11.2. Динамика фондовооруженности труда

В моделях экономического роста Солоу–Свана[1] и Рамсея–Касса–Купманса[2] используется однородная первой степени производственная функция с нейтральным по Харроду технологическим прогрессом (1.24), в которой трудозатраты можно разложить в произведение человекочасов рабочего времени, отработанных с фиксированной интенсивностью (L_n), и коэффициента эффективности или интенсивности труда (E): $L = EL_n$. С учетом данной факторизации трудозатрат, используя преобразование (1.16), можно расписать коэффициенты соответственно фондовооруженности и производительности труда с учетом его интенсивности: $k = \frac{K}{EL_n}$, $y = \frac{Y}{EL_n}$. Итак, здесь и далее под производительностью и фондовооруженностью труда понимаются соответственно объем выпуска и основных фондов в расчете на единицу трудовых операций[3].

В моделях Солоу–Свана и Рамсея–Касса–Купманса функция потребления представлена в кейнсианском виде. Потребительские расходы пропорциональны располагаемому доходу (3.28). Такое поведение хозяйственной системы будет соответствовать траектории гарантированного роста в модели Харрода–Домара (9.31).

В моделях Солоу–Свана и Рамсея–Касса–Купманса анализируется закрытая экономика без учета государственного воздействия на функционирование хозяйственной системы. Используя в определении сбережений как непотребленного дохода (3.10), функцию потребительских расходов (3.28), получаем функцию сбережений:

$$S = (1 - APC)Y = APS \cdot Y.$$

Обозначая среднюю склонность к сбережению APS через s, с учетом вытекающего из основного макроэкономического тождества (8.6) равенства сбережений и инвестиций (8.7) получаем функцию валовых капиталовложений: $S = sY = I_g$. В отличие от модели Харрода–Домара функция чистых инвестиций здесь учитывает еще и возмещение выбытия капитала, которое предполагается пропорциональным его запасу δK:

$$I_g - \delta K = I_n = \frac{dK}{dt} = sY - \delta K,$$

где норма амортизации $\delta = const$ задана экзогенно.

Введем теперь предпосылки относительно динамики численности населения и технологического прогресса. Пусть численность трудовых ресурсов растет темпом $n(t) = \frac{dL_n(t)/dt}{L_n(t)}$. Разделив переменные $d\ln|L_n(t)| = n(t)dt$, проинтегрируем данное уравнение: $\ln|L_n(t)| = \int n(t)dt + \ln c_1$, где c_1 – некоторая константа. Потенцируя полученное соотношение, получаем: $L_n(t) = c_1 e^{\int n(t)dt}$. Используя начальное условие ($L_n(0) = c_1$), получаем выражение для динамики трудовых ресурсов: $L_n(t) = L_n(0)e^{\int n(t)dt}$. Если допустить постоянство темпа прироста населения ($n(t) = const$), то уравнение динамики объемов рабочей силы упрощается: $L_n(t) = L_n(0)e^{nt}$.

---

[1] Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth // Quarterly journal of economics. 1956. Vol. 70. № 1; Swan T.W. Economic growth and capital accumulation // Econ. record. 1956 (Nov.). Vol. 32.

[2] Ramsey F.P. A mathematical theory of saving // Economic Journal. 1928. Vol. 38. № 152; Cass D. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation // Review of economic studies. 1965. Vol. 32. № 3. См. также: Romer D. Advanced macroeconomics. – N.Y.: McGraw Hill, 1996.

[3] Например, для технологии Кобба–Дугласа с постоянной отдачей от масштаба $Y = K^\alpha (EL_n)^{1-\alpha}$ функция производительности труда будет иметь вид:

$$y = \left(\frac{K}{EL_n}\right)^\alpha = k^\alpha. \quad \text{(xii)}$$

Для леонтьевской производственной функции из модели Харрода–Домара (4.33) производительность труда будет описываться следующей зависимостью: $y = \frac{K}{BEL_n} = \frac{k}{B}$.

Проделаем аналогичные рассуждения относительно технологического прогресса. Пусть его темп составляет $g(t) = \frac{dE(t)/dt}{E(t)}$. Решением данного дифференциального уравнения является зависимость: $E(t) = c_2 e^{\int g(t)dt}$, где значение константы определяется начальным условием $E(0) = c_2$. Итак, получаем экспоненциальную динамику технологического прогресса: $E(t) = E(0)e^{\int g(t)dt}$. Если допустить аналогично темпу роста экономически активного населения, что $g(t) = const$, то можно использовать упрощенную траекторию динамики технологического прогресса: $E(t) = E(0)e^{gt}$.

С учетом рассмотренных выше предпосылок проанализируем динамику фондовооруженности труда:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{E(t)L_n(t)}\right) = \frac{\frac{dK(t)}{dt}E(t)L_n(t) - K(t)\left(\frac{dL_n(t)}{dt}E(t) + L_n(t)\frac{dE(t)}{dt}\right)}{(E(t)L_n(t))^2}$$
$$= \frac{\frac{dK(t)}{dt}}{E(t)L_n(t)} - \frac{K(t)\frac{dL_n(t)}{dt}}{E(t)(L_n(t))^2} - \frac{K(t)\frac{dE(t)}{dt}}{L_n(t)(E(t))^2}.$$

Используя определение чистых инвестиций, данное равенство можно продолжить:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{sY - \delta K}{E(t)L_n(t)} - nk(t) - gk(t) = sf\big(k(t)\big) - \delta k(t) - nk(t) - gk(t).$$

Таким образом, из основного макроэкономического тождества (8.6) вытекает базовое дифференциальное уравнение, характеризующее динамику фондовооруженности труда и удельных инвестиций, а также дохода и потребления в расчете на единицу трудозатрат с учетом их интенсивности в экономической системе в целом:

$$\dot{k}(t) = sf\big(k(t)\big) - k(t)(\delta + n + g) = i_g(t) - k(t)(\delta + n + g)$$
$$= f(k) - c - (\delta + n + g)k. \qquad (11.2)$$

где $i_g(t) = \frac{I(t)}{E(t)L_n(t)}$ – удельные валовые инвестиции, т.е. валовые инвестиции в расчете на единицу труда с учетом его интенсивности; $c(t) = \frac{C(t)}{E(t)L_n(t)}$ – удельное потребление эффективной рабочей силы.

Разделим переменные в уравнении (11.2) $\frac{dk}{sy(k) - k(\delta+n+g)} = dt$ и проинтегрируем данное соотношение: $\int \frac{dk}{sy(k)-k(\delta+n+g)} = t + C$, где C – некоторая константа. Таким образом, нелинейное дифференциальное уравнение (11.2) можно считать решенным, поскольку оно доведено до квадратур.

Для однородной первой степени производственной функции Кобба–Дугласа (xii) интеграл в данном решении $\int \frac{dk}{sk^\alpha - k(\delta+n+g)} = t + C$ может быть посчитан. Преобразуем данное равенство: $-\frac{1}{(\delta+n+g)}\int \frac{dk}{k^\alpha\left(k^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta+n+g}\right)} = \frac{1}{(\alpha-1)(\delta+n+g)}\int \frac{dk^{1-\alpha}}{\left(k^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta+n+g}\right)} = t + C$, или $\int d\ln\left(k^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta+n+g}\right) = \ln\left(k^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta+n+g}\right) = (\alpha - 1)(\delta + n + g)t + \ln C_1$. Потенцируя данное соотношение, получаем: $k^{1-\alpha} = C_1 e^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t} + \frac{s}{\delta+n+g}$, или

$$k(t) = \left(C_1 e^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t} + \frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (11.3)$$

Значение константы C_1 в (11.3) определим по начальному условию:

$$C_1 = k(0)^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta + n + g}. \qquad (11.4)$$

В итоге получаем искомую траекторию изменения производительности труда во времени в модели Солоу–Свана для случая производственной функции Кобба–Дугласа:

$$k(t) = \left(\left(k(0)^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta + n + g}\right)e^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t} + \frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (11.5)$$

Выражение для траектории динамики ВВП (11.5) можно получить и напрямую, решив основное уравнение модели Солоу–Свана (11.2), которое для случая производственной функции Кобба–Дугласа (xii) принимает вид уравнения Бернулли:

$$\frac{dk}{dt} + k(\delta + n + g) = sk^{\alpha}, \text{ или } k^{-\alpha}\frac{dk}{dt} + k^{1-\alpha}(\delta + n + g) = s\,.$$

Заменой переменных:

$$z = k^{1-\alpha} \qquad (11.6)$$

с учетом того, что $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dk}\frac{dk}{dt} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\frac{dk}{dt}$, т.е. $k^{-\alpha}\frac{dk}{dt} = \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{dz}{dt}$, оно сводится к неоднородному линейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{dz}{dt} + z(\delta + n + g) = s,$$

или

$$\frac{dz}{dt} + (1-\alpha)(\delta + n + g)z = (1-\alpha)s. \qquad (11.7)$$

Вначале решаем соответствующее однородное уравнение:

$$\ln z = (\alpha - 1)(\delta + n + g)t + \ln C.$$

Потенцируя данное равенство, получаем выражение для z, к которому применяем метод вариации постоянной:

$$z(t) = C(t)e^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t}. \qquad (11.8)$$

Подставляем полученное выражение в исходное неоднородное уравнение (11.7): $\frac{dC}{dt} = (1-\alpha)se^{(1-\alpha)(\delta+n+g)t}$ и интегрируем получающееся уравнение относительно $C(t)$: $C(t) = \frac{s}{(\delta+n+g)}e^{(1-\alpha)(\delta+n+g)t} + C_1$.

Подстановкой полученного соотношения в (11.8) с учетом замены переменной (11.6) получаем общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (11.7), которое равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного (11.3). Поскольку константа C_1 определяется соотношением (11.4), итоговая траектория фондовооруженности труда с учетом его интенсивности имеет вид (11.5). Отсюда в силу определения фондовооруженности труда с учетом его интенсивности, принимая во внимание зависимость от времени экономически активного населения и научно-технического прогресса, можно получить траекторию динамики капитала:

$$K(t) = E(0)L_n(0)e^{(\alpha-1)(n+g)t}\left(\left(\left(\frac{K(0)}{E(0)L_n(0)}\right)^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta + n + g}\right)e^{(\alpha-1)(\delta+n+g)t} + \frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$= \left(K(0)^{1-\alpha}e^{(\alpha-1)\delta t} + \frac{s\big(E(0)L_n(0)\big)^{1-\alpha}}{\delta + n + g}\left(e^{(\alpha-1)(n+g)t} - e^{(\alpha-1)\delta t}\right) + \frac{s\big(E(0)L_n(0)\big)^{1-\alpha}}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

При $\dot{k} = 0$ из базового дифференциального уравнения (11.2) получаем:

$$i_g = sy = k(\delta + n + g) \qquad (11.9)$$

– стационарный уровень капиталовооруженности труда в модели Солоу–Свана.

Из уравнения динамики фондовооруженности труда (11.2) видно, что скорость изменения данного показателя представляет собой функцию от его значения: $\dot{k} = \varphi(k)$. Разлагая данную зависимость в ряд Тейлора в окрестности стационарного уровня капиталовооруженности k^*, можно локально оценить устойчивость динамики этого показателя с помощью модели гибкого акселератора Койка: $\dot{k} = \frac{\partial\varphi(k^*)}{\partial k}(k - k^*) = \lambda(k - k^*)$. В данном случае речь идет о соотношении между скоростью изменения и величиной удельного, а не валового запаса капитала.

Будет стационарный уровень фондовооруженности устойчивым или нет, определяется величиной коэффициента акселерации $\lambda = sf'(k^*) - \delta - n - g$. Если угловой коэффициент касательной к графику удельных сбережений в точке k^* больше тангенса угла наклона прямой $(\delta + n + g)k$ либо равен ему, то состояние неустойчиво (рис. 11.1 – 11.6).

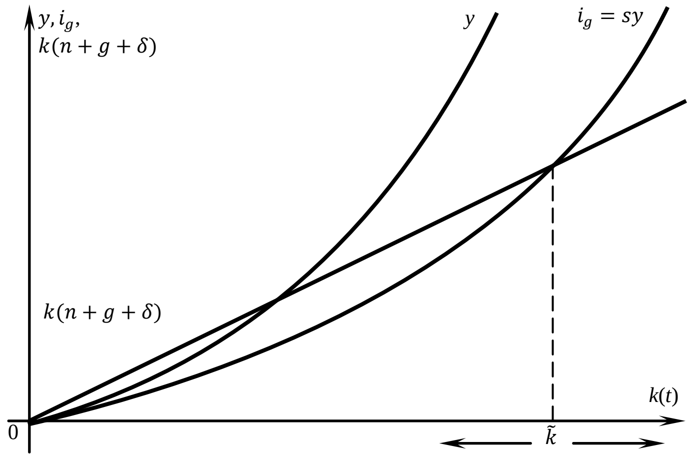


Рис. 11.1. Потенциальное неустойчивый уровень капиталовооруженности труда $\tilde{k}$

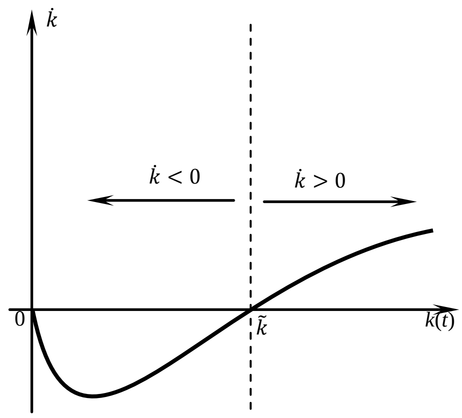


Рис. 11.2. Динамика фондовооруженности труда в окрестности точки $\tilde{k}$

Приведем в качестве примера стационарный уровень фондовооруженности для леонтьевской технологии (рис. 11.3 – 11.6).

Рис. 11.3. Неустойчивый уровень капиталовооруженности труда $\tilde{k} = 0$

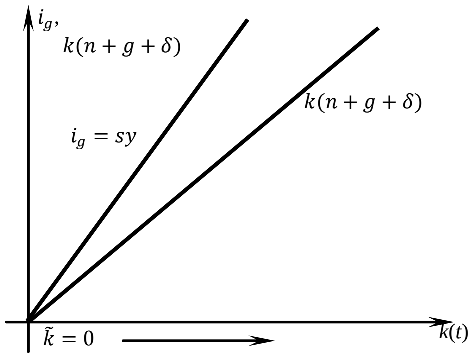


Рис. 11.4. Динамика фондовооруженности труда в окрестности точки $\tilde{k} = 0$

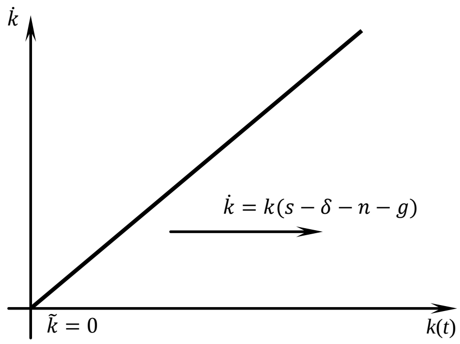


Рис. 11.5. Неустойчивые множественные уровни капиталовооруженности труда $\tilde{k}$

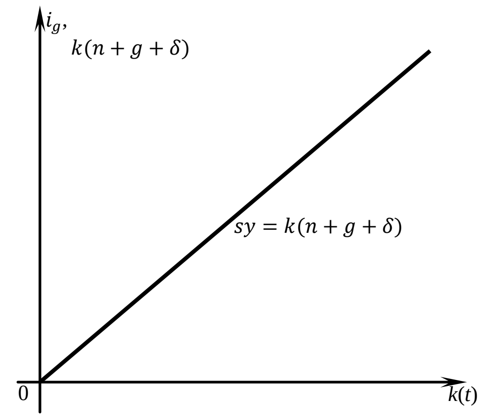
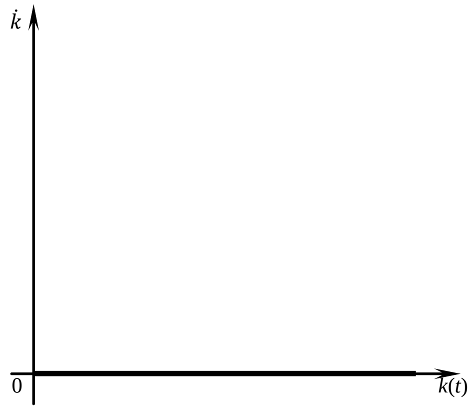


Рис. 11.6. Динамика фондовооруженности труда



Покажем, что при предпосылках модели Солоу–Свана будет наблюдаться противоположное неравенство: $f'(k^*) < \delta + n + g$.

Используемая в данной модели производственная функция с постоянной отдачей от масштаба (1.15) характеризуется линейным темпом роста. Если ее поделить на линейную (в каждый данный момент времени) функцию, умножив на $1/EL_n$, то очевидно, что темп роста оказывается более медленным, нежели линейный (рис. 11.7).

Рис. 11.7. Устойчивый уровень капиталовооруженности труда в модели Солоу–Свана

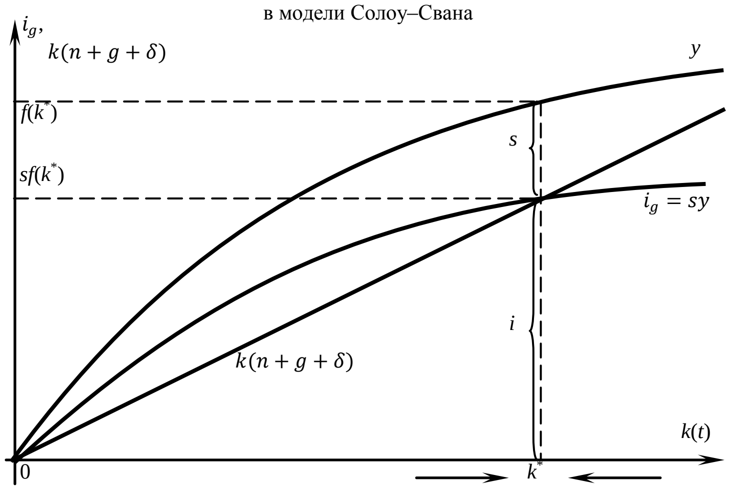
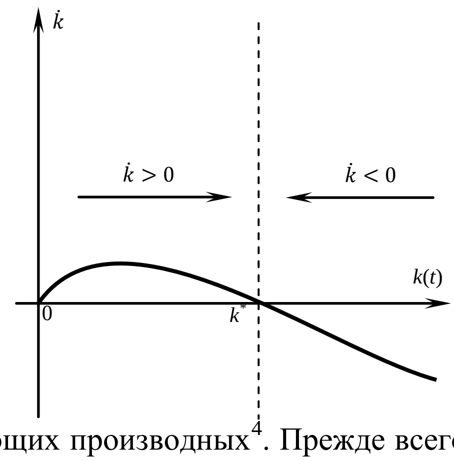


Рис. 11.8. Динамика фондовооруженности труда в модели Солоу–Свана



Это можно подтвердить расчетом соответствующих производных[4]. Прежде всего, можно утверждать, что функция производительности труда является возрастающей зависимостью от его фондовооруженности. Об этом свидетельствует производная производительности труда по его фондовооруженности, равная предельному продукту капитала (1.19), который положителен в силу предпосылки об эффективности технологии производства.

Рассчитаем соответствующую вторую производную[5]:

[4] Например, для случая производственной функции Кобба–Дугласа (xii) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial(K/EL_n)}\left(\frac{Y}{EL_n}\right) = \alpha\left(\frac{K}{EL_n}\right)^{\alpha-1} = \frac{\partial Y}{\partial K}.$$

[5] В частности, для случая производственной функции Кобба–Дугласа (xii):

$$\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right) = \frac{\partial}{\partial K}\left(\alpha\left(\frac{K}{EL_n}\right)^{\alpha-1}\right) = \alpha(\alpha-1)\frac{K^{\alpha-2}}{(EL_n)^{\alpha-1}}.$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}EL_n = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{K}{EL_n}\right)^{\alpha-2} = \frac{\partial}{\partial(K/EL_n)}\left(\alpha\left(\frac{K}{EL_n}\right)^{\alpha-1}\right) = \frac{\partial}{\partial(K/EL_n)}\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial(K/EL_n)}\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right)=\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right)\cdot\frac{\partial K}{\partial(K/EL_n)}=\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}EL_n<0.$$

Здесь был использован тот факт, что $\frac{\partial K}{\partial(K/EL_n)}=EL_n\frac{\partial K}{\partial K}=EL_n$, а также закон убывающей производительности капитала, свойственный неоклассической производственной функции.

Помимо того, что решение $k=0$ по экономическому смыслу можно исключить, оно представляет собой неустойчивое состояние модели при неоклассической технологии: малейшее увеличение фондовооруженности труда будет уводить экономику к положению k^*. Обратим внимание на то, что при леонтьевской технологии такой уровень капиталовооруженности труда будет представлять собой вырожденное устойчивое состояние модели (рис. 11.9 – 11.10).

Рис. 11.9. Вырожденный устойчивый уровень капиталовооруженности труда $\tilde{k}=0$

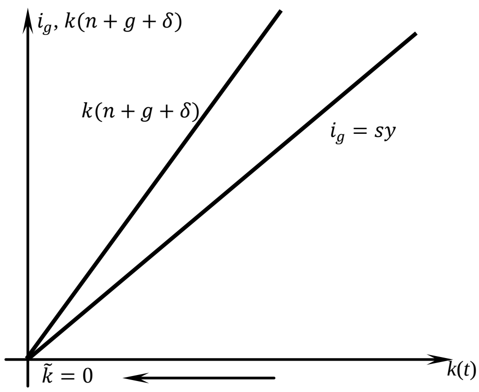
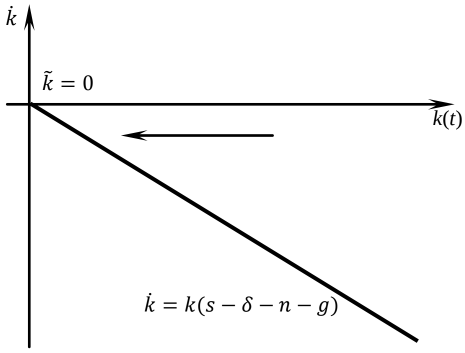


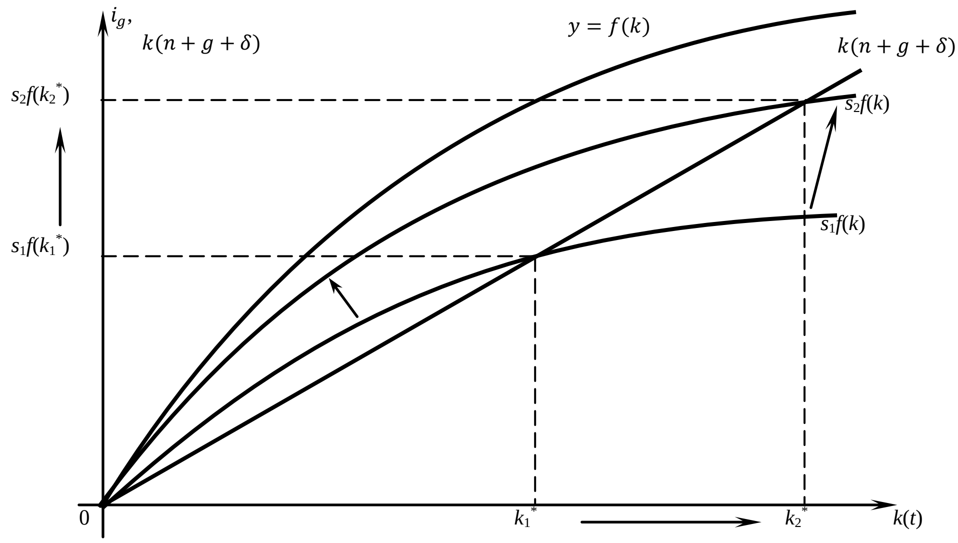
Рис. 11.10. Динамика фондовооруженности труда в окрестности точки $\tilde{k}=0$



Динамика фондовооруженности труда с учетом его интенсивности для случая производственной функции Кобба–Дугласа (11.5) $\lim_{t\to\infty}k(t)=\left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ подтверждает вывод о сходимости с течением времени ее величины к устойчивому уровню, определяемому соотношением (11.9) с учетом (xii): $\frac{k(t)}{y(t)}=\frac{k(t)}{k(t)^\alpha}=k(t)^{1-\alpha}=\frac{s}{\delta+n+g}$, т.е. $k^*(t)=\left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

При росте нормы сбережений растут инвестиции и устойчивая величина удельного запаса капитала (рис. 11.11). Но устойчивый уровень капиталовооруженности труда повышается лишь до нового устойчивого уровня, т.е. увеличение нормы сбережений не обеспечивает постоянный рост k^*.

Рис. 11.11. Влияние повышения нормы сбережений на устойчивый уровень капиталовооруженности труда заданной эффективности



В устойчивом состоянии $\dot{k}=0$, поэтому $k^*=\frac{K}{L}=const$, а также $\dot{y}=\frac{df(k)}{dt}=0$, т.е. $y(k^*)=\frac{Y}{L}=const$. Объем ВВП ($Y=EL_ny$) при этом растет темпом $(n+g)$: $Y(t)=y(k^*)L_n(0)E(0)e^{(n+g)t}$. Потребление $C=(1-s)Y$ и инвестиции $I=sY$ растут тем же темпом, что и Y. Таким же темпом увеличивается и общий объем капитала ($K=k^*EL_n$): $K(t)=k^*L_n(0)E(0)e^{(n+g)t}$.

Производительность неинтенсивного труда $\left(y_n\equiv\frac{Y(t)}{L_n(t)}=yE(t)=f(k^*)E(0)e^{gt}\right)$ и его фондовооруженность $\left(k_n\equiv\frac{K(t)}{L_n(t)}=k^*E(t)=k^*E(0)e^{gt}\right)$, а также удельное потребление $\left(c_n\equiv\frac{C(t)}{L_n(t)}=\frac{(1-s)y(k^*)L_n(0)E(0)e^{(n+g)t}}{L_n(0)e^{nt}}=(1-s)y(k^*)E(0)e^{gt}\right)$ растут за счет технического прогресса темпом g.

Таким образом, экономический рост и увеличение богатства, овеществленного в основных фондах, в устойчивом состоянии могут происходить за счет экстенсивных и интенсивных факторов. К числу источников интенсивного роста можно отнести увеличение экономически активного населения, а интенсивного – технический прогресс, увеличивающий производительность и фондовооруженность труда.

Проанализируем теперь динамику удельных потребительских расходов при изменении устойчивых уровней капиталовооруженности труда в зависимости от нормы накопления. С учетом определения сбережений как непотребленного дохода (3.10), а также их функциональной зависимости от дохода, потребительские расходы в расчете на единицу интенсивного труда можно выразить через функцию его производительности: $c=\frac{Y-S}{EL_n}=\frac{Y-sY}{EL_n}=\frac{(1-s)Y}{EL_n}=(1-s)y=y-sy$. С учетом выражения для устойчивого уровня капиталовооруженности интенсивного труда (11.9) максимизируемую функцию удельного потребления можно расписать следующим образом: $c(k^*(s))=y(k^*(s))-sy(k^*(s))=f(k^*(s))-(\delta+n+g)k^*(s)$.

Исследуя на максимум данную функцию, возьмем ее производную:

$$\frac{dc}{ds}=\frac{\partial f}{\partial k^*}\frac{dk^*}{ds}-(\delta+n+g)\frac{dk^*}{ds}=\frac{dk^*}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial k^*}-\delta-n-g\right)$$

и приравняем ее, по необходимому условию, нулю:

$$MP_k=n+g+\delta. \qquad (11.10)$$

Здесь было использовано соотношение (1.19), согласно которому $\frac{\partial f}{\partial k} = MP_k$. Кроме того, очевидно, что $\frac{dk}{ds} \neq 0$ (рис. 11.11).

Равенство (11.10) представляет собой «золотое правило» накопления капитала в модели экономического роста Солоу–Свана[6] (рис. 11.12).

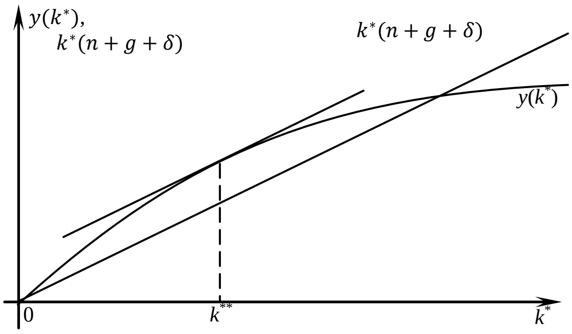


Рис. 11.12.
«Золотое правило» накопления

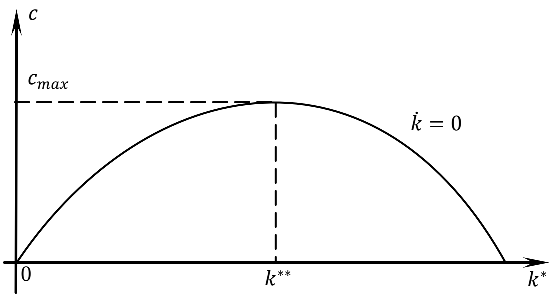


Рис. 11.13.
Зависимость удельного потребления от устойчивого уровня фондовооруженности

Если домножить левую и правую части «золотого правила» (11.10) на устойчивый уровень капиталовооруженности труда k^{**} $(f'(k^{**})k^{**} = (n+g+\delta)k^{**})$ и сопоставить полученное равенство с условием устойчивого состояния (11.9), соответствующего оптимальному уровню капиталовооруженности k^{**} $(sf(k^{**}) = (n+g+\delta)k^{**})$, то в силу равенства $f'(k^{**})k^{**} = sf(k^{**})$ можно заметить, что в условиях устойчивого состояния, удовлетворяющего «золотому правилу» (11.10), норма сбережений равняется эластичности производительности труда[7]: $s = \frac{f'(k^{**})k^{**}}{f(k^{**})}$.

Рассмотрим варианты перехода к устойчивому состоянию, отвечающему «золотому правилу» Э. Фелпса. В первом случае (рис. 11.14), поскольку $k^* > k^{**}$, норма сбережений s сокращается. ВВП в расчете на единицу труда заданной эффективности y убывает быстрее, чем удельные инвестиции i, и подушевое потребление c сокращается.

Во втором случае (рис. 11.15), поскольку $k^* < k^{**}$, норма сбережений s повышается. ВВП в расчете на единицу труда заданной эффективности y увеличивается, причем подушевое потребление c растет быстрее, чем удельные инвестиции i.

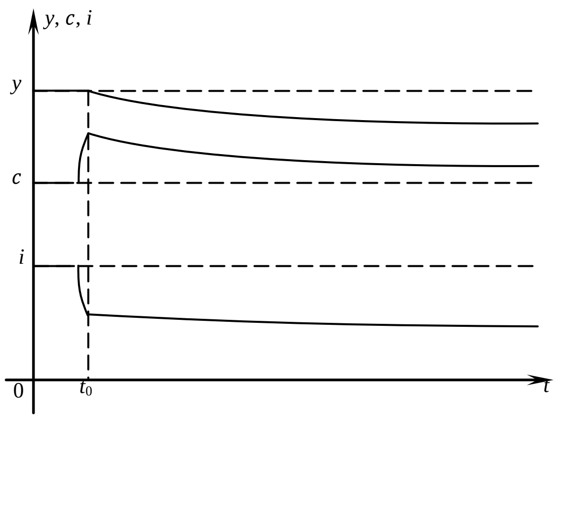


Рис. 11.14. Динамика макропоказателей в случае $k^* > k^{**}$

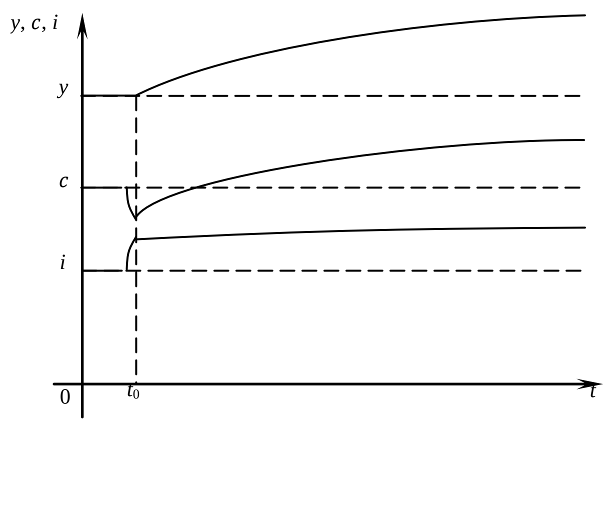


Рис. 11.15. Динамика макропоказателей в случае $k^* < k^{**}$

[6] Phelps E. The golden rule of accumulation: a fable for growth men // American economic review. 1961. Vol. 51. № 4.

[7] В частности, для производственной функции Кобба–Дугласа (xii) она равна показателю степени α.