

Построение bootstrap- доверительных интервалов

17 ноября 2015г.

Содержание

- Пример из жизни: как студентке 4 курса очень хотелось построить доверительный интервал для вершины параболы и к чему это привело
- Знакомство с bootstrap: идея, простой пример
- Доверительные интервалы bootstrap и тестирование гипотез
- Bootstrap в «обычной» регрессии: а если панельные данные?
- Альтернативное решение исходной задачи: метод дельта
- Литература

Пример из жизни

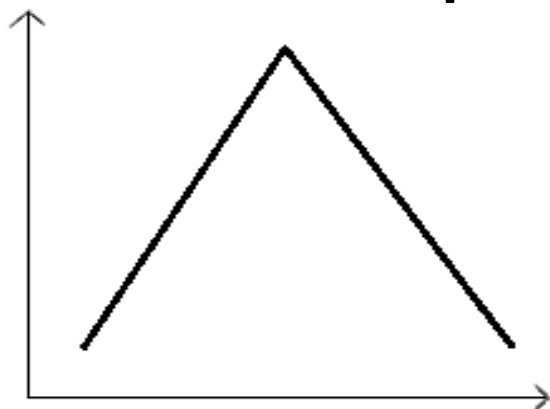
Пример из жизни (2013 год)

- **Тема исследования:** «Эконометрическая оценка влияния государственного долга на динамику валового выпуска»
- **Проблема:** оценить для группы европейских стран «точку перелома», начиная с которой уровень долга становится критическим и оказывает негативное влияние на темпы роста выпуска.

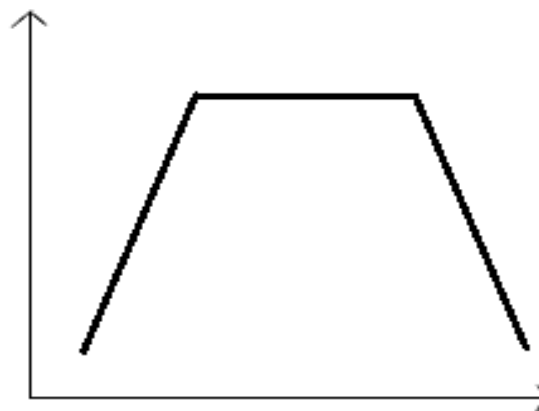
Формирование данных

- Выборка: 1990-2007 (2010) гг., 12 стран Европейского Союза (Австрия, Бельгия, Финляндия, Франция, Германия, Греция, Ирландия, Италия, Нидерланды, Португалия, Испания, Великобритания)
- Источники данных: IMF WEO 2012, World bank database
- Зависимая переменная growth - темп роста реального ВВП на душу населения в ценах 2000 г.
- Объясняющие переменные:
- GGGD - Валовой совокупный государственный долг (без вычета финансовых активов, держателем которых является государство), % ВВП
- GCF - Валовое накопление капитала, % ВВП
- ToInv - Валовые инвестиции, % ВВП
- Infl – Темп инфляции, ИПЦ
- Euro - Фиктивная переменная, равная 1 с момента вступления страны в зону евро
- Unemp - Уровень безработицы, % от рабочей силы
- Old - Уровень пенсионной нагрузки (Население старше 65 лет, % от всего населения)
- Bankcrisis - Фиктивная переменная (1- был банковский кризис в стране)
- Sch3 - Процент людей, получающих высшее образование, среди своей возрастной категории (в течение 5 лет с момента окончания школы)

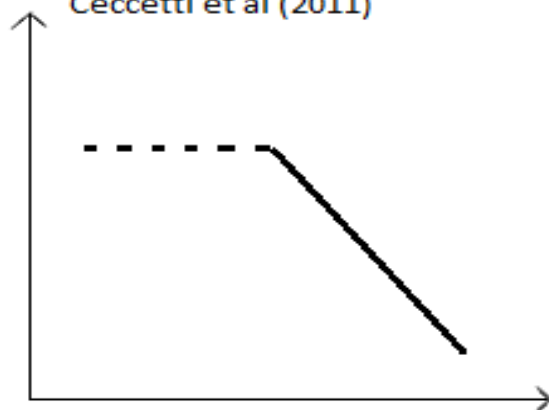
Влияние долговой нагрузки на темпы роста выпуска



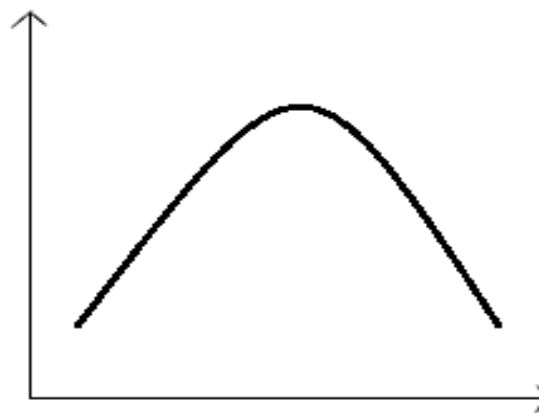
Caner (2010),
Ceccetti et al (2011)



Baum et al (2012)



Kumar, Woo (2010)



Checherita et al (2010)

- Ось x – долговая нагрузка (долг/ВВП), ось y – темпы роста ВВП

Выбор функциональной формы

1) Пороговая регрессия, предложенная Hansen (1996)

$$g_{it} = \mu_i + \beta_1 z_{it} I(x < \gamma) + \beta_2 z_{it} I(x > \gamma) + u_{it} \quad (1)$$

g_{it} - темп роста выпуска в стране i в период t ,

μ_i - фиксированный страновой эффект,

z_{it} - набор независимых переменных, x - пороговая переменная,

I - индикаторная функция, γ – «порог»

u_{it} - случайная ошибка.

2) Фиктивные переменные (Kumar, Woo (2010))

3) Квадратичная функция (Checherita and Rother (2010))

$$g_{it} = \beta_1 debt_{i,t-1} + \beta_2 debt_{i,t-1}^2 + \beta_3 C_{i,t-1} + u_{it} \quad (2)$$

g_{it} - темп роста выпуска в стране i в период t ,

$debt$ - переменная долга,

$C_{i,t-1}$ - набор контрольных переменных,

u_{it} - случайная ошибка.

«Переломная точка» рассчитывается как $-\frac{\beta_1}{2\beta_2}$ (3)

Обзор рассчитанных предельных уровней государственного долга (государственный долг/ВВП)

	Развитые страны	Развивающиеся страны	Бедные страны
Pattilo C., Poirson H., Ricci L., 2002		35-40%	
Buiter W. «Fiscal Sustainability»// 2003	60%		
Clements B., Bhattacharya R., Nguyen T.Q., 2003			50% и менее
Caner, Grennes, Koehler-Geib 2010	60%		
Checherita C., Rother Ph., 2010 Cecchetti S., Mohanty M.S., Fabrizio Z., 2011	85-90%		
Reinhart C., Rogoff K., 2010	85-90%	60%	
Balázs Égert, 2012	60%	30%	
IMF «Fiscal Monitor: Balancing Fiscal Policy Risks»// 2012	60%	40%	

Результаты и проблема

- Получена оценка «переломной точки» 90-95% для 1990-2007 гг., около 100% для 1990-2010 гг.
- Но почти во всех эмпирических работах разные значения этой точки
- А каков доверительный интервал для неё?
- ПРОБЛЕМА: «Обычным» способом его построить невозможно.
- Выход - bootstrap

Знакомство с bootstrap

Знакомство с bootstrap

(для начала см. Анатольев, «Квантиль» №3, 2007):

- *Bootstrap (англ.) – петля на заднике ботинка, облегчающая его надевание.*
- Идея метода: имеющаяся выборка – это единственная информация об истинном распределении данных. Поэтому давайте приблизим истинное распределение эмпирическим. То есть «сами себя вытащим».
- Рассмотрим пример.

Простой пример (1/3)

- Пусть в выборке всего 2 наблюдения:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Пусть нас интересует θ из модели парной регрессии без константы:

$$y_i = \theta x_i + \varepsilon_i$$

$$\hat{\theta}^{\text{МНК}} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{(x_1)^2 + (x_2)^2} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{1^2 + 2^2} = 0,8$$

Умножить матрицу регрессии на матрицу признаков

Простой пример (2/3)

- «Вытаскиваем» две пары чисел:

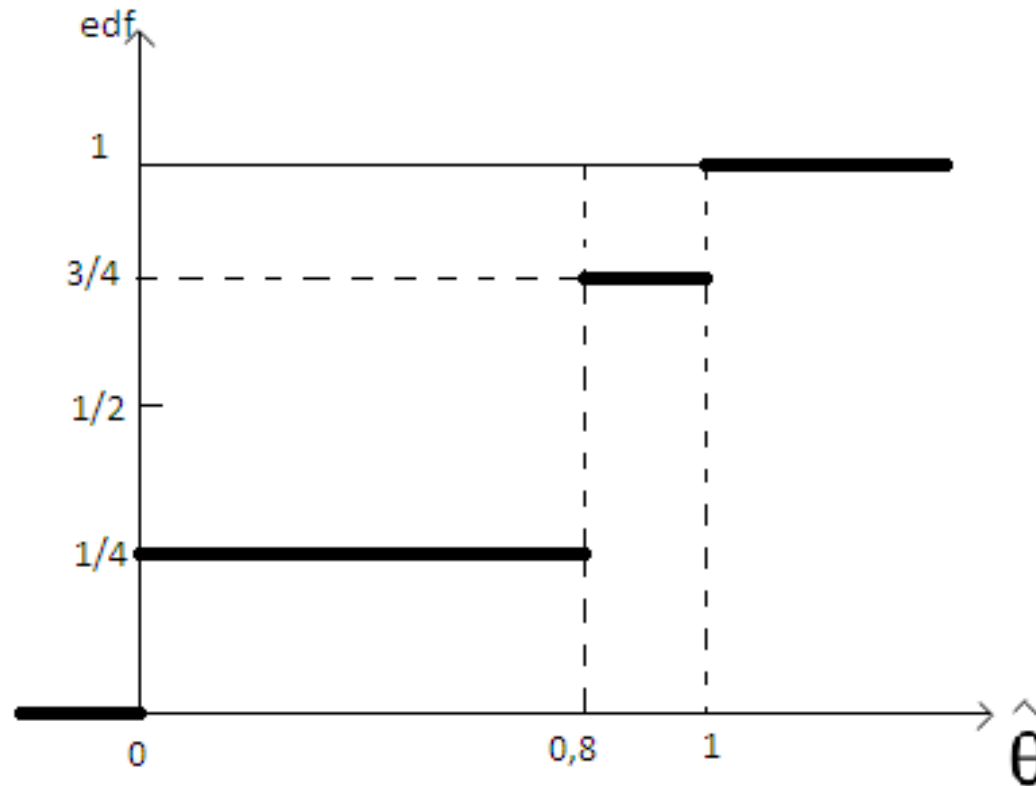
$$\begin{pmatrix} x1^* \\ y1^* \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x2^* \\ y2^* \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ с вероятностью } 1/4 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ с вероятностью } 1/2 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ с вероятностью } 1/4 \end{cases}$$

- Тогда бутстраповская МНК-оценка распределена так:

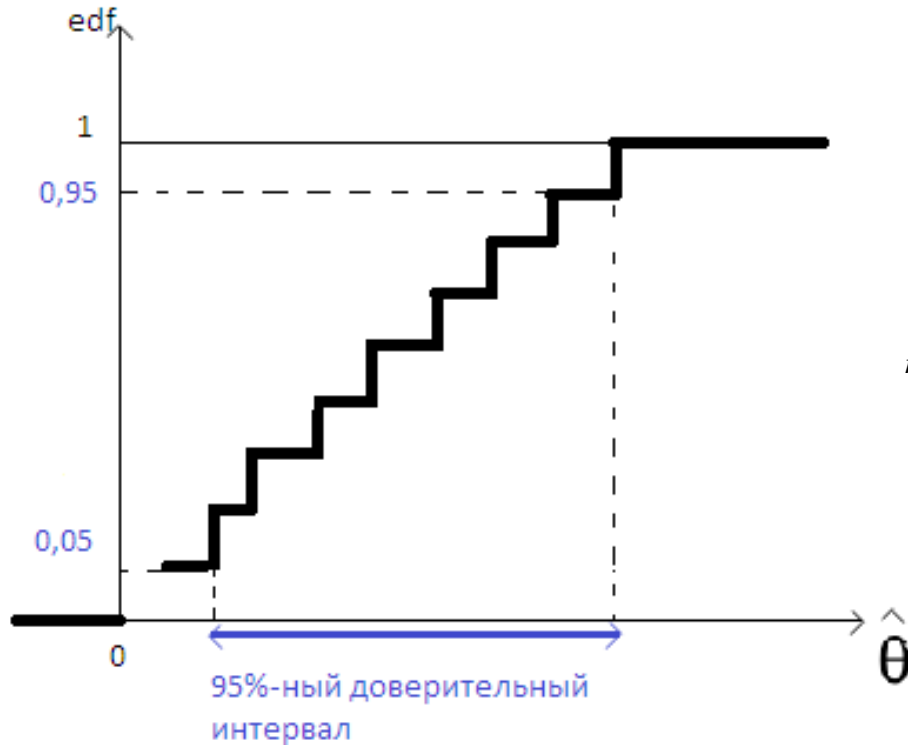
$$\hat{\theta}^* = \begin{cases} 0 \text{ с вероятностью } 1/4 \\ 0,8 \text{ с вероятностью } 1/2 \\ 1 \text{ с вероятностью } 1/4 \end{cases}$$

Простой пример (3/3)

График эмпирической функции распределения оценки:



Если «ступеней» больше:



- Если наблюдений n , то количество вариантов бутстраповской статистики n^n



n^n

- задача слишком сложная, а точность излишняя



- Выход - симуляции

Симуляции

Допустим, мы хотим бутстрапировать некоторую статистику $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$.

Выберем B – количество будущих выборок.

Для каждого $b=1, 2, \dots, B$ построим бутстраповскую выборку $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$, вытягивая ее элементы случайным образом с возвращением из исходной выборки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Вычислим бутстраповскую статистику

$$\hat{\varphi}_b^* = \hat{\varphi}^*(\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}_b).$$

Каждой статистике присвоим веса $1/B$ – получаем бутстраповское распределение статистики $\hat{\varphi}$.

Симуляции: доверительный интервал

- Для получения квантилей отсортировать бутстраповские статистики в порядке возрастания.
- В качестве квантилей $q_{\alpha/2}^*$ и $q_{1-\alpha/2}^*$ взять значения
- $\widehat{\varphi}_{[B*\frac{\alpha}{2}]}^*$ и $\widehat{\varphi}_{[B*(1-\frac{\alpha}{2})+1]}^*$
- где $[.]$ означает взятие целой части.

Попытка в Gretl

gretl: бутстреп анализ

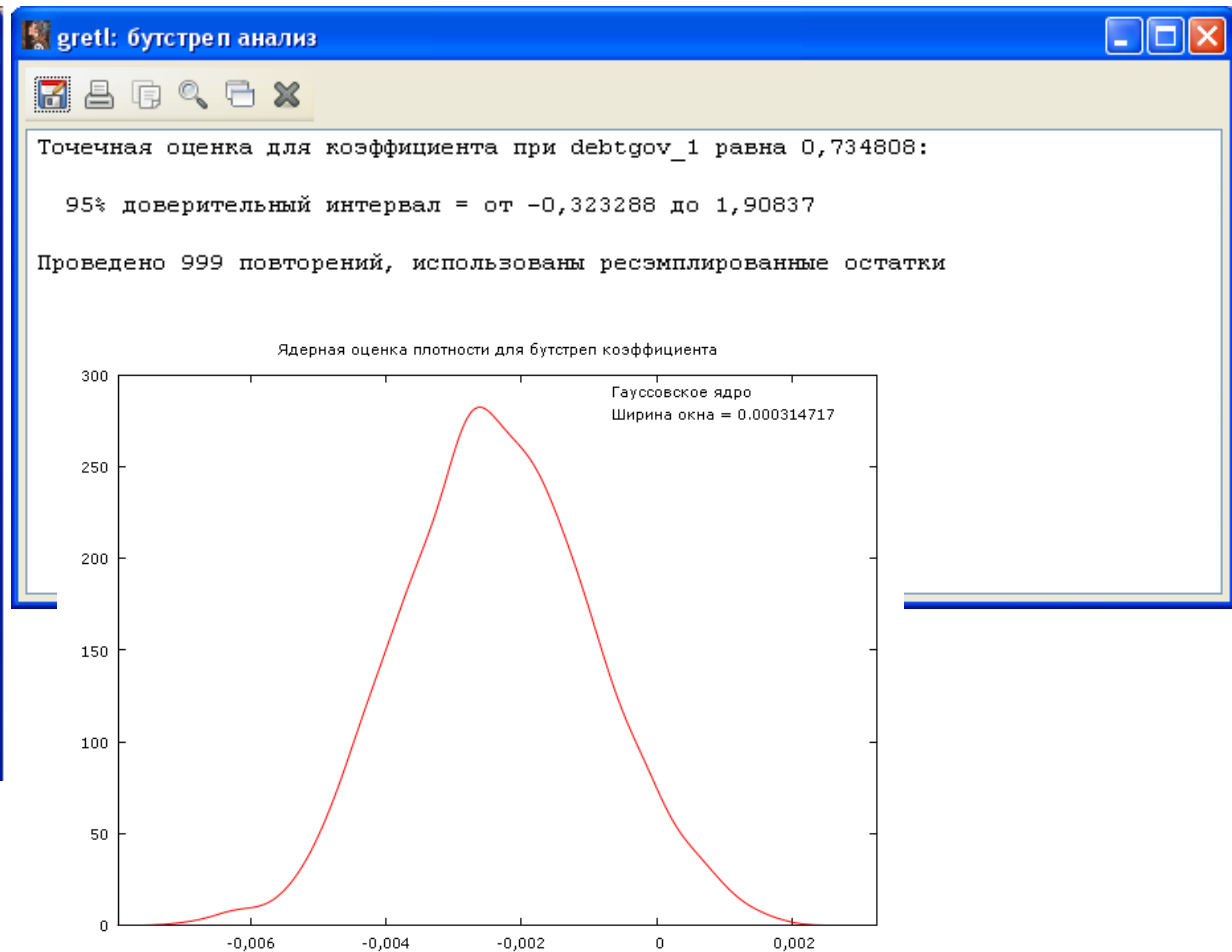
Коэффициент:

Доверительный интервал
 Стьюдентизированный доверительный интервал
 P-значение

Ресэмплировать остатки
 Имитировать нормальные ошибки

Количество повторений

Показать график выборочного распределения
 Сохранить данные о бутстреп-анализе в файл



Можно получить оценку и доверительный только для одного коэффициента, а нужен д. и. для отношения коэффициентов...

Попытка в R studio

- Код взят отсюда:
<http://www.utstat.toronto.edu/~brunner/oldclass/appliedf12/lectures/2101f12BootstrapR.pdf>
- Загрузка данных (*.csv)
- Преобразование их в data frame
- Цикл: 1000 повторений, в каждом – оценка модели по МНК, сохранение коэффициентов
- Расчёт 1000 значений «точки вершины»
- Поиск квантилей

Доверительный интервал для «точки перелома»
от 76% до 112%

Что не так?

Две проблемы в примере с доверительным интервалом



**Возможна
смещённость**



**Другие доверительные
интервалы вместо
эфроновых**



**Нарушена панельная
структура данных**



**Блочный бутстрап вместо
«обычного»**

Доверительные интервалы

и тестирование гипотез

Эфронов доверительный интервал

бутстрапируем	саму оценку
вытягиваем	x^*
считаем	$\hat{\theta}_b^*$
повторяем	B раз
строим распределение для	$\left\{ \hat{\theta}_b^* \right\}_{b=1}^B$
Интервал	$\theta \in [q_{\alpha/2}; q_{1-\alpha/2}]$

Доверительный интервал Холла

бутстрапируем	Отклонение оценки от истинного значения
вытягиваем	x^*
считаем	$\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}$
повторяем	B раз
строим распределение для	$\left\{ \hat{\theta}_b^* - \hat{\theta} \right\}_{b=1}^B$
Интервал	$\theta \in \left[\hat{\theta} - q_{1-\alpha/2}; \hat{\theta} - q_{\alpha/2} \right]$

t-процентильный доверительный интервал

бутстрапируем	$\frac{\hat{\theta} - \theta}{s.e.(\hat{\theta})}$
вытягиваем	x^*
Считаем	$\frac{\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}}{s.e.(\hat{\theta}_b^*)}$
строим распределение для	$\left\{ \frac{\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}}{s.e.(\hat{\theta}_b^*)} \right\}_{b=1}^B$
Интервал	$\theta \in \left[\hat{\theta} - s.e.(\hat{\theta}) * q_{1-\alpha/2}; \hat{\theta} + s.e.(\hat{\theta}) * q_{\alpha/2} \right]$

Симметричный t-процентильный д. и. (подходит для тестирования гипотез)

бутстрапируем	$\frac{\hat{\theta} - \theta}{s.e.(\hat{\theta})}$
вытягиваем	x^*
Считаем	$\frac{\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}}{s.e.(\hat{\theta}_b^*)}$
строим распределение для	$\left\{ \frac{\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}}{s.e.(\hat{\theta}_b^*)} \right\}_{b=1}^B$
Интервал	$\theta \in \left[\hat{\theta} - s.e.(\hat{\theta}) * q_{1-\alpha}; \hat{\theta} + s.e.(\hat{\theta}) * q_{1-\alpha} \right]$

Альтернативное решение исходной задачи

Разве ты на четвёртом курсе не знала о дельта-методе? (с)
Алексей Хазанов

Дельта-метод

- Смысл: приближение нелинейной функции линейной частью из разложения в ряд Тейлора
- Реализация в Stata с помощью **одной (!)** команды
- **`nlcom (-_b[debt])/(2*_b[sqdebt])`**
- Но остаётся проблема: есть ли смещение и как учесть панельную структуру данных?

(Справку см. здесь: <http://www.stata.com/manuals14/rnlcom.pdf>)

Кстати, чем закончилась история с поиском «точки перелома»?

- В апреле 2013 г. Herndon, Ash, Pollin нашли ошибку в расчётах К. Reinhart & Kenneth S. Rogoff «Growth in a time of debt» (2010) и опровергли основной результат их исследования. На основании тех же самых данных они получили, что влияние государственного долга на темпы роста реального ВВП отрицательное и одинаково для любых значений долга (монотонная зависимость).
- Таким образом, был поставлен под сомнение один из аргументов в пользу необходимости «политики затягивания поясов» в Европе, которым выступало исследование R&R.
- Но эта статья 2013г. не отменяет результатов многочисленных исследований, нашедших нелинейную зависимость для разных групп стран.

Литература: статьи о госдолге

- *Baum A., Checherita-Westphal C., Rother P.* «Debt and growth: new evidence for the Euro area» // ECB Working Paper Series No. 1450, July 2012.
- *Caner M., Grennes T.* «Finding the Tipping Point When Sovereign Debt Turns Bad” World Bank Conference on Debt Management, March 29, 2010.
- *Checherita, Rother* «The impact of high and growing government debt on economic growth: An empirical investigation for the euro area». European Central bank working paper series, WP 1237, August 2010.
- *Herdon T., Ash M., Pollin R.* «Does High Public Debt Consistently Stifle Economic Growth? A Critique of Reinhart and Rogoff» // University of Massachusetts Amherst, Political Economy Research Institute, Working Paper series, №322, 2013
- *Kumar and J. Woo* «Public Debt and Growth» IMF Working Papers WP/10/174, 2010.
- *Panizza, Presbitero* «Public Debt and Economic Growth: Is There a Causal Effect? » MoFiR working paper № 65, 2012.
- *Pattillo, Poirson, Ricci* «What Are the Channels Through Which External Debt Affects Growth?», IMF Working Paper January. WP/04/15, 2004.
- *Reinhart, Rogoff* «Growth in a time of debt», NBER, Working Paper 15639, 2010.

Литература по «кухне»

- Пороговая регрессия:
Hansen B. «Sample splitting and Threshold estimation» // Boston College Working Papers in Economics WP 319, 1996.
- Станислав Анатольев и список хорошей литературы по бутстрапу:
<http://quantile.ru/03/03-SA.pdf>
- Код для bootstrap в R вручную (нужно переделать):
<http://www.utstat.toronto.edu/~brunner/oldclass/appliedf12/lectures/2101f12BootstrapR.pdf>
- nlcom и дельта-метод в Stata
- <http://www.stata.com/manuals14/rnlcom.pdf>

Пороговая регрессия

Выбор функциональной формы

1) Пороговая регрессия, предложенная Hansen (1996)

$$g_{it} = \mu_i + \beta_1 z_{it} I(x < \gamma) + \beta_2 z_{it} I(x > \gamma) + u_{it} \quad (1)$$

g_{it} - темп роста выпуска в стране i в период t ,

μ_i - фиксированный страновой эффект,

z_{it} - набор независимых переменных, x - пороговая переменная,

I - индикаторная функция, γ – «порог»

u_{it} - случайная ошибка.

2) Фиктивные переменные (Kumar, Woo (2010))

3) Квадратичная функция (Checherita and Rother (2010))

$$g_{it} = \beta_1 debt_{i,t-1} + \beta_2 debt_{i,t-1}^2 + \beta_3 C_{i,t-1} + u_{it} \quad (2)$$

g_{it} - темп роста выпуска в стране i в период t ,

$debt$ - переменная долга,

$C_{i,t-1}$ - набор контрольных переменных,

u_{it} - случайная ошибка.

«Переломная точка» рассчитывается как $-\frac{\beta_1}{2\beta_2}$ (3)

Выбор функциональной формы

Пороговая регрессия, предложенная Hansen (1996)

$$g_{it} = \mu_i + \beta_1 z_{it} I(x < \gamma) + \beta_2 z_{it} I(x > \gamma) + u_{it} \quad (1)$$

g_{it} - темп роста выпуска в стране i в период t ,

μ_i - фиксированный страновой эффект,

z_{it} - набор независимых переменных, x - пороговая переменная,

I - индикаторная функция, γ – «порог»

u_{it} - случайная ошибка.

Шаги:

Задаётся диапазон для поиска гаммы

С некоторым шагом перебираются значения из этого диапазона

Для каждого значения оценивается модель

Выбирается та гамма, для которой сумма квадратов остатков модели наименьшая

Пример: Моделирования влияния инфляции на экономический рост (Клачкова О. А. 2015)

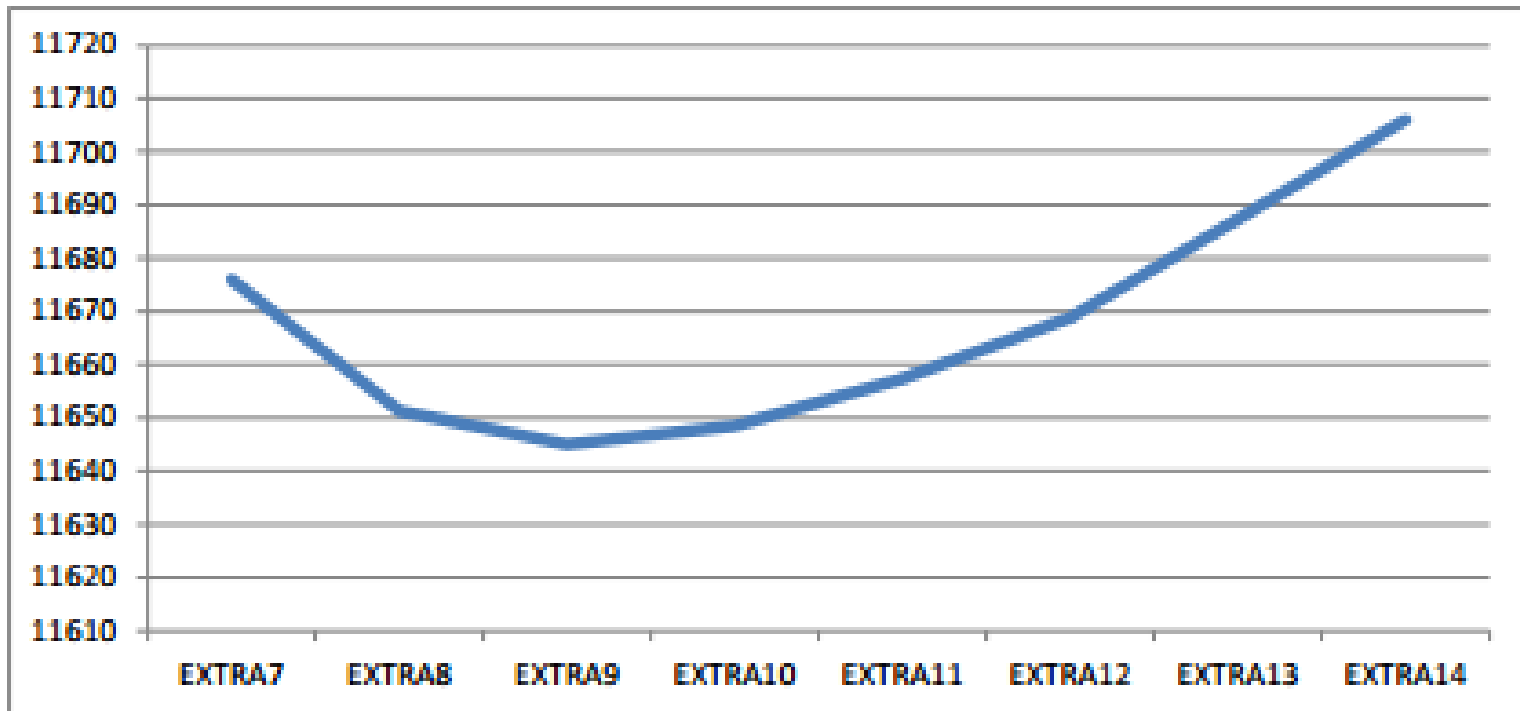
Данные: база данных WEO, годовые данные с 1989 года по 2013.

Переменные:

Обозначение	Переменная	Описание
GDP growth	ВВП, постоянные цены	Годовые темпы прироста реального ВВП
GDP growth, smooth	Темпы экономического роста	Ряд темпов роста ВВП, сглаженный с помощью фильтра Годрика-Прескотта
Total Investment	Инвестиции	Доля инвестиций в ВВП
Population	Прирост населения	Темпы прироста населения, ежегодно
Inflation targeting	Инфляционное таргетирование	1, если страна таргетировала инфляцию в текущем году 0, иначе
Advanced	Развитая экономика	1, если страна в текущем году считалась развитой 0, если страна в текущем году считалась развивающейся
Oil export	Страна нефтеэкспортер	1, если в текущем году страна являлась крупным нефтеэкспортером 0, иначе
CPIend	Индекс потребительских цен, на конец периода	Годовое процентное изменение потребительских цен, на конец периода

Пример: Моделирования влияния инфляции на экономический рост (Клачкова О. А. 2015)

- Потенциальный структурный сдвиг от 7 до 14% инфляции
- Фиктивная переменная $D = \begin{cases} 1, & \text{если } CPI > \gamma \\ 0, & \text{если иначе} \end{cases}$
- Переменная $EXTRA = D * (CPI - \gamma)$



Структурный сдвиг на уровне 10%.

Результаты оценки модели

Модель 1: Фиксированные эффекты, использовано наблюдений - 3222

Включено 123 пространственных объектов

Длина временного ряда: минимум 10, максимум 32

Зависимая переменная: GDPgrowthsmooth

Робастные стандартные ошибки (HAC)

	<i>Коэффициент</i>	<i>Ст. ошибка</i>	<i>t-</i>	<i>P-значение</i>	
	<i>m</i>		<i>статистика</i>		
const	2,32383	0,391468	5,9362	<0,00001	***
TotalInvestment	0,0568952	0,0161284	3,5276	0,00043	***
l_CPIend	0,122899	0,0849502	1,4467	0,14808	
pop	8,28896	3,3426	2,4798	0,01320	**
l_Extra10	-1,31019	0,183882	-7,1251	<0,00001	***

- Ниже порога влияние незначимое. Выше – отрицательное.
- Парабола не давала асимметричности!

Основные статьи о порогах

- Hansen B. «Sample splitting and Threshold estimation» // Boston College Working Papers in Economics WP 319, 1996.
- Hansen B. E. "Testing for structural change in conditional models," *Journal of Econometrics*, (2000), 97, 93-115
- Hansen B. E. "Sample splitting and threshold estimation," *Econometrica*, (2000), 68, 575-603.
- Caner M., Hansen B. E. "Instrumental Variable Estimation of a Threshold Model," *Econometric Theory*, (2004), 20, 813-843
- Где их найти:
<http://www.ssc.wisc.edu/~bhansen/papers/cv.htm>
- Софт от Хансена (для stata и R):
http://www.ssc.wisc.edu/~bhansen/progs/progs_threshold.html