1)
(Б) — верно только (1) (Е) — верны все, кроме (2)
(В) — верно только (2) (Ж) — верны все, кроме (3)
(Г) — верно только (3) (З) — верны все утверждения
6. Дана функция: $f(x) = x^2$ при $x < 0$; $f(x) = x^4$ при $x \geq 0$.
(1) Функция $f(x)$ выпукла на интервале $(-1, 1)$.
(2) Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$.
(3) Прямая $y = -x + (1/2)$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x = -1/2$.
7. Дана функция: $f(x) = (\pi/2) - x$ при $x < 0$;
 $f(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x \geq 0$.
(1) Функция $f(x)$ не дифференцируема в точке $x = 0$.
(2) Функция $f(x)$ ограничена на промежутке $(1, +\infty)$.
(3) Функция $f(x)$ выпукла на интервале $(-1, 1)$.
8. Дана функция $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15$.
(1) Функция $f(x)$ выпукла на интервале $(2, 6)$.
(2) Функция $f(x)$ выпукла на интервале $(1, 4)$.
(3) Функция $f(x)$ имеет на интервале $(1, 4)$ наибольшее значение и не имеет наименьшего значения.
9. Дана функция $f(x) = x \cdot (e^{-1/x^2} - 1)$.
(1) $f(x)$ - б.м. при $x \rightarrow +0$.
(2) $f(x)$ - не ограничена на промежутке $(-\infty, -1)$.
(3) $f(x)$ - имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода.
10. Дана функция $f(x) = \ln(1+x) - x$.
(1) $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$.
(2) $f(x) = o(\sin x)$ при $x \rightarrow 0$.
(3) $f(x) = o(x^2)$ при $x \rightarrow +\infty$.

В задачах с 11 по 15 формулируется утверждение, а под номерами (1), (2) и (3) задаются функции. Необходимо определить, какие из приведённых функций удовлетворяют данному утверждению, и указать соответствующий вариант ответа:

- (А) — ни одна не удовлетворяет (Д) — удовлетворяют все, кроме (1)
 (Б) — удовлетворяет только (1) (Е) — удовлетворяют все, кроме (2)
 (В) — удовлетворяет только (2) (Ж) — удовлетворяют все, кроме (3)
 (Г) — удовлетворяет только (3) (З) — удовлетворяют все

11. Функция $f(x)$ выпукла на интервале $(0, 1)$.

- (1) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
 (2) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$
 (3) $f(x) = \operatorname{arctg}(1/x)$

12. График функции $f(x)$ имеет наклонную (но не горизонтальную) асимптоту при $x \rightarrow +\infty$.

- (1) $f(x) = (x^2 - 2) \cdot (e^{-1/x} - 1)$
 (2) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^{-2}}$
 (3) $f(x) = (x - 3) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

13. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв.

- (1) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}|x|}{x^2}$
 (2) $f(x) = 1/\cos x$
 (3) $f(x) = x \cdot e^{-1/x^2}$

14. Функция $f(x)$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

- (1) $f(x) = x^2 \cdot \sin(1/x)$ при $x \neq 0$; $f(0) = 0$
 (2) $f(x) = |x^2 + 2x|$
 (3) $f(x) = (e^x - 1)/x$ при $x \neq 0$; $f(0) = 1$

15. Функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке $x = 0$.

- (1) $f(x) = (e^{x^2} - 1)/x^2$ при $x \neq 0$; $f(0) = 2$
 (2) $f(x) = x - 2|x|$
 (3) $f(x) = -x^2 \cdot e^x$

В следующих задачах необходимо указать, как соотносятся между собой утверждения (1) и (2):

- (А) — если (1) $\Leftrightarrow$ (2)
- (Б) — если (1) $\Rightarrow$ (2), но (2) $\neq \Rightarrow$ (1)
- (В) — если (2) $\Rightarrow$ (1), но (1) $\neq \Rightarrow$ (2)
- (Г) — если утверждения (1) и (2) друг друга исключают
- (Д) — если ни один из предыдущих вариантов ответа не верен

16. Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = 0$.

- (1) $f'(0) < 0$.
- (2) Функция $f(x)$ — чётная.

17. Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1; 3)$.

- (1) $\forall (x_1, x_2 \in (-1; 3) : x_1 < x_2) \quad f(x_2) - f(x_1) < (x_2 - x_1)$.
- (2) $\exists x \in (-1; 3) : f'(x) < 1$.

18. Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1; 1)$.

- (1) $f'(x)$ убывает на интервале $(-1; 1)$.
- (2) $\forall x_0 \in (-1; 1)$ график $y = f(x)$ на интервале $(-1; 1)$ лежит строго ниже (кроме точки касания) касательной, проведенной к нему в точке x_0 .

19. $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$

и $\exists x_0 \in (a; b) : f'(x_0) < 0$.

- (1) $\forall x \in (a; x_0) \quad f''(x) \geq 0$.
- (2) $f(x)$ является монотонно невозрастающей на интервале

20. Функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду дифференцируемы и бесконечно малы при $x \rightarrow +\infty$, $g'(x) < 0$ при всех $x \geq 0$.

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ существует.
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует.

Ориентировочный образец части 2 основного варианта.

1. Сформулируйте и докажите теорему Коши о конечных приращениях для функций $G(x)$ и $H(x)$. Сформулируйте и изобразите её геометрический смысл. Покажите существенность условий теоремы.
2. Сформулируйте и докажите теорему о производной отношения. Укажите, где в доказательстве используется каждое из условий. Всегда ли

производная отношения вычисляется по доказанной формуле? Обоснуйте.

3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) , $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) < 0$. Можно ли утверждать, что существует окрестность точки x_0 , в которой функция $f(x)$ убывает? Обоснуйте.
4. Дано: $f(3)=4$, $f'(3)=6$, $f''(3)=1$ а для любого $x \in (2;7)$ $-2 < f'''(x) < 3$. В каких пределах заключено значение $f(5)$? Можно ли утверждать, что $f(5) > 16$? Обоснуйте все оценки.
5. Функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) , $x_0 \in (a, b)$. Как соотносятся следующие два утверждения?
 (1) $\forall x \in (a; x_0) \quad f'(x) < 0$; $\forall x \in (x_0, b) \quad f'(x) > 0$.
 (2) x_0 — точка минимума функции $f(x)$.
 Ответ обоснуйте.
6. Сформулируйте и докажите достаточное условие (строгого) убывания дифференцируемой функции $h(x)$ на интервале. Является ли это условие необходимым (для дифференцируемой функции)? Обоснуйте.
7. Функция $G(x)$ нечётна, дифференцируема в точке $x = -4$ и $G'(-4) = 5$. Используя определение производной, выясните, дифференцируема ли она в точке $x = 4$. Если дифференцируема, то найдите $G'(4)$.
8. Дано: $f(x) = -x + 1 - 1/x + o(1)$, $g(x) = -x + 1 - 1/x + o(1/x)$ при $x \rightarrow -\infty$. Что можно сказать о положении графиков этих функций (выше или ниже) относительно прямой $y = -x + 1$ при $x \rightarrow -\infty$? При формулировке утверждения точно укажите с помощью кванторов, к каким x оно относится. Ответ полностью обоснуйте, используя при необходимости определение o -малого и лемму об устойчивости знака, указав конкретно, как и к чему она применяется.

Вычислите интегралы (запишите полное решение):

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-2x)^5}}$
10. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$
11. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$
12. $\int \frac{(5x-7) dx}{x^2-3x+2}$
13. $\int f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} -2x+2, & x < -1 \\ 4^{-x}, & x \geq -1 \end{cases}$.

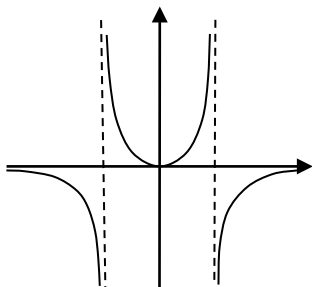
Ориентировочный образец спецварианта.

Время: 2 часа 10 мин.

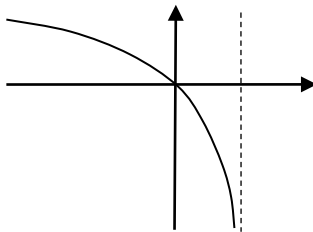
Часть 1 (собирается через 50 мин.)

№ 1-4. Напишите **конкретный** пример функции данного вида, характерные особенности которой отражены на графике (все параметры должны быть заданы). Кратко объясните выбор параметров.

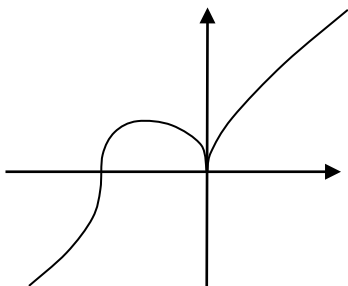
1. $y = \frac{x^m}{1 + bx^n}$



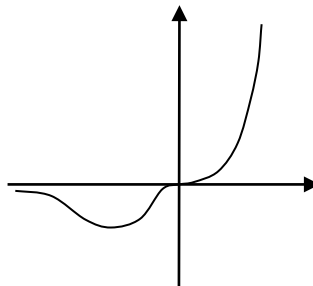
2. $y = a \ln(bx + c)$



3. $y = (x + c)^\alpha x^\beta$



4. $y = x^m e^{ax^n}$



Найдите пределы:

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{6x^2 - 8x^3} + 2x)$

6. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln x - \ln 5}{x - 5}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 6x} - e^{2x}}{\ln(1 + 2x) \arcsin x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(3x))^{4/x^2}$

Вычислите производные функций:

9. $y = \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\arccos(x - \ln 2)}$

10. $y = 7^{\arctg^2 5x}$

11. $y = (\ln x)^{\operatorname{ctg} x}$

12. $y = x^{\sin 7} \cdot \operatorname{arccctg} \sqrt{2x}$

Часть 2

Вычислите интегралы (запишите полное решение):

13. $\int e^{2-3x} dx$

14. $\int 3x \cdot \sin(x^2 + 1) dx$

15. $\int x \cdot \cos 5x dx$

16. Вычислите, используя определение производной, не используя теорему о производной сложной функции и правило Лопиталя, производную функции $f(x) = \ln(2x - 3)$.

Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln(2x - 3)$ в точке $x = 2$.

17. Найдите, с полным обоснованием, наклонные асимптоты функции

$$f(x) = x^2 \ln \frac{x+2}{x} + x \cdot e^{1/x}.$$

18. Постройте график функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, проведя полное исследование.

19. Постройте график функции $y = (x + 2)^2 e^{-x}$, проведя полное исследование.

Ответы

Вычисление пределов. Ответы.

1.1. $3/4$	1.2. $+\infty$	1.3. $-7/3$	1.4. $-7/10$
1.5. $-3/16$	1.6. $1/45$	1.7. 0	1.8. $-4/9$
1.9. $2/3$	1.10. $-1/7$	1.11. 6	1.12. 0
1.13. 0	1.14. 0	1.15. $5/3$	1.16. 0
1.17. $25/9$	1.16. $5/2$	1.19. -3	1.20. $-3/2$
2.1. $1/3$	2.2. $+\infty$	2.3. $+0$	2.4. $-3/4$
2.5. $4/3$	2.6. $\sqrt{5}/2$	2.7. $-\sqrt{5}/2$	2.8. $-\sqrt[5]{3}/2$
4.1. -16	4.2. $-1/18$	4.3. $1/16$	4.4. 6
4.5. $1/5$	4.6. $3/2$	4.7. $1/7$	4.8. $4/9$
5.1. 5	5.2. 1	5.3. $1/2$	5.4. 1
5.5. $\cos a$	5.5. $-\sin a$	5.7. $1/\cos^2 a$	5.8. $-1/\sin^2 a$
6.1. e^2	6.2. $e^{3/5}$	6.3. $e^{-42/5}$	6.4. $e^{-5/3}$
7.4. $1/a$	7.5. e^a	7.6. $n \cdot a^{n-1}$	
8.1. $(-15) \cdot x^2$	8.2. $(64 \ln^3 5) \cdot x^6$	8.5. $2x + \frac{5}{4} + o(1)$	8.6. $-5/3$
8.7. $-\frac{5}{\sqrt{3}}$	8.8. $-3/2$	8.9. $15/7$	8.10. -3
8.11. $-1/2$	8.12. 1	8.13. e	8.14. 1
8.15. e	8.16. e	8.17. $(1/2)^{3/5}$	8.18. $e^{2/\pi}$
8.19. e^{-1}	8.20. $e^{-5/2}$	8.21. $e^{-3/4}$	8.22. $\frac{4}{\ln 2}$
8.23. $-2/7$	8.24. -10	8.25. $-\infty$	8.26. $\frac{\sqrt[4]{3}}{4}$
9.3. $-\frac{9}{2}x - \frac{81}{16} + o(1)$			
9.4. а) $-6x + 14 - \frac{20}{x} + o(1/x)$	9.4. б) $-6x - 3 + \frac{9}{x} + o(1/x)$		
9.5. $7/16$	9.6. $-e/2$	9.7. $-2/3$	9.8. $8/27$
9.9. -3	9.10. $e^{-2/9}$	9.11. $1/2$	9.12. -6

Ответы к пункту 10. «Разные пределы».

- | | | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|---|---------------|
| 1. 1 | 2. 0 | 3. $+\infty$ | 4. 1 | 5. 0 |
| 6. $\sin 1$ | 7. $\ln 2$ | 8. 1 | 9. $-3/5$ | 10. $1/2$ |
| 11. $-3/2$ | 12. $14/3$ | 13. $+\infty$ | 14. $-3/2$ | 15. $-1/3$ |
| 16. $-1/2$ | 17. $3/2$ | 18. $-9/2$ | 19. $-3/5$ | 20. -1 |
| 21. $\frac{3-\sin 2}{6\sin 1-5}$ | 22. 0 | 23. $-\sin 6$ | 24. $\frac{2\operatorname{tg} 4}{\cos^2 4}$ | 25. $4/3$ |
| 26. -6 | 27. $-\frac{18}{\ln 3}$ | 28. $\frac{64}{3\ln 2}$ | 29. -8 | 30. -9 |
| 31. 3 | 32. 0 | 33. $3/2$ | 34. $1/7$ | 35. $4/9$ |
| 36. -4 | 37. $-\frac{64}{3}$ | 38. -3 | 39. $5/3$ | 40. -4 |
| 41. e^{-18} | 42. e^2 | 43. $e^{-9/14}$ | 44. $e^{-5/6}$ | 45. 0 |
| 46. $\left(\frac{1}{11}\right)^{3/7}$ | 47. e^6 | 48. 0 | 49. e^3 | 50. $e^{2/3}$ |
| 51. $\ln 5 - 5/3$ | 52. $\ln 3 + 5/4$ | 53. $8/3$ | 54. -288 | 55. 18 |
| 56. e^{-1} | 57. $\frac{\ln 2 + 6}{16\ln 2 - 16}$ | 58. -4 | | |

**Дополнительные задачи
для подготовки к контрольной № 1. Ответы.****2. Пределы по графику**

- | | | |
|--|--------------|----------------|
| 2.1. $1-0$ | 2.2. $+0$ | 2.3. $1-0$ |
| 2.4. $1+0$ | 2.5. $+0$ | 2.6. $+\infty$ |
| 2.7. $-1+0$ | 2.8. $1-0$ | 2.9. $-1+0$ |
| 2.10. $1-0$ | 2.11. $-1-0$ | 2.12. $+0$ |
| 2.13. 1 | 2.14. $1+0$ | 2.15. $1-0$ |
| 2.16. 1; невозможно указать, с какой стороны стремиться. | | |

Задачи по разделу «Производные и их применение».

Ответы

2. Некоторые задачи на дифференцирование сложной функции.

$$2.1. \quad y' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$$

$$2.2. \quad y' = 2^{\sin 2x} \cdot \ln 2 \cdot \cos 2x \cdot 2$$

$$2.3. \quad y' = 2^{\sin^2 x} \cdot \ln 2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$2.4. \quad y' = 2^{\sin \ln x} \cdot \ln 2 \cdot \cos \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$2.5. \quad y' = 2^{\sin(x^3)} \cdot \ln 2 \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

$$2.6. \quad y' = 2^{2 \sin x} \cdot \ln 2 \cdot 2 \cos x$$

$$2.7. \quad y' = e^{\ln x \cdot \sin x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x \right) \quad \text{или}$$

$$y' = x^{\sin x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x \right)$$

$$2.8. \quad y' = e^{\ln(\ln x) \cdot \operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x + \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) \quad \text{или}$$

$$y' = (\ln x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x + \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$2.9. \quad y' = e^{\ln(\operatorname{ctg} 2x) \cdot \ln^2 x} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} 2x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 2x} \right) \cdot 2 \cdot \ln^2 x + \ln(\operatorname{ctg} 2x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

или

$$y' = (\operatorname{ctg} 2x)^{\ln^2 x} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} 2x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 2x} \right) \cdot 2 \cdot \ln^2 x + \ln(\operatorname{ctg} 2x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$2.10. \quad y' = \ln 2 \cdot (\arcsin x)^{\ln 2 - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2.11. \quad y' = (\ln 3)^{1/x} \cdot \ln(\ln 3) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$2.12. \quad y' = e^2 \cdot x^{(e^2 - 1)}$$

3. Примерные образцы задач для контрольной № 3 и спецварианта.

$$3.1. \quad y' = 8^{\operatorname{tg}^2 4x} \cdot \ln 8 \cdot 2 \operatorname{tg} 4x \cdot \frac{1}{1 + (4x)^2} \cdot 4$$

$$3.2. \quad y' = \operatorname{tg} 2 \cdot \left(6x^5 \cdot \sqrt{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x + 4} + x^6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x + 4}} \cdot \left(-\frac{1}{1 + x^2} \right) \right)$$

$$3.3. \quad y' = \frac{\frac{1}{\ln 2 - \sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \operatorname{arctg} 4x - 4 \cdot \ln(\ln 2 - \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{1 + (4x)^2}}{\operatorname{arctg}^2 4x}$$

$$3.4. \quad y' = \frac{1}{\sin(\pi^4 - \operatorname{tg} x)} \cdot \cos(\pi^4 - \operatorname{tg} x) \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$3.5. \quad y' = (\operatorname{tg} 2x)^{5x+3} \cdot \left(5 \cdot \ln \operatorname{tg} 2x + (5x+3) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2\right)$$

или

$$y' = e^{(5x+3) \cdot \ln(\operatorname{tg} 2x)} \cdot \left(5 \cdot \ln \operatorname{tg} 2x + (5x+3) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2\right)$$

$$3.6. \quad y' = e^3 \cdot \left(5x^4 \cdot \ln(3 \cos x - 1) + x^5 \cdot \frac{1}{3 \cos x - 1} \cdot (-3 \sin x)\right)$$

$$3.7. \quad y' = \frac{\frac{1}{4}(4x-2)^{-3/4} \cdot 4 \cdot \operatorname{arctg}(1/x^3) - (4x-2)^{1/4} \cdot \left(\frac{-1}{1+(1/x)^6}\right) \cdot (-3x^{-4})}{\operatorname{arctg}^2(1/x^3)}$$

$$3.8. \quad y' = \frac{1}{5} \arccos^{-4/5}(\ln 4x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(\ln 4x)^2}} \cdot \frac{1}{4x} \cdot 4$$

$$3.9. \quad y' = e^{\ln(6-3x) \cdot \ln 2x} \cdot \left(\frac{1}{6-3x} \cdot (-3) \cdot \ln 2x + \ln(6-3x) \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2\right)$$

или

$$y' = (6-3x)^{\ln 2x} \cdot \left(\frac{1}{6-3x} \cdot (-3) \cdot \ln 2x + \ln(6-3x) \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2\right)$$

$$3.10. \quad y' = 6^{\sin^3(1/x^3)} \cdot \ln 6 \cdot 3 \sin^2(1/x^3) \cdot \cos(1/x^3) \cdot \left(\frac{-3}{x^4}\right)$$

$$3.11. \quad y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\arccos^2(\operatorname{tg} 3x)}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 3x}}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3$$

$$3.12. \quad y' = (3-9x)^{\ln 2x} \cdot \left(\frac{1}{3-9x} \cdot (-9) \cdot \sin 2x + \ln(3-9x) \cdot \cos 2x \cdot 2\right)$$

или

$$y' = e^{\ln(3-9x) \cdot \sin 2x} \cdot \left(\frac{1}{3-9x} \cdot (-9) \cdot \sin 2x + \ln(3-9x) \cdot \cos 2x \cdot 2\right)$$

$$3.13. y' = \frac{\frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{(4x+2)^4}} \cdot \arccos(2/x^4) - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(2/x^4)^2}} \right) \cdot \frac{2 \cdot (-4)}{x^5} \cdot \sqrt[5]{4x+2}}{\arccos^2(2/x^4)}$$

или

$$y' = \frac{\frac{1}{5} \cdot (4x+2)^{-4/5} \cdot \arccos(2/x^4) - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(2/x^4)^2}} \right) \cdot \frac{2 \cdot (-4)}{x^5} \cdot (4x+2)^{1/5}}{\arccos^2(2/x^4)}$$

$$3.14. y' = \frac{\cos(\sqrt{x} - \ln 7) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 \cdot \sin(\sqrt{x} - \ln 7)}{\operatorname{arctg}^2 2x}$$

Асимптоты. Ответы

1.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	асимптота	$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$
1.1	-24	-32	-96	$y = -24x - 32$	снизу	сверху
1.2	-6	14	-20	$y = -6x + 14$	снизу	сверху
1.3	-6	12	-14	$y = -6x + 12$	снизу	сверху
1.4	-18	54	-117	$y = -18x + 54$	снизу	сверху
1.5	6	-16	27	$y = 6x - 16$	сверху	снизу
1.6	-6	3	0	$y = -6x + 3$	мало информации, разложить до $O\left(\frac{1}{x^2}\right)$	

2. Вертикальные и наклонные асимптоты

2.1. $x = 2$ – верт.; $y = -x - 8$ при $x \rightarrow \infty$

2.2. $x = 0$ – верт.; $y = -x - 7$ при $x \rightarrow \infty$

2.3. $y = -2x + 2$ при $x \rightarrow \infty$

2.4. $y = -x - 3$ при $x \rightarrow -\infty$; $y = x + 3$ при $x \rightarrow +\infty$

3. Наклонные или горизонтальные асимптоты

3.1. $y = -1$, сверху

3.2. $y = -x - 7$, сверху

3.3. нет

3.4. $y = x - \frac{3}{2}$, снизу

3.5. $y = -\sqrt[3]{3}x + \frac{\sqrt[3]{3}}{9}$, сверху

3.6. нет

3.7. $y = x$, снизу

3.8. нет

3.9. $y = -x + 3$, сверху

3.10. нет

3.11. $y = 3x - 2$, снизу

3.12. $y = -x + 3$, сверху

3.13. нет

3.14. $y = 1$, снизу

3.15. нет

3.16. $y = x - 1$, сверху

3.17. $y = x - 3$, сверху

3.18. $y = x - \frac{5}{2}$, сверху

3.19. $y = 1$, снизу

3.20. $y = x - \frac{1}{2}$, снизу

3.21*. $y = \frac{3\pi}{2}x - \pi - 3$, сверху

$$\left(\operatorname{arccotg} t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t, \quad \operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \right).$$

*Ориентировочный образец варианта контрольной № 2. Часть 1.**Ответы*

Работа 2	1	Д	5	З	9	З	13	Е	17	Д
Часть 1	2	Е	6	Д	10	Д	14	З	18	Б
	3	В	7	Г	11	Д	15	Е	19	Г
Образец	4	Ж	8	Ж	12	А	16	Д	20	В

Ориентировочный образец варианта контрольной № 3.**Ответы**

1. $-x^2 + 4x - 3$

2. $-x + \frac{1}{x^2}$

3. $(x+1)^{2/3} x^{4/3}$

4. $-\ln(3-x)$

5. $|\operatorname{arctg} x|$

$$\mathbf{6.} \quad y' = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sqrt{1 + \cos x} - \ln(\operatorname{tg} x - 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \cos x}} \cdot (-\sin x)}{1 + \cos x}$$

$$7. \quad y' = 7^{\operatorname{ctg}^2(2\sqrt{x})} \cdot \ln 7 \cdot 2\operatorname{ctg}(2\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2(2\sqrt{x})} \right) \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}}$$

$$8. \quad y' = e^{\ln(\ln x) \cdot (1/x^3)} \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^3} + \ln(\ln x) \cdot \frac{-3}{x^4} \right) \quad \text{или}$$

$$y' = (\ln x)^{(1/x^3)} \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{-3} + \ln(\ln x) \cdot (-3x^{-4}) \right)$$

$$9. \quad y' = \pi^5 \cdot \left(7x^6 \cdot \operatorname{arccotg}(x/2) + x^7 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2(x/2)} \right) \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$10. \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(3-5x)}} \cdot \cos(3-5x) \cdot (-5)$$

$$13. \quad f(0) = -3; \quad f'(0) = \frac{9}{2}; \quad y + 3 = \frac{9}{2}(x - 0)$$

Образцы экзаменационных работ. Ответы

Оrientировочный образец части 1 основного варианта.

Таблица ответов.

Работа 4	1	Д	6	Ж	11	В	16	Г
1 часть	2	Е	7	Д	12	Ж	17	Б
	3	В	8	А	13	Г	18	А
	4	Б	9	Б	14	Е	19	Б
Образец	5	З	10	Д	15	З	20	Д

Оrientировочный образец спецварианта. Ответы.

$$1. \quad \frac{x^2}{1-x^4} \qquad 2. \quad \ln(1-x) \qquad 3. \quad (x+1)^{1/3} x^{2/3} \qquad 4. \quad x^3 e^x$$

$$5. \quad 1/2 \qquad 6. \quad 1/5 \qquad 7. \quad -9/2 \qquad 8. \quad e^{-18}$$

$$9. \quad y' = \frac{\frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 \cdot \arccos(x - \ln 2) - \operatorname{tg}(3x) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x - \ln 2)^2}} \right)}{\arccos^2(x - \ln 2)}$$

$$10. y' = 7^{\operatorname{arctg}^2 5x} \cdot \ln 7 \cdot 2 \operatorname{arctg} 5x \cdot \frac{1}{1+(5x)^2} \cdot 5$$

$$11. y' = e^{\ln(\ln x) \operatorname{ctgx}} \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \operatorname{ctgx} + \ln(\ln x) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) \right)$$

$$12. y' = \sin 7 \cdot x^{\sin 7 - 1} \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{2x}) + x^{\sin 7} \cdot \left(-\frac{1}{1+(\sqrt{2x})^2} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2$$

$$13. -\frac{1}{3}e^{2-3x} + C$$

$$14. -\frac{3}{2}\cos(x^2+1) + C$$

$$15. \frac{x}{5} \cdot \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x + C$$

$$16. f'(x) = \frac{2}{2x-3}; \quad y = 2(x-2) \quad 17. y = 3x-1 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

Электронное издание сетевого распространения.
9,0 печ. л. Опубликовано 23.06.2025.
Издательство «ЭФ МГУ имени М.В. Ломоносова»;
www.econ.msu.ru; +7 (495) 939-17-15

Кочергин А. В., Кострикин И. А.

Предел и производная

Учебное пособие
по курсу математического анализа

ISBN 978-5-907690-81-3

