Исследование операций

Курс посвящен изучению основных методов решения оптимизационных задач, возникающих при экономическом моделировании. Если коротко, то курс:

- математический: разбираемся в предпосылках методов и обосновываем их
- экономический: обсуждаем постановки содержательных экономических задач и читаем статьи
- практический: работаем в R Studio

Лектор: Клачкова О.А. (e-mail: sparrow889@gmail.com)

Семинаристы: Клачкова О.А., Красков В.В., Сучкова О.В., Рощина Я.А.

Дисциплину можно выбирать в семестрах: 4, 6

Курсы, которые следуют за данным: Сетевые модели и оптимизационные алгоритмы в экономике.

Предполагаемая система оценивания

Формы текущей и промежуточной аттестации	
Контрольная работа	30%
Практическая работа (на компьютерах)	15%
Домашняя работа (в группах)	15%
Экзамен	40%

Распределение оценок:

оценка	**2024 год**	**2023 год**
отлично	30%	24%
хорошо	53%	39%
удовлетворительно	16%	24%
неудовлетворительно	0%	13%

Некоторые отзывы о курсе:

- «Отличная комбинация теории и практики»
- «курс очень интересный, затронуты полезные для дальнейшей работы темы, курс составлен целостно»
- «Отличный курс как с прикладной, так и с теоретической точки зрения»
- «Несмотря на то, что курс был сложным, он оказался полезным и интересным»
- «Курс не простой, но очень интересный. Сначала было трудновато втянуться, но вся программа построена классно, поэтому очень рекомендую этот курс»

Содержание дисциплины и литература

Тема 1. Введение

Типы математических моделей. Математическое моделирование: зачем нужно, основные задачи, примеры. Виды ММ: аналитическое и имитационное. Роль оптимизационных задач в моделировании. Классификация оптимизационных задач. Подходы к решению задач с несколькими целевыми функциями.

Постановка задачи линейного программирования (канонический, стандартный, общий вид задачи). Основные понятия, примеры задач линейного программирования: задача планирования производства, транспортная задача, оптимальное смешение, оптимальный раскрой, планирование финансов, сетевые задачи. Геометрическая интерпретация и геометрическое решение задачи линейного программирования в случае двух переменных.

Тема 2. Геометрия линейного программирования

Понятие отрезка в n-мерном пространстве. Понятие выпуклого множества. Выпуклость гиперплоскости и полупространства. Теорема о пересечении выпуклых множеств. Выпуклость множества допустимых решений задачи линейного программирования. Выпуклость множества оптимальных решений задачи линейного программирования.

Понятие крайней точки выпуклого множества. Понятие базисного решения. Теорема о соответствии крайних точек и допустимых базисных решений. Теорема о существовании допустимого базисного решения. Теорема о существовании оптимального базисного решения. Понятие выпуклой линейной комбинации, выпуклой оболочки. Выпуклость множества всех выпуклых линейных комбинаций конечного числа точек. Многогранное множество, многогранник. Теорема о представлении многогранника.

Тема 3. Симплексный метод

Основные идеи симплексного метода. Алгебра симплексного метода. Симплексная таблица и работа с ней. Правильность заполнения симплексной таблицы. Признак оптимальности допустимого базисного решения. Признак неограниченности целевой функции. Признак возможной неединственности оптимального решения. Нахождение всех оптимальных решений и всех базисных оптимальных решений в случае одномерного и в случае двумерного оптимального множества. Понятие вырожденного базисного решения. Проблемы, связанные с вырождением. Дополнительные переменные и их использование в симплексном методе.

Метод искусственного базиса. Основные идеи двойственного симплексного метода.

Решение практических задач симплексным методом на языке R.

Тема 4. Теория двойственности и анализ чувствительности

Двойственность в линейном программировании. Построение сопряженной задачи для исходной задачи в стандартной, канонической и общей формах. Задача, сопряженная к сопряженной.

Лемма о значениях целевых функций исходной и двойственной задач. Следствия из нее. Признак оптимальности пары взаимно-двойственных задач («слабая» постановка). Первая теорема двойственности («сильная» постановка).

Вторая теорема двойственности. Условия дополняющей нежесткости в случае задачи в стандартной форме и в общем случае.

Третья теорема двойственности. Геометрическая иллюстрация. Экономическая интерпретация двойственных переменных. Анализ устойчивости. Вывод функций спроса на ресурсы и предложения товаров.

Формализация реальных практических ситуаций в виде задач линейного программирования.

Решение практических задач на анализ чувствительности на языке R.

Тема 5. Целочисленное программирование

Общая постановка задачи ЦЛП. Основные методы решения. Примеры задач, приводящих к целочисленной постановке. Основные отличия от непрерывных задач. Теорема о возможности сведения ЗЦЛП к ЗЛП.

Метод отсечений. Отсечение Данцига. Метод отсечений Гомори. Лемма Гомори.

Метод ветвей и границ решения целочисленной задачи линейного программирования.

Решение практических задач методами целочисленного программирования на языке R.

Тема 6. Транспортная задача

Транспортная задача: постановка задачи; представление в виде задачи линейного программирования.

Теорема о допустимости замкнутой транспортной задачи. Теорема о ранге матрицы ограничений транспортной задачи. Нахождение исходного допустимого базисного решения методом северо-западного угла и методом минимального элемента.

Задача, двойственная к транспортной. Метод потенциалов решения транспортной задачи. Теорема о коэффициентах целевой функции транспортной задачи при выражении этой функции через свободные переменные (связь коэффициентов с потенциалами). Критерий оптимальности транспортной задачи. Понятие цикла. Теорема о несуществовании цикла из базисных клеток. Теорема о существовании единственного цикла пересчета для каждой свободной клетки.

Вопросы вырожденности и неединственности в транспортной задаче. Несбалансированная транспортная задача. Транспортная задача с ограничениями на перевозки.

Задача о назначениях. Составление расписания. Матрицы корреспонденций.

Решение практических транспортных задач и задач о назначении на языке R.

Тема 7. Нелинейное программирование

Конечномерные гладкие задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Теоремы отделимости. Задача выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера. Субдифференциал. Теорема Моро-Рокафеллара. Теорема Дубовицкого-Милютина.

Метод опорных векторов. Постановка задачи в случае линейной разделимости и линейной неразделимости. Двойственность в нелинейных задачах. Ядерные функции.

Решение практических задач на метод опорных векторов на языке R.

Тема 8. Элементы динамического программирования

Постановка задачи динамического программирования. Принцип оптимальности Беллмана для решения задач динамического программирования с конечным горизонтом. Задача о распределении ресурсов. Задача о рюкзаке.

Пример домашнего задания

Вам предстоит выполнение домашнего задания в командах из 2-3 человек (могут быть студенты из разных групп).

Срок выбора состава команды: **до …** капитан команды должен загрузить на портал on.econ в соответствующий раздел файл, где будет зафиксирован список членов команды (ФИО, группа, контактная почта). После чего каждой команде будет выслан на почту их вариант домашнего задания.

Срок сдачи домашнего задания: на выполнение домашнего задания отводится две недели, то есть все должно быть сдано на портал on.econ в срок **до …**.

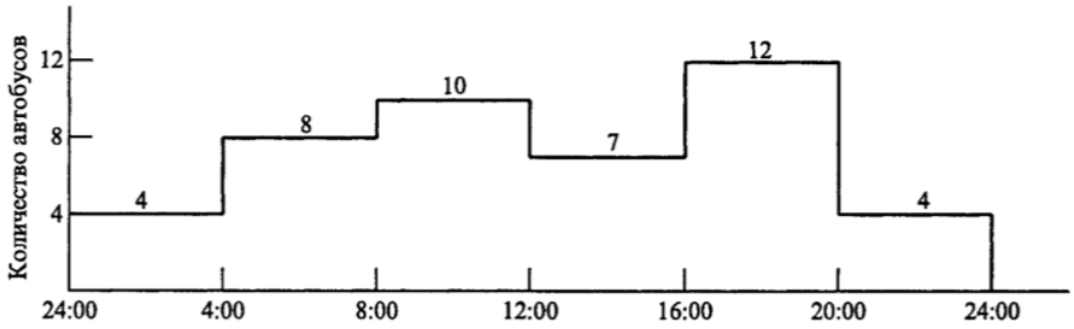
Содержание задания – чтение и анализ академической статьи.

Нужно подготовить аналитический отчет в формате word объемом не более 5 страниц, в котором требуется отразить:

1. Актуальность темы (не общие фразы, а теоретические или прикладные проблемы, которые решаются в рамках данной тематики).
2. Краткое описание аналогичных исследований.
3. Основной исследовательский вопрос авторов.
4. Формализация оптимизационной задачи (включая содержательное, смысловое объяснение целевых функций и ограничений).
5. Эмпирическая стратегия: описание данных, метод решения задачи, используемый программный пакет.
6. Итоговые выводы и ограничения исследования, возможные недостатки статьи.
7. Возможные дальнейшие направления исследований в рамках тематики статьи.

Пример практического задания

Городская транспортная компании хочет уменьшить суточное число автобусов, выходящих на линию. Оценена упрощенная суточная потребность жителей в автобусах, она представлена на графике:



Существует также дополнительное формальное требование, что каждый автобус должен находиться на линии в течение одной 8-часовой смены.

Формализуйте данную задачу в виде оптимизационной задачи и найдите минимальное число автобусов, выходящих на линию в определенную смену, чтобы удовлетворить потребности в транспортных услугах.

Нужно подготовить аналитический отчет в формате word объемом не более 1-2 страниц, а также воспроизводимый код на языке программирования R.