9.6. Экономический рост и динамическая сбалансированность хозяйственной системы в кейнсианской концепции

Модель Р. Харрода и Е. Домара[1] анализирует различные траектории народнохозяйственного роста в зависимости от динамики совокупного потребления. Базовым уравнением моделей роста является основное макроэкономическое тождество (8.6), рассматриваемое в динамическом контексте, когда все входящие в него переменные – ВВП ($Y(t)$), потребление ($C(t)$) и инвестиции ($I(t)$) – являются функциями времени.

Модель Харрода–Домара опирается на принцип акселерации инвестициями ВВП (4.33), где $B = const$ – фондоемкость ВВП, соответственно $1/B$ – предельный продукт капитала, или предельная фондоотдача, на макроэкономическом уровне. Фактически в рассматриваемой модели в каждый данный момент времени используется леонтьевская производственная функция (П1.6) при условии, что на рынке труда присутствует избыток предложения и труд не является лимитирующим фактором производства. Это свидетельствует о кейнсианском характере модели Харрода–Домара.

Будем придерживаться традиционной предпосылки о первоначальной наделенности экономической системы некоторым запасом капитала (4.35).

Модели акселератора соответствует пропорциональность инвестиций ВВП (4.34). При этом износ капитала не учитывается: считается, что валовые и чистые инвестиции (4.32) совпадают. Подставляя инвестиционную функцию (4.34) в основное макроэкономическое тождество (8.6), получаем фундаментальное дифференциальное уравнение, описывающее динамику макроэкономической системы в модели Харрода–Домара:

$$Y(t) = B\frac{dY(t)}{dt} + C(t). \tag{9.19}$$

Обозначим через $\alpha(t) \equiv \frac{I(t)}{Y(t)}$ норму накопления, через $\beta(t) \equiv \frac{C(t)}{Y(t)}$ – норму потребления, а через $\rho(t) \equiv \frac{dY(t)/dt}{Y(t)}$ – темп прироста ВВП.

По определению, сбережения есть непотребленный доход (3.10). Если основное макроэкономическое тождество (8.6) переписать как равенство сбережений и инвестиций (8.7), то коэффициент $\alpha(t)$ можно трактовать не только как норму инвестиций, но и как норму сбережений. Используя введенные показатели норм накопления и потребления, основное макроэкономическое тождество (8.6) можно записать в удельных величинах:

$$\alpha(t) + \beta(t) = 1. \tag{9.20}$$

С учетом инвестиционной функции (4.34) норму накопления можно записать так:

$$\alpha(t) = \frac{B\dot{Y}}{Y} = B\rho(t), \tag{9.21}$$

откуда следует выражение темпа прироста ВВП:

$$\rho(t) = \frac{\alpha(t)}{B}.$$

[1] См.: Аллен Р. Математическая экономия. – М.: Иностранная литература, 1963; Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – 3-е изд. – М.: Дело и Сервис, 2001; Классики кейнсианства: Харрод Р. К теории экономической динамики; Хансен Э. Экономические циклы и национальный доход: в 2-х т. – М.: Экономика, 1997.

Максимальный, технологически возможный темп экономического роста

$$\rho(t) \equiv \frac{\dot{Y(t)}}{Y(t)} = \frac{1}{B} = \rho_{max} \tag{9.22}$$

соответствует ситуации, когда ВВП целиком используется на накопление $\alpha(t) = 1$.

В рамках модели Харрода–Домара данный вырожденный случай, когда потребление отсутствует $\beta(t) = 0$, является вспомогательным: он необходим для дальнейшего анализа. Основное дифференциальное уравнение (9.19) при этом упрощается:

$$\frac{Y(t)}{B} = \frac{dY}{dt}. \tag{9.23}$$

Разделяя переменные $d\ln|Y| = \frac{dt}{B}$, интегрируя $\int d\ln Y = \frac{1}{B}\int dt + \ln c_1$, а затем потенцируя данное уравнение, получаем:

$$Y(t) = c_1 e^{\frac{t}{B}}. \tag{9.24}$$

Константу найдем из начального условия: $Y(0) = c_1$.

В итоге решение уравнения (9.23), характеризующего потенциал роста ВВП, имеет вид:

$$Y(t) = Y(0)e^{\frac{t}{B}}. \tag{9.25}$$

Проанализируем макроэкономическую динамику при постоянном темпе прироста потребления *r*:

$$C(t) = C(0)e^{rt}.$$

При этом уравнение (9.19) принимает вид:

$$Y(t) = B\dot{Y} + C(0)e^{rt}, \text{или } \dot{Y} = \frac{Y}{B} - \frac{C(0)}{B}e^{rt}. \tag{9.26}$$

Общим решением данного неоднородного дифференциального уравнения будет сумма общего решения соответствующего однородного уравнения (9.23) и частного решения неоднородного уравнения (9.26). Однородное дифференциальное уравнение (9.23) было решено при анализе максимального технологически возможного темпа прироста ВВП (9.24) – (9.25). Будем искать общее решение неоднородного уравнения (9.26) методом вариации постоянной. Для этого представим множитель c_1, фигурирующий в решении однородного уравнения (9.24), не как константу, а как функцию времени:

$$Y(t) = c_1(t)e^{\frac{t}{B}}. \tag{9.27}$$

Подставляя это соотношение в неоднородное уравнение (9.26), после очевидных преобразований получаем уравнение относительно множителя c_1: $\frac{dc_1}{dt}e^{\frac{t}{B}} = -\frac{C(0)}{B}e^{rt}$. Интегрируя его, получаем искомое значение варьируемого множителя: $c_1(t) = -\frac{C(0)e^{t\left(r-\frac{1}{B}\right)}}{B\left(r-\frac{1}{B}\right)} + c_2$. Подставляем его в решение однородного уравнения (9.24): $Y(t) = -\frac{C(0)e^{rt}}{Br-1} + c_2 e^{\frac{t}{B}}$ и находим константу c_2 из начального условия: $Y(0) = -\frac{C(0)}{Br-1} + c_2$, или $c_2 = Y(0) + \frac{C(0)}{Br-1}$. В итоге решение неоднородного дифференциального уравнения (9.26) выглядит так:

$$Y(t) = \left(Y(0) + \frac{C(0)}{Br-1}\right)e^{\frac{t}{B}} - \frac{C(0)e^{rt}}{Br-1}. \tag{9.28}$$

При
$$r = \frac{1}{B} = \rho_{max}$$
в уравнении (9.26) наблюдается особенность, так как знаменатели в правой части его решения (9.28) обращаются в нуль. Поэтому необходимо отдельно решить уравнение:
$$\dot{Y} = \frac{Y}{B} - \frac{C(0)}{B} e^{\frac{t}{B}}. \qquad (9.29)$$

Как и в предыдущем случае $\left(r \neq \frac{1}{B}\right)$, решение соответствующего однородного уравнения имеет вид (9.24). Общее решение неоднородного уравнения (9.29) ищем, варьируя постоянную (9.27). Подставляем (9.27) в неоднородное уравнение (9.29) и после очевидных преобразований получаем: $\frac{dc_1}{dt} = -\frac{C(0)}{B}$. Интегрируя данное уравнение, находим множитель $c_1(t) = -\frac{C(0)}{B} t + c_2$ и решение уравнения (9.29), которое с учетом начального условия ($c_2 = Y(0)$) имеет вид:
$$Y(t) = \left(Y(0) - \frac{C(0)}{B} t\right) e^{\frac{t}{B}}. \qquad (9.30)$$

Проанализируем полученную траекторию динамики ВВП. Для этого рассчитаем производную Y по времени:
$$\dot{Y} = \left(\frac{Y(0)}{B} - \frac{C(0)}{B} - \frac{C(0)}{B^2} t\right) e^{\frac{t}{B}}.$$

Она равна нулю при $t_1 = \frac{B(Y(0) - C(0))}{C(0)} = B\left(\frac{1}{\beta(0)} - 1\right) = B\frac{\alpha(0)}{\beta(0)}$. С течением времени ВВП сначала, при $t < B\frac{\alpha(0)}{\beta(0)}$, растет, достигает максимума при $t = t_1$ и затем убывает до нуля (рис. 9.13) при $t_2 = \frac{Y(0)}{C(0)} B = \frac{B}{\beta(0)}$.

Аналогично ведут себя и инвестиции:
$$I(t) = B\dot{Y} = \left(Y(0) - C(0) - \frac{C(0)}{B} t\right) e^{\frac{t}{B}} = \left(I(0) - \frac{C(0)}{B} t\right) e^{\frac{t}{B}}.$$

Их производная имеет вид
$$\dot{I} = B\ddot{Y} = \left(\frac{Y(0)}{B} - \frac{2C(0)}{B} - \frac{C(0)}{B^2} t\right) e^{\frac{t}{B}},$$
поэтому инвестиции растут при $t < t_3 = \frac{B(Y(0) - 2C(0))}{C(0)} = B\left(\frac{\alpha(0) - \beta(0)}{\beta(0)}\right)$ и достигают максимума при $t = t_3$, когда $\dot{I} = 0$. В этот момент скорость роста ВВП оказывается максимальной. Данный момент времени определяет точку перегиба на графике ВВП (рис. 9.13). Затем, при $t > t_3$, инвестиции начинают убывать и снижаются до нуля при $t = t_1$. В данный момент весь доход уходит на потребление. При $t > t_1$ ВВП начинает сокращаться, когда потребление превышает доход, сбережения и инвестиции становятся отрицательными, т.е. «проедаются» прошлые накопления.

В данном случае, при темпе прироста потребления $r = \frac{1}{B} = \rho_{max}$, темп прироста ВВП $\frac{\dot{Y(t)}}{Y(t)} = \frac{1}{B} + \frac{C(0)}{C(0)t - BY(0)}$ с течением времени монотонно убывает.

Выпишем соответствующую траекторию динамики богатства, используя метод интегрирования по частям:

$$
\begin{aligned}
W(t) &= K_0 + \int_0^t S(\tau)d\tau = BY(0) + \int_0^t I(\tau)d\tau = BY(0) + \int_0^t I(0)e^{\tau/B}d\tau - \int_0^t \frac{C(0)}{B}\tau e^{\tau/B}d\tau \\
&= BY(0) + BI(0)\int_0^t de^{\tau/B} - C(0)\int_0^t \tau de^{\tau/B} \\
&= BY(0) + BI(0)e^{\tau/B}\Big|_0^t - C(0)\int_0^t d\left(\tau e^{\tau/B}\right) + \int_0^t C(0)e^{\tau/B}d\tau \\
&= BY(0) + \left(BI(0) + C(0)(B-\tau)\right)e^{\tau/B}\Big|_0^t = B(Y(0) - C(0)t/B)e^{t/B} \\
&= BY(t) = K(t).
\end{aligned}
$$

Таким образом, динамика богатства описывается линейной трансформацией траектории ВВП. Оно начинает расти с убывающей скоростью и достигает максимума в те же моменты – соответственно t_3 и t_1, – что и ВВП. Богатство оказывается израсходованным целиком в момент t_2, когда нулевым становится ВВП (рис. 9.13).

Рассмотрим теперь случай $r \neq \frac{1}{B} = \rho_{max}$, когда динамика ВВП описывается зависимостью (9.28). Найдем момент времени, когда ВВП достигает максимума: $\dot{Y} = \left(Y(0) + \frac{C(0)}{Br-1}\right)\frac{e^{t/B}}{B} - \frac{rC(0)e^{rt}}{Br-1} = 0$. Преобразуя данное равенство, получаем момент, соответствующий наибольшей величине ВВП: $t_1 = \frac{B}{(Br-1)}\ln\frac{Y(0)(Br-1)+C(0)}{BrC(0)}$. Поскольку траектория инвестиций представляет собой умноженную на константу фондоемкости скорость изменения ВВП (4.33), момент t_1 представляет собой также время, когда инвестиции падают до нуля. Найдем время, когда ВВП падает до нуля: $t_2 = \frac{B}{(Br-1)}\ln\frac{Y(0)(Br-1)+C(0)}{C(0)}$. Рассчитаем теперь точку перегиба траектории динамики ВВП, которая является моментом, когда инвестиции достигают максимума: $\dot{I} = B\ddot{Y} = \left(Y(0) + \frac{C(0)}{Br-1}\right)\frac{e^{t/B}}{B^2} - \frac{r^2C(0)e^{rt}}{Br-1} = 0$, а значит, $t_3 = \frac{B}{(Br-1)}\ln\frac{Y(0)(Br-1)+C(0)}{B^2r^2C(0)}$.

Динамика богатства, аналогично ситуации $r = \frac{1}{B} = \rho_{max}$, с точностью до линейного преобразования следует траектории ВВП:

$$
\begin{aligned}
W(t) &= K_0 + \int_0^t S(\tau)d\tau = BY(0) + \int_0^t I(\tau)d\tau \\
&= BY(0) + \int_0^t Y(0)e^{\tau/B}d\tau + \int_0^t \frac{C(0)e^{\tau/B}}{(Br-1)}d\tau - \int_0^t \frac{rBC(0)e^{r\tau}}{(Br-1)}d\tau \\
&= BY(0) + BY(0)\int_0^t de^{\tau/B} + \frac{BC(0)}{(Br-1)}\int_0^t de^{\tau/B} - \frac{BC(0)}{(Br-1)}\int_0^t de^{r\tau} \\
&= BY(0) + B\left(Y(0) + \frac{BC(0)}{Br-1}\right)e^{\tau/B}\Big|_0^t - \frac{BC(0)}{(Br-1)}e^{r\tau}\Big|_0^t \\
&= BY(0)e^{t/B} + \frac{BC(0)e^{t/B}}{Br-1} - \frac{BC(0)e^{rt}}{Br-1} = BY(t) = K(t).
\end{aligned}
$$

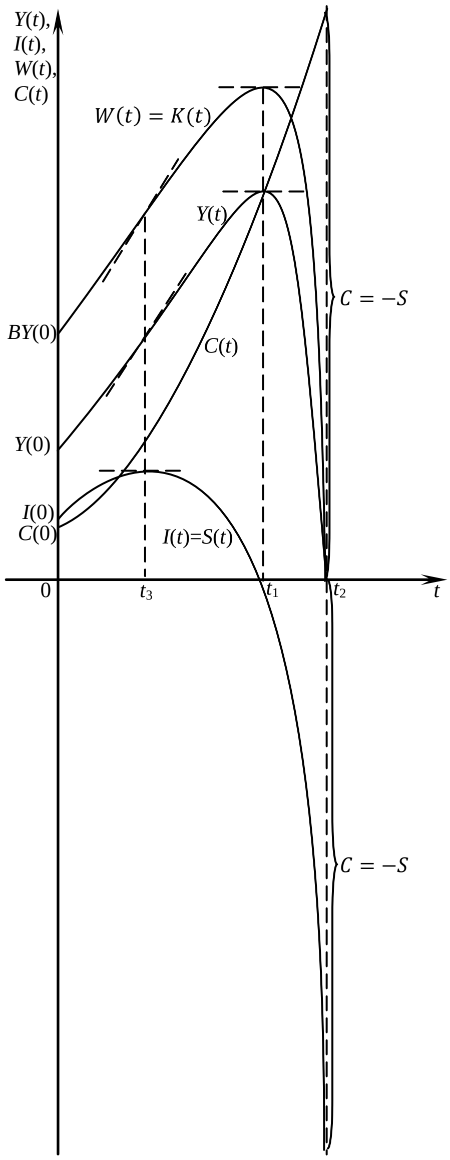
Точки ее перегиба и максимума – это те же моменты (t_3 и t_1 соответственно), которые были рассчитаны выше при анализе поведения ВВП. Богатство сокращается до нуля в момент t_2, когда нулевым становится ВВП.

Полученные решения справедливы лишь при $Y(0)(Br-1)+C(0)<0$, т.е. при

$$\frac{1}{B}=\rho_{max}>r>\frac{I(0)}{BY(0)}=\frac{\alpha(0)}{B}=\rho(0).$$

В данном случае динамика дохода, инвестиций и богатства аналогично ситуации $r=\frac{1}{B}=\rho_{max}$ может быть проиллюстрирована рис. 9.13. С течением времени данные показатели сначала растут, затем достигают максимума и впоследствии убывают до нуля.

Рис. 9.13. «Экономический крах»
в модели Харрода–Домара



При

$$0 \leqslant r < \frac{I(0)}{BY(0)} = \frac{\alpha(0)}{B} = \rho(0) < \rho_{max} = \frac{1}{B}$$

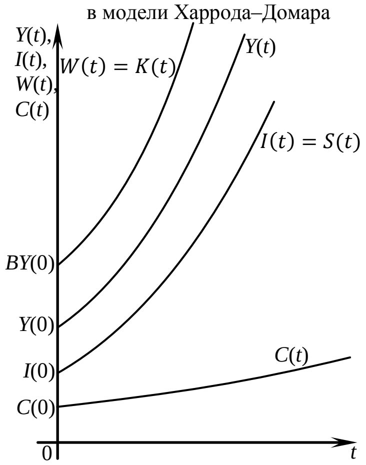
$\dot{Y} = \frac{(Y(0)(Br-1)+C(0))e^{t/B} - BrC(0)e^{rt}}{B(Br-1)} > 0$, и $Y(t)$ неограниченно растет.

Поскольку $\alpha(t) = 1 - \frac{C(0)e^{rt}}{\left(Y(0)+\frac{C(0)}{Br-1}\right)e^{t/B} - \frac{C(0)e^{rt}}{Br-1}}$, постольку

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 1, \lim_{t\to\infty} \beta(t) = 0.$$

Данный тип развития $\left(\text{при } 0 \leqslant r < \frac{\alpha(0)}{B} < \frac{1}{B}\right)$ можно назвать «накоплением ради накопления» (рис. 9.14). Его крайним случаем является динамика ВВП с постоянным во времени потреблением (xi)[2].

Рис. 9.14. «Накопление ради накопления» в модели Харрода–Домара



Как правило, резкое наращивание накопления характерно для периода индустриализации народного хозяйства, которая осуществляется за счет масштабного перетока избыточных трудовых ресурсов из сельского хозяйства в развивающуюся промышленность. Этот тип развития опирается на быстрый прирост трудовых ресурсов при «демографическом взрыве». Это значит, что при низких темпах роста потребительских расходов, когда $0 \leqslant r < \frac{\alpha(0)}{B} = \rho(0)$, резкий рост населения будет приводить к падению среднедушевого потребления.

---

[2] Если допустить, что уровень потребления постоянен во времени: $C(t) = C(0)$. В таком случае дифференциальное уравнение (9.19) приобретает вид: $Y(t) = B\dot{Y} + C(0)$. Решаем данное уравнение, разделяя переменные: $\left(Y(t) - C(0)\right)dt = BdY$. Интегрируя, получаем: $Y(t) = C(0) + c_1 e^{t/B}$, и находим константу c_1 по начальному значению $Y(0)$. В итоге имеем:

$$Y(t) = C(0) + \left(Y(0) - C(0)\right)e^{t/B} = C(0) + I(0)e^{t/B}. \qquad \text{(xi)}$$

В данном случае с течением времени, в перспективе норма потребления снижается до нуля:

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{C(0)}{C(0) + (Y(0) - C(0))e^{t/B}}\right) = 0,$$

а норма сбережения в силу тождества (9.20) стремится к единице (рис. 9.14):

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \beta(t)\right) = 1.$$

Учитывая соотношение (9.21), можно сделать вывод, что при этом темп экономического роста с течением времени стремится к максимальному технологически возможному (9.22):

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \frac{1}{B}\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \frac{1}{B}.$$

Данный, мобилизационный тип хозяйственной системы не может существовать бесконечно. В долгосрочной перспективе с исчерпанием волевых стимулов к экстенсивному наращиванию инвестиций, если не произойдут серьезные структурные сдвиги в технологии производства и экономике в целом, система может оказаться на грани истощения внутренних источников развития.

Хозяйственное развитие с данными характеристиками возможно лишь на последней стадии демографического перехода, при низких темпах роста населения, когда сочетаются низкие уровни рождаемости и смертности при значительной доле старых поколений, что при медленно растущем валовом потреблении способно увеличивать его подушевые показатели. При этом источником значительных инвестиций и стремительного роста ВВП, предусматриваемых моделью, в условиях дефицита трудовых ресурсов может стать нейтральный по Харроду, трудосберегающий и одновременно капиталоинтенсивный тип технологического прогресса.

Если же

$$r = \frac{\alpha(0)}{B} = \rho(0) < \frac{1}{B} = \rho_{max},$$

то поскольку $\frac{C(0)}{1-\alpha(0)} = \frac{C(0)}{\beta(0)} = Y(0)$, постольку

$$Y(t) = Y(0)e^{\frac{\alpha(0)}{B}t}. \qquad (9.31)$$

При этом $C(t) = C(0)e^{\frac{\alpha(0)}{B}t}$, а значит, нормы потребления и накопления так же, как и темп прироста ВВП, остаются постоянными во времени:

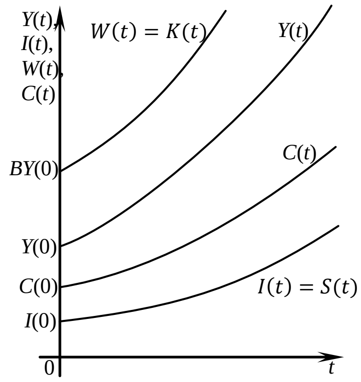
$$\beta(t) = \frac{C(t)}{Y(t)} = 1 - \alpha(0) = \beta(0)$$

$$\alpha(t) = 1 - \beta(t) = 1 - \beta(0) = \alpha(0);$$

$$\rho(t) = \frac{\alpha(t)}{B} = \frac{\alpha(0)}{B} = \rho(0).$$

В соответствии с (9.31) ВВП выходит на траекторию сбалансированного роста. Здесь $\frac{\alpha(0)}{B}$ – это «гарантированный» темп роста, в терминологии Р. Харрода[3]. Потребление, накопление так же, как и доход, растут постоянными темпами (рис. 9.15). Отношение потребления к инвестициям $\frac{C(t)}{I(t)} = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = \frac{\beta(0)}{\alpha(0)} = \frac{C(0)}{I(0)}$ на траектории «гарантированного» роста должно оставаться постоянным.

Рис. 9.15. «Гарантированный рост» в модели Харрода–Домара



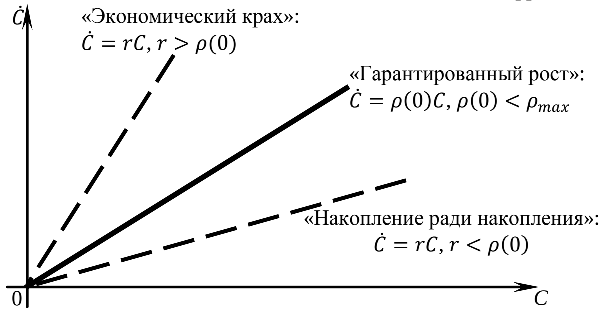
[3] Классики кейнсианства. Т.1. Харрод Р. К теории экономической динамики. – М.: Экономика, 1997.

Итак, если темп роста потребления равен r, то для обеспечения долгосрочного сбалансированного роста норма накопления должна составлять $\alpha(t) = \alpha(0) = Br$, где B – предельная фондоемкость, или коэффициент акселерации. И наоборот, если норма накопления равна $\alpha(0) = \alpha(t)$, то для сбалансированного роста постоянным темпом $\rho(t) = \rho(0) = \frac{\alpha(0)}{B}$ потребление должно расти тем же темпом $r = \frac{\alpha(0)}{B} = \rho(0)$.

Поскольку доля потребления $\beta(t) = \beta(0)$ на траектории «гарантированного» роста постоянна, это соответствует долгосрочной кейнсианской потребительской функции (3.28). В модели Харрода–Домара долгосрочная кейнсианская функция потребления не постулируется, а выводится с одной лишь предпосылкой о постоянстве его темпа прироста, в качестве одного из решений, характеризующего траекторию «гарантированного» роста экономической системы. О кейнсианском характере модели свидетельствует и возможность безработицы при движении экономики по траектории долгосрочного сбалансированного роста.

Долгосрочное равновесие в модели Харрода–Домара не является устойчивым. Любое отклонение от траектории сбалансированного роста уводит экономику от состояния долгосрочного равновесия (рис. 9.16).

Рис. 9.16. Типология хозяйственной динамики в модели Харрода–Домара



С помощью модели Харрода–Домара можно определить наиболее предпочтительную траекторию долгосрочной народнохозяйственной динамики. Но в ней не анализируются детально факторы экономического роста. Этому посвящена модель Р. Солоу, которая будет рассмотрена в параграфе 11.2.