9.4. Динамика в модели *IS*/*LM*

Будем анализировать динамику в модели *IS*/*LM* на базе паутинообразной модели. Вначале рассмотрим дискретный ход времени[1]. Если в паутинообразной модели, описанной ранее, временной лаг присутствовал в функции предложения, возрастающей зависимости объема производства от рыночной цены товара, то в модели *IS*/*LM* вводится запаздывание в функции *IS*, которая представляет собой убывающую зависимость ВВП от ставки процента: $Y_t = Y(i_{t-1})$. Основанием служит запаздывание функции инвестиционного спроса от ставки процента: $I_t = I(i_{t-1})$. В линейном случае зависимость будет такова: $Y_t = A - Bi_{t-1}$, где $A = \frac{C_0+I_0+G_0}{1-MPC(1-t)}$, $B = \frac{d}{1-MPC(1-t)}$.

В функции *LM* предполагается зависимость между объемом ВВП и ставкой процента одного и того же периода: $Y_t = Y(i_t)$. В линейном случае зависимость будет такова: $Y_t = C + Di_t$, где $C = \frac{1}{k}\frac{M}{P}$, $D = \frac{f}{k}$.

В условиях макроравновесия наблюдается равенство объема ВВП, определяемого в соответствии с уравнениями *IS* и *LM*: $Y_t = A - Bi_{t-1} = C + Di_t$. Схематично итерационное взаимодействие функций *IS* и *LM* можно представить так:

$$Y_0 \to i_0 = f^{-1}(Y_0) \to Y_1 = g(i_0) \to i_1 = f^{-1}(Y_1) \to Y_2 = g(i_1) \to \cdots$$

Выразим из условия равновесия товарных и денежных рынков i_t через i_{t-1}:

$$i_t = \frac{A-C}{D} - \frac{B}{D}i_{t-1}. \qquad (9.16)$$

По индукции получаем зависимость между ставками процента первоначального и произвольного, t-го периодов:

$$i_t = \frac{A-C}{D} - \frac{(A-C)B}{D^2} + \frac{(A-C)B^2}{D^3} - \cdots + (-1)^{t-1}\frac{(A-C)B^{t-1}}{D^t} + \left(-\frac{B}{D}\right)^t i_0.$$

Слагаемые, присутствующие в правой части данного выражения, за исключением последнего, представляют собой геометрическую прогрессию, суммируя которую, получаем:

$$i_t = \left(\frac{A-C}{B+D}\right)\left(1 - \left(-\frac{B}{D}\right)^t\right) + \left(-\frac{B}{D}\right)^t i_0.$$

Здесь возможны три случая. Если $\frac{B}{D} < 1$, то $\left(\frac{B}{D}\right)^t \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, с течением времени ставка процента сходится к равновесному значению (9.13), т.е. при более крутом наклоне обратной функции *IS* по сравнению с обратной функцией *LM* равновесие является устойчивым (рис. 9.5). Если $\frac{B}{D} > 1$, то $\left(\frac{B}{D}\right)^t \to \infty$ при $t \to \infty$, и процесс расходится. Т.е. при более крутом наклоне обратной функции *LM* по сравнению с обратной функцией *IS* равновесие нестабильно (рис. 9.6). Наконец, если $\frac{B}{D} = 1$, то процентная ставка колеблется между двумя значениями: $i_t = \left(\frac{A-C}{B+D}\right)(1-(-1)^t) + (-1)^t i_0$; т.е. при $t = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $i_t = i_0$, а при $t = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $i_t = \frac{2(A-C)}{B+D} - i_0$. Итак, при равном (по модулю) угловом коэффициенте линейных функций *IS* и *LM* равновесие является квазистабильным, т.е. существует только два значения процентной ставки, которые чередуются (рис. 9.7).

[1] Ср.: Дорошенко М.Е. Анализ неравновесных состояний и процессов в макроэкономических моделях. – М.: ТЕИС, 2000.

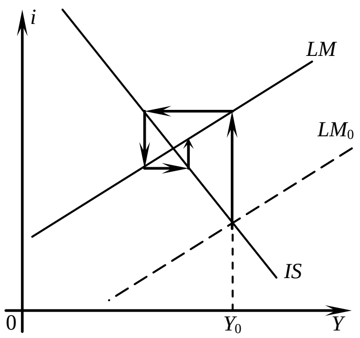

Рис. 9.5. Устойчивое равновесие в динамической модели *IS*/*LM* в дискретном времени

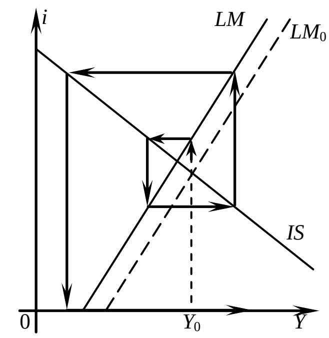

Рис. 9.6. Взрывная динамика в модели *IS*/*LM* в дискретном времени

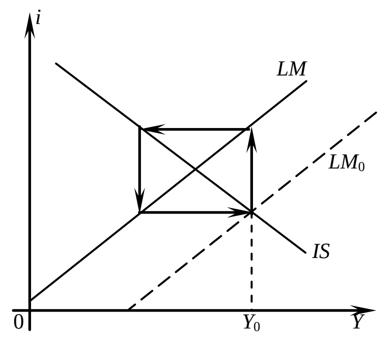

Рис. 9.7. Квазистабильное равновесие в динамической модели *IS*/*LM* в дискретном времени

Перейдем теперь к анализу модели в непрерывном времени. Рассчитаем отклонение ставки процента текущего, t-го периода от ее величины в предыдущий период $t-1$. Вычитая i_{t-1} из левой и правой частей соотношения (9.16), получаем конечно-разностное уравнение $i_t - i_{t-1} = \frac{A-C}{D} - \frac{(B+D)}{D} i_{t-1}$, которому соответствует следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{di}{dt} = \frac{A-C}{D} - \frac{(B+D)}{D} i. \tag{9.17}$$

Вначале аналогично выкладкам проведенным в предшествующих разделах, получаем общее решение соответствующего однородного уравнения $\left(\frac{di}{dt} = -\frac{(B+D)}{D} i\right)$, к которому применяем метод вариации постоянной: $i(t) = c_1(t)e^{-(B+D)t/D}$. Подставляя в исходное неоднородное уравнение (9.17), приходим к дифференциальному уравнению относительно множителя c_1: $dc_1 = \left(\frac{A-C}{B+D}\right) de^{(B+D)t/D}$, решением которого будет следующее соотношение: $c_1 = \left(\frac{A-C}{B+D}\right) e^{(B+D)t/D} + c_2$. Заменяя им множитель c_1 в полученном выше решении однородного уравнения и учитывая, что $(A-C)/(B+D)$ – это равновесный уровень процентной ставки в статике (9.13), получаем общее решение неоднородного уравнения (9.17): $i(t) = i^* + c_2 e^{-(B+D)t/D}$. Константа находится по начальному условию: $i(0) = i^* + c_2$. Итоговая траектория динамики ставки процента будет выглядеть так:

$$i(t) = i^* + (i(0) - i^*) e^{-\left(\frac{kd}{f(1-MPC(1-t))}+1\right)t}.$$

Поскольку $\frac{kd}{f(1-MPC(1-t))} > 0$, ведь $k > 0$, $f > 0$, $d > 0$, $1 - MPC(1-t) > 0$, можно сделать вывод, что $\lim_{t\to\infty} i(t) = i^*$. К данному выводу можно прийти и по-другому. Если преобразовать уравнение (9.17): $\frac{di}{dt} = \left(\frac{kd}{f(1-MPC(1-t))} + 1\right)(i^* - i)$, то, в силу положительности коэффициента $kd/f(1 - MPC(1-t))$, очевидно, что в случае $i(t) > i^*$ ставка процента с течением времени снижается $\left(\frac{di}{dt} < 0\right)$ в направлении равновесного уровня (9.13). Если же $i(t) < i^*$, то процентная ставка увеличивается $\left(\frac{di}{dt} > 0\right)$ до равновесного значения (9.13). Таким образом, равновесие в модели устойчиво (рис. 9.8 – 9.9) при любых значениях коэффициентов *IS* и *LM*.

Рис. 9.8. Устойчивая макроэкономическая динамика
в модели *IS/LM*
(непрерывное время)

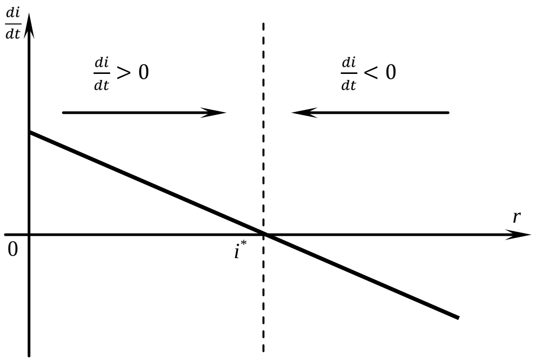

Рис. 9.9. Сходимость к равновесию в модели *IS/LM*
(в непрерывном и дискретном времени)