11.3. Динамическая сбалансированность макроэкономической системы в модели Рамсея–Касса–Купманса

В модели Рамсея–Касса–Купманса, аналогично модели Эрроу–Дебре–Маккензи, экономические агенты выступают либо в роли потребителей, либо – производителей. Рассматривается частнособственническая экономика, в которой капитал фирм принадлежит потребителям – представляет собой их активы.

Каждый из потребителей в непрерывном времени максимизирует полезность при динамическом бюджетном ограничении (I.1e). Задача репрезентативной фирмы состоит в максимизации прибыли:

$$\max_{K,L} PR = \max_{K,L}(F(K,LE)-(i+\delta)K-wL) = \max_{k,LE}\left((LE)f(k)-(i+\delta)k-w\frac{e^{-gt}}{E(0)}\right).$$

Необходимые условия максимума прибыли состоят в равенстве нулю ее производных по k и LE:

$$(11.11)\qquad \begin{cases} f'(k)=i+\delta, & (11.11.1)\\ \big(f(k)-kf'(k)\big)E(0)e^{gt}=w. & (11.11.2)\end{cases}$$

Соотношение между темпами прироста удельного потребления с учетом и без учета интенсивности трудозатрат таково:

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{d(c_ne^{-gt})/dt}{c_ne^{-gt}}=\frac{\dot{c}_ne^{-gt}-gc_ne^{-gt}}{c_ne^{-gt}}=\frac{\dot{c}_n}{c_n}-g. \qquad (11.12)$$

Поэтому условие оптимальности траектории динамики потребления (3.40) принимает вид: $\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}(i-n-\rho-\theta g)$. В силу (11.11.1), данную траекторию можно выразить следующим образом:

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}(f'(k)-\delta-n-\rho-\theta g). \qquad (11.13)$$

Уравнения (11.2) и (11.13) описывают динамику макроэкономической системы.

Проанализируем характеристики устойчивого состояния в модели Рамсея–Касса–Купманса. Итак, стационарный уровень фондовооруженности труда, когда $\dot{k}=0$, характеризуется соотношением $c=f(k)-(\delta+n+g)k$, а стационарное удельное потребление (при $\dot{c}=0$) – равенством:

$$f'(k)=\delta+n+\rho+\theta g. \qquad (11.14)$$

Стационарное состояние потребления не зависит от c. График данной зависимости представляет собой вертикальную прямую линию на рис. 11.16, который иллюстрирует совместную динамику удельных уровней потребления и капитала.

При $\dot{c}<0$, $f'(k)<\delta+n+\rho+\theta g$, а значит, поскольку при $\dot{c}=0$ выпоняется равенство (11.14), $k>k^*$. И наоборот, при $\dot{c}>0$, $f'(k)>\delta+n+\rho+\theta g$, т.е. $k<k^*$. При $\dot{k}>0$, $c<f(k)-(\delta+n+g)k$; при $\dot{k}<0$ – наоборот, $c>f(k)-(\delta+n+g)k$.

Любая траектория, за исключением той, которая пересекает линию $\dot{k}=0$, на прямой $\dot{c}=0$ дает экстремум (максимум или минимум) удельных потребительских расходов (рис. 11.16). Аналогично, линия $\dot{k}=0$ на каждой траектория, за исключением пересекающей прямую $\dot{c}=0$, соответствует экстремуму (максимуму или минимуму) фондовооруженности эффективного труда. Особой является траектория, проходящая через точку (k^*,c^*) пересечения линий $\dot{k}=0$ и $\dot{c}=0$. Она имеет перегиб, меняя направление выпуклости в данной точке.

Ни одна из равновесных траекторий, за исключением данной, последней не является устойчивой: движение по ним приводит к падению либо удельного потребления, либо фондовооруженности эффективного труда до нуля. Лишь траектория, проходящая через точку (k^*, c^*), является устойчивой: двигаясь вдоль нее, система попадает в данную точку. При любом отклонении от точки (k^*, c^*) вдоль этой траектории система будет возвращаться в данное, исходное положение.

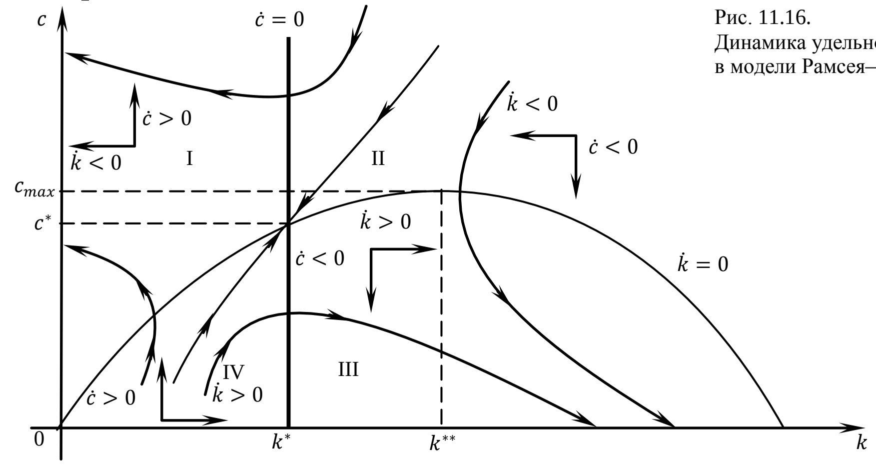

Рис. 11.16.
Динамика удельного потребления и капитала
в модели Рамсея–Касса–Купманса

Поскольку в модели Рамсея–Касса–Купманса анализируется частнособственническая экономика, в которой капитал фирм представляет собой активы потребителей, в силу того, что решение задачи (I.1e) дает условие отсутствия игры Понци (3.35) в виде равенства, постольку, учитывая (11.11.1), имеем:

$$\lim_{t_1\to\infty} a_n(t_1)e^{-\int_0^{t_1}(i(\tau)-n(\tau))d\tau} = \lim_{t_1\to\infty} k_n(t_1)e^{-\int_0^{t_1}(i(\tau)-n(\tau))d\tau}$$
$$= \lim_{t_1\to\infty} k_n(t_1)e^{-\int_0^{t_1}(f'(k_n(\tau))-\delta-n(\tau))d\tau}$$
$$= \lim_{t_1\to\infty} k(t_1)e^{-\int_0^{t_1}(f'(k(\tau))-\delta-n(\tau)-g(\tau))d\tau} = 0.$$

Это означает, что, если существует $\lim_{t_1\to\infty} k(t_1) > 0$, то

$$\lim_{t_1\to\infty} e^{-\int_0^{t_1}(f'(k(\tau))-\delta-n(\tau)-g(\tau))d\tau} = 0,$$

следовательно,

$$\int_0^{t_1} (f'(k(\tau)) - \delta - n(\tau) - g(\tau))d\tau > 0.$$

Отметим, что уровень фондовооруженности труда k^{**}, который соответствует максимальному уровню удельного потребления c_{max} и удовлетворяет соотношению (11.10), превышает величину капиталовооруженности k^*, являющуюся решением уравнения (11.14) и дающую стационарный уровень удельного потребления. Действительно, предположим обратное – что $k^{**} < k^*$. В силу характеристик производственной функции, проанализированных выше, это будет означать, что $f'(k^{**}) = n + g + \delta > f'(k^*)$, и поэтому $\int_0^{t_1}(f'(k^*) - \delta - n - g)d\tau < 0$ для произвольного момента времени t_1, ведь уровень фондовооруженности труда k^* является устойчивым, и раз достигнув его система будет его поддерживать. Последнее неравенство противоречит выкладкам, проведенным в предыдущем абзаце, по причине ложной гипотезы, что доказывает исходное утверждение: $k^{**} > k^*$. Итак, при устойчивом стационарном уровне фондовооруженности труда k^*, должно выполняться условие: $MP_K = f'(k^*) > \delta + n + g$. Это так называемое «модифицированное золотое правило» накопления капитала в модели Рамсея–Касса–Купманса.

В модели Рамсея–Касса–Купманса равновесные траектории динамики удельного потребления и фондовооруженности с учетом интенсивности трудозатрат являются оптимальными с социальной точки зрения. Для того чтобы показать это, рассмотрим экономическую систему, по своим технологическим и демографическим характеристикам аналогичную рассматренной выше, в которой аллокация ресурсов осуществляется централизованным государственным плановым органом, распределяющим ВВП между потреблением и инвестициями в соответствии с основным макроэкономическим тождеством в динамическом контексте[1] с целью оптимизации общественного благосостояния, представимого функцией полезности репрезентативного гражданина:

$$\max_{c_n}\int_0^\infty u(c_n(t))e^{-\rho t}dt = \max_{c_n}\lim_{t_1\to\infty}\int_0^{t_1} u(c_n(t))e^{-\rho t}dt:$$

$$\dot{k}_n(t) = f(k_n) - c_n - (n+\delta)k_n.$$

Функция Лагранжа для данной задачи будет иметь вид:

$$\Lambda = \lim_{t_1\to\infty}\int_0^{t_1}\big(\lambda_0 u(c_n(t))e^{-\rho t} + p(t)(\dot{k}_n(t) + c_n(t) - f(k_n(t) + (n+\delta)k_n(t))\big)\,dt.$$

Выпишем лагранжиан:

$$\mathfrak{L} = \lambda_0 u(c_n(t))e^{-\rho t} + p(t)(\dot{k}_n(t) - f\big(k_n(t)\big) + c_n(t) + (n+\delta)k_n(t)).$$

Необходимыми условиями максимизации полезности являются уравнения Эйлера по c_n и k_n:

$$\begin{cases}\lambda_0 u'(c_n)e^{-\rho t} + p(t) = 0;\\ -\dfrac{dp(t)}{dt} - p(t)f'(k_n) + p(t)(n+\delta) = 0.\end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из первого уравнения Эйлера будет следовать, что $p(t) = 0$, ведь $u'(c_n)e^{-\rho t} \neq 0$. Но, по необходимому условию экстремума, вектор множителей Лагранжа (λ, p) не может быть нулевым. Итак, $\lambda_0 \neq 0$, и без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$. Тогда первое из уравнений Эйлера принимает вид: $u'(c_n)e^{-\rho t} = -p(t)$.

Продифференцируем его по времени и поделим полученное соотношение на данное уравнение Эйлера: $-\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\rho u'(c_n)e^{-\rho t} - u''(c_n)\dot{c}_n e^{-\rho t}}{u'(c_n)e^{-\rho t}} = \rho - \frac{u''(c_n)\dot{c}_n}{u'(c_n)}$. Приравнивая данное соотношение второму уравнению Эйлера, которое дает $-\frac{\dot{p}}{p} = f'(k_n) - (n+\delta)$, получаем условие оптимальности траектории динамики потребления:

$$-\frac{u''(c_n)\dot{c}_n}{u'(c_n)} = f'(k_n) - (n+\delta+\rho).$$

Переходя к переменной потребительских расходов в расчете на одного работника с учетом интенсивности его трудозатрат (11.12), для функции полезности с постоянной эластичностью предельной полезности по удельному потреблению (3.39) получаем равновесную траекторию динамики данного макропоказателя (11.13). Таким образом, равновесные траектории динамики экономической системы в рамках модели Рамсея–Касса–Купманса являются оптимальными с социальной точки зрения.

[1] Здесь использован тот факт, что уравнение динамики фондовооруженности труда без учета его интенсивности упрощается по сравнению с (11.2):
$$\frac{dk_n(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L_n(t)}\right) = \frac{dK(t)/dt}{L_n(t)} - \frac{K(t)(dL_n(t)/dt)}{(L_n(t))^2} = \frac{sY - \delta K}{L_n} - nk_n = sf(k_n) - (n+\delta)k_n.$$