10.5. Динамическое взаимодействие совокупного спроса и предложения

Проанализируем сначала элементарную динамическую модель AD/AS при классической функции AD и простейшем уравнении AS. Будем использовать уравнение количественной теории денег (8.1). В соответствии с «монетарным правилом» в количественной теории денег (8.3), при предположении о постоянстве скорости обращения денег должно выполняться следующее соотношение между темпами роста денежной массы, уровня цен и ВВП:

$$\dot{Y} = Y(\dot{m} - \pi). \tag{10.24}$$

Запишем уравнение AS (10.16) в следующем виде:

$$\pi(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Y(t) - Y^*}{Y^*}\right).$$

Динамическое равновесие ($AD = AS$) будет выглядеть так:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \dot{m} - \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Y - Y^*}{Y^*}\right),$$

или

$$\dot{Y} - Y\left(\dot{m} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = -\frac{\alpha}{\beta Y^*}Y^2.$$

Мы получили дифференциальное уравнение Бернулли вида[1]:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^n, n \neq 1,$$

или

$$y^{-n}\frac{dy}{dt} + p(t)y^{1-n} = q(t).$$

Заменой $y^{1-n} = z$ оно сводится к линейному дифференциальному уравнению.

В нашем случае имеем:

$$Y^{-2}\dot{Y} - Y^{-1}\left(\dot{m} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = -\frac{\alpha}{\beta Y^*}.$$

Здесь $z = Y^{-1}$, соответственно $Y = z^{-1}$. Учитывая, что $\frac{dz}{dt} = -Y^{-2}\frac{dY}{dt}$, имеем:

$$\dot{z} + z\left(\dot{m} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta Y^*}.$$

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Поэтому для решения данного уравнения необходимо вначале решить соответствующее однородное уравнение $\dot{z} + z\left(\dot{m} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$. Разделяем переменные: $\frac{dz}{z} = -\left(\dot{m} + \frac{\alpha}{\beta}\right)dt$, откуда $\int d\ln z = -\int d\ln M - \frac{\alpha}{\beta}\int dt + \ln c$, т.е. $z = \frac{c}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}$.

Для решения исходного неоднородного уравнения применяем метод вариации постоянной в общем решении соответствующего однородного уравнения:

$$z(t) = \frac{c(t)}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}.$$

Используем данное выражение в исходном уравнении:

[1] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969.

$$\frac{\dot{c}}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}} = \frac{\alpha}{\beta Y^*}.$$

Решая возникающее уравнение относительно варьируемого множителя, применяем метод интегрирования по частям:

$$c(t) = \frac{\alpha}{\beta Y^*}\int_0^t M(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau + c_1 = \frac{1}{Y^*}\int_0^t M(\tau)de^{\frac{\alpha}{\beta}\tau} + c_1$$

$$= \frac{1}{Y^*}M(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}\Big|_0^t - \frac{1}{Y^*}\int_0^t \dot{M}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau + c_1$$

$$= \frac{M(t)}{Y^*}e^{\frac{\alpha}{\beta}t} - \frac{M(0)}{Y^*} - \frac{1}{Y^*}\int_0^t \dot{M}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau + c_1. \quad (10.25)$$

Таким образом, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет вид:

$$z(t) = \frac{c_1 e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}}{M(t)} + \frac{1}{Y^*} - \frac{M(0)e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}}{M(t)Y^*} - \frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}}{M(t)Y^*}\int_0^t \dot{M}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau = \frac{1}{Y(t)}.$$

Константу интегрирования находим по начальному условию: $c_1 = \frac{M(0)}{Y(0)}$. Итак:

$$\frac{1}{Y(t)} = \frac{1}{Y^*} + \left(\frac{1}{Y(0)} - \frac{1}{Y^*}\right)\frac{M(0)}{M(t)}e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} - \frac{1}{Y^*M(t)}e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\int_0^t \dot{M}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau,$$

т.е.

$$Y(t) = \left(\frac{1}{Y^*} + \left(\frac{1}{Y(0)} - \frac{1}{Y^*}\right)\frac{M(0)}{M(t)}e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} - \frac{1}{Y^*M(t)}e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\int_0^t \dot{M}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau\right)^{-1}.$$

В частности, при проведении рестриктивной экономической политики, когда денежная масса постоянна во времени $(\dot{M} = 0)$, данное выражение упрощается:

$$Y(t) = \left(\frac{1}{Y^*} + \left(\frac{1}{Y(0)} - \frac{1}{Y^*}\right)\frac{M(0)}{M(t)}e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\right)^{-1}.$$

Очевидно, что с течением времени, в пределе (при $t \to \infty$) ВВП в данной ситуации будет стремиться к потенциальному значению:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^*.$$

Проанализируем теперь поведение макроэкономической системы при классической функции AD и простейшем уравнении AS (10.16), (10.24) в долгосрочном аспекте в общем случае. Для этого при решении соответствующего дифференциального уравнения воспользуемся первоначальным выражением проварьированного множителя $c(t)$ (10.25) с учетом того, что значение константы интегрирования при этом остается прежним. Тогда в долгосрочном аспекте, когда время t стремится к бесконечности, система может быть охарактеризована пределом:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{Y^*M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{\frac{Y^*M(0)}{Y(0)} + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^t M(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau}\right). \quad (10.26)$$

Отметим, что $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t M(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau = M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$. Следовательно, поскольку производная данного интеграла $M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$, как и денежная масса $M(t)$, положительна, $\int_0^t M(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau$ монотонно возрастает.

Рассмотрим случай монотонно возрастающей динамики величины $M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$. Такое ее поведение будет преобладающим, поскольку, как правило, денежная масса $M(t)$ с течением времени увеличивается. Более того, возрастающая динамика $M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$ будет чаще всего сохраняться и при убывании денежной массы – за исключением крайних случаев, когда последняя будет сокращаться с исключительно высокой, экспоненциальной скоростью – быстрее, чем возрастает сомножитель $e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$.

Итак, при возрастании $M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$ в силу аналогичной динамики $\int_0^t M(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau$ в пределе (10.26) присутствует неопределенность вида ∞/∞. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(Y^* M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}\right)}{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Y^* M(0)}{Y(0)} + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^t M(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau\right)}\right) = \lim_{t\to\infty} Y^*\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial t}e^{\frac{\alpha}{\beta}t} + M(t)\frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{\frac{\alpha}{\beta}M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} Y^*\left(\frac{\beta\dot{M}}{\alpha M} + 1\right).$$

Значит, в бесконечно удаленном времени динамика ВВП будет подчиняться следующему соотношению:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^* + \frac{\beta}{\alpha}Y^* \lim_{t\to\infty}\dot{m}(t). \qquad (10.27)$$

Таким образом, в классической макроэкономической теории в отличие от статического равновесия в случае, когда динамическая функция AS не учитывает ожидания экономических агентов, за исключением вырожденных ситуаций, когда денежная масса убывает с чрезвычайно высокой скоростью, превышающей экспоненциальную, с течением времени в пределе (при $t \to \infty$) исчезает нейтральность денег – возникает линейная зависимость между объемом ВВП и темпом прироста денежной массы.

Частным случаем здесь выступает рассмотренная выше рестриктивная монетарная политика ($M(t) = const$, т.е. $\dot{m} = 0$), при которой в концепции классической теории денег в долгосрочной перспективе экономика полностью использует свой потенциал и выходит на максимально возможный объем национального производства: $\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^*$.

Если предположить, что денежная масса $M(t)$ может убывать настолько быстро, что $\lim_{t\to\infty}\left(M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}\right) = 0$, то результатом стало бы падение ВВП в пределе до нуля:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0.$$

Очевидно, что такая ситуация является вырожденной, и возможность проведения подобной сверхрестриктивной монетарной политики, приводящей к обвальному сокращению денежной массы с экспоненциальной скоростью, можно исключить.

Таким образом, можно видеть, что потенциальный уровень ВВП не является величиной, раз и навсегда заданной. С течением времени экономика может переступать через текущее его значение и развиваться далее.

Рассмотрим теперь динамическую модель AD/AS со статичными ожиданиями при классической функции AD. В соответствии с монетарным правилом уравнение совокупного спроса в классической теории при постоянной скорости обращения денег $(\dot{V}=0)$ имеет вид (10.24). Функция AS при статичных ожиданиях задается зависимостью (10.22). Проанализируем на качественном уровне поведение экономики, описываемой уравнениями (10.22), (10.24). Если уровень инфляции выше темпа прироста денежной массы $(\pi > \dot{m})$, то уровень ВВП будет возрастать; и, наоборот, при $\pi < \dot{m}$, величина ВВП падает. В другом ракурсе: если текущий ВВП превышает потенциальную величину $(Y > Y^*)$, то будут нарастать инфляционные процессы, а при $Y < Y^*$ темп инфляции будет падать. Фазовый портрет динамики этой макроэкономической системы показан на рис. 10.22. Направленность сил, действующих в экономике в отношении темпа роста цен и уровня ВВП, приводит к возникновению «инфляционной спирали».

Рассмотрим процесс адаптации экономической системы к стимулирующему воздействию в кредитно-денежной сфере (рис. 10.23). Допустим, что в результате проведения стимулирующей кредитно-денежной политики темп роста денежной массы возрастает от уровня $\dot{m}_0$ до $\dot{m}_1$. Для того чтобы изобразить возникающую инфляционную спираль, выразим из уравнений совокупного предложения (10.21) и спроса (соответствующего (10.24) при дискретном времени $Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-1}(\dot{m} - \pi_t)$, где темп прироста денежной массы $\dot{m}$ предполагается экзогенным параметром) уровень инфляции через объемы ВВП:

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Y_t - Y^*}{Y^*}\right) = \pi_{t-1} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\frac{Y_t}{Y^*}; \tag{10.28}$$

$$\pi_t = \dot{m} - \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \dot{m} + 1 - \frac{Y_t}{Y_{t-1}}. \tag{10.29}$$

Здесь подразумевается, что темп прироста денежной массы, как и другие переменные, является дискретным: $\dot{m} = \frac{M_t - M_{t-1}}{M_{t-1}}$.

Рис. 10.22. Инфляционная спираль при неоклассической функции динамического совокупного спроса (случай стимулирующей кредитно-денежной политики)

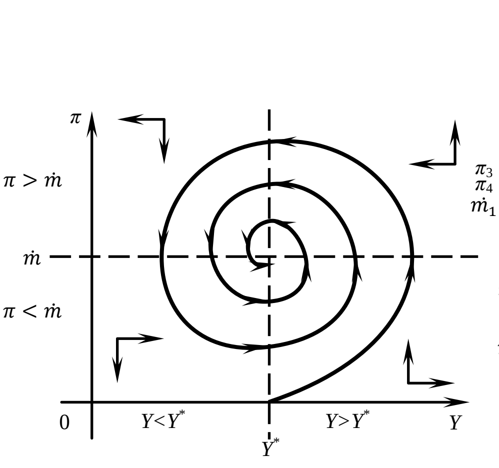
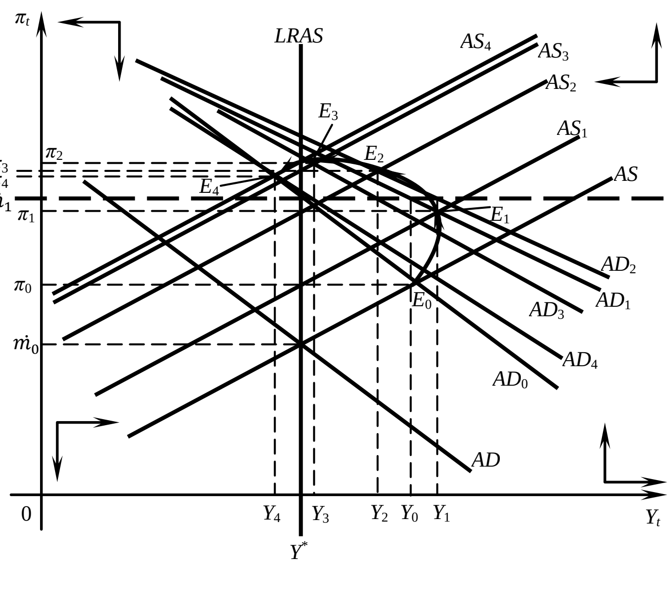


Рис. 10.23. Процесс адаптации экономической системы к стимулирующему воздействию в кредитно-денежной сфере при неоклассической функции динамического совокупного спроса



Из уравнения (10.28) видно, что при $Y_t = Y^*$ $\pi_t = \pi_{t-1}$; а из уравнения (10.29) следует, что при $Y_t = Y_{t-1}$, $\pi_t = \dot{m}$. Таким образом, график функции AS_t проходит через точку с координатами (Y^*, π_{t-1}), а график AD_t – через точку $(Y_{t-1}, \dot{m}), t > 0$ (рис. 10.23).

Допустим, что первоначально, при темпе прироста денежной массы $\dot{m}_0$, экономика характеризовалась функциями спроса и предложения AD и AS соответственно и находилась в состоянии долгосрочного равновесия при $\pi_t = \dot{m}_0$, полностью реализуя свой потенциал Y^*. При увеличении темпа прироста денежной массы до уровня $\dot{m}_1$ совокупный спрос в соответствии с уравнением (10.29) сдвигается в положение AD_0, и возникает новое, краткосрочное равновесие E_0 с возросшим уровнем инфляции π_0 и ВВП Y_0.

Поскольку в каждый момент времени уровень предыдущего периода определяет абсолютное значение тангенса угла наклона линии совокупного спроса (10.29), при понижении ВВП ее угловой коэффициент по абсолютной величине в будущем периоде будет возрастать, и, наоборот, при увеличении ВВП – уменьшаться. Что касается темпа инфляции, то его текущее значение будет определять параллельное смещение линии совокупного предложения в следующий момент времени. Если темп инфляции увеличивается, то совокупное предложение сдвинется вправо-вверх, если он уменьшается – то влево-вниз.

Это значит, что в следующий период (№1) угол наклона линии совокупного спроса (AD_1) снизится ввиду увеличения ВВП предыдущего периода $(Y_0 = Y^*)$, а совокупное предложение сдвинется влево-вверх в положение AD_0 в силу увеличения предыдущего темпа инфляции $(\pi_0 = \dot{m}_0)$. В результате краткосрочное равновесие переместится в точку E_1. Проводя те же рассуждения еще раз, приходим к следующему положению равновесия E_2, где уровень инфляции (π_2) оказывается выше темпа прироста денежной массы $(\dot{m}_1)$, а текущий объем ВВП (Y_2) снижается по отношению к предыдущему значению (Y_1). Это значит, что в последующий период (№3) угловой коэффициент совокупного спроса (AD_3) возрастает, в то время как совокупное предложение продолжит смещаться влево-вверх (в положение AS_3). Экономика попадет в точку краткосрочного равновесия E_3. Проводя аналогичную итерацию еще раз, приходим в состояние краткосрочного равновесия E_4, когда уровень ВВП (Y_4) оказывается ниже экономического потенциала (Y^*).

В результате возникает инфляционная спираль, которая подчиняется закономерностям, сформулированным выше применительно к непрерывному времени. В итоге после бесконечного числа итераций экономика возвратится на потенциальный уровень ВВП Y^* при возросшем уровне инфляции, соответствующем новому темпу роста денежной массы $\dot{m}_1$.

Вернемся к анализу модели (10.22), (10.24) в непрерывном времени. Если предположить, что в базовом периоде экономика функционировала на уровне потенциального ВВП (10.17), то динамическая функция AS (10.22) принимает вид (10.23). Запишем условие динамического равновесия $(AD = AS)$, используя усиленную рациональными ожиданиями функцию совокупного предложения (10.23):

$$\frac{\dot{M}}{M} - \pi = \frac{\beta}{\alpha}\dot{\pi}.$$

Перейдем к логарифмической шкале измерения денежной массы:

$$\frac{\beta}{\alpha}\dot{\pi} + \pi = \dot{m}. \tag{10.30}$$

Мы получили неоднородное линейное дифференциальное уравнение относительно темпа инфляции π и скорости его изменения $\dot{\pi}$. Для того чтобы найти его решение, вначале решаем соответствующее однородное дифференциальное уравнение $\dot{\pi} = -\frac{\alpha}{\beta}\pi$. Разделяем переменные $\left(\frac{d\pi}{\pi} = -\frac{\alpha}{\beta}dt\right)$ и интегрируем: $\int d\ln\pi = -\frac{\alpha}{\beta}\int dt + \ln c$, т.е. $\pi = ce^{-\frac{\alpha}{\beta}t}$.

Далее используем метод вариации постоянной, подставляя общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\pi = c(t)e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} \tag{10.31}$$

в неоднородное дифференциальное уравнение (10.30):

$$\dot{c} = \frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}\dot{m}.$$

Применяя к решению данного уравнения метод интегрирования по частям, находим выражение для варьируемого множителя:

$$c(t) = \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^t \dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau + c_1 = \int\limits_0^t \dot{m}(\tau)de^{\frac{\alpha}{\beta}\tau} + c_1 = \dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}\Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\dot{m} + c_1$$

$$= \dot{m}(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t} - \dot{m}(0) - \int\limits_0^t e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\dot{m} + c_1. \tag{10.32}$$

Итак, получаем общее решение исходного неоднородного уравнения (10.30):

$$\pi(t) = \dot{m}(t) - \dot{m}(0)e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} - e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\int\limits_0^t e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\dot{m} + c_1e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}.$$

Константу интегрирования определим по уровню инфляции в нулевой момент времени: $\pi(0) = c_1$.

В итоге решение уравнения (10.30) приобретает вид:

$$\pi(t) = \dot{m}(t) + \big(\pi(0) - \dot{m}(0)\big)e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} - e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\int\limits_0^t e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\dot{m}. \tag{10.33}$$

В частности, если денежная масса растет постоянным темпом $\dot{m}(t) = \dot{m} = const$, то интеграл в выражении (10.33) аннулируется, и динамика инфляции будет описываться траекторией:

$$\pi(t) = \dot{m} + (\pi(0) - \dot{m})e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}.$$

Очевидно, что в долгосрочной перспективе, при $t \to \infty$, уровень инфляции будет асимптотически приближаться к темпу прироста денежной массы $\dot{m}$ (рис. 10.22).

Покажем, что данный вывод сохраняется практически при любом характере изменения денежной массы. Для этого преобразуем траекторию инфляционной динамики (10.33), подставляя в общее решение однородного уравнения (10.31) первоначальное выражение варьируемого множителя (10.32) и учитывая, что константа интегрирования при этом сохраняет прежнее значение $\big(c_1 = \pi(0)\big)$:

$$\pi(t) = \pi(0)e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} + \frac{\alpha}{\beta}e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\int\limits_0^t \dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau.$$

Рассмотрим поведение системы в пределе, на бесконечно удаленном временнóм интервале:

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi(0)+\frac{\alpha}{\beta}\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau}{e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau=\dot{m}(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}>0$ при $\dot{m}(t)>0$, можно сделать вывод о монотонном росте $\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau$ с течением времени при увеличении денежной массы. При этом в пределе выше присутствует неопределенность вида ∞/∞. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi(0)+\frac{\alpha}{\beta}\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau\right)}{\frac{\partial e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{\partial t}}=\lim_{t\to\infty}\dot{m}(t).$$

Таким образом, в соответствии с принципами классической макроэкономической теории при статичных ожиданиях с течением времени в пределе (при $t\to\infty$) уровень инфляции уравнивается с темпом прироста денежной массы. При этом ВВП достигает потенциального уровня. Следовательно, инфляционная спираль в данной модели всегда будет сходится к точке $(Y^*,\dot{m})$, где Y^* – потенциальный ВВП, $\dot{m}=\lim_{t\to\infty}\dot{m}(t)$ (рис. 10.22). Возможность “взрывной”, “разносящей” динамики инфляции и объема производства, тем самым, исключается.

Итак, при стимулирующей кредитно-денежной политике наличие ожиданий является необходимым условием для нейтральности денег в динамическом аспекте.

В случае сжатия денежной массы ($\dot{m}(t)<0$) $\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}d\tau$ будет убывать с течением времени, следовательно, $\lim_{t\to\infty}\pi(t)=0$. При этом темп прироста ВВП в пределе уравнивается с темпом прироста денежной массы. Нейтральность денег в такой ситуации отсутствует. Ограничительная кредитно-денежная политика приводит в долгосрочном плане к экономическому коллапсу (рис. 10.).

Перейдем к анализу динамического равновесия в кейнсианской макромодели вначале при простейшей функции AS.

Перепишем динамическую функцию AS (10.16) в виде:

$$\pi(t)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Y(t)-Y^*}{Y^*}\right).$$

Уравнение AD в статике в соответствии с (9.14) перепишем следующим образом:

$$Y=A+B\frac{M}{P},$$

где $A=\dfrac{f(C_0+I_0+G_0)}{kd+f(1-MPC(1-t))}, B=\dfrac{d}{kd+f(1-MPC(1-t))}.$

В силу того, что скорость изменения денежной массы в реальном выражении представляет собой разность темпа прироста номинальной денежной массы $\dot{m}$ и уровня инфляции π, умноженную на величину реальной денежной массы (8.5), динамическое уравнение AD можно представить в следующем виде:

$$\dot{Y}=B\frac{M}{P}\left(\frac{\dot{M}}{M}-\pi\right). \tag{10.34}$$

Тогда условие динамического макроравновесия ($AD = AS$) будет таким:

$$\dot{Y} = B\frac{M}{P}\left(\frac{\dot{M}}{M} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{Y}{Y^*} + \frac{\alpha}{\beta}\right),$$

или:

$$\dot{Y} = B\frac{M}{P}\frac{\dot{M}}{M} - \frac{\alpha B}{\beta Y^*}\frac{M}{P}Y + \frac{\alpha B}{\beta}\frac{M}{P}. \qquad (10.35)$$

Для решения данного неоднородного линейного дифференциального уравнения необходимо вначале решить соответствующее однородное уравнение:

$$\dot{Y} = -\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\frac{M}{P}Y.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\frac{M}{P}dt$$

и интегрируем его:

$$\ln Y = -\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt + \ln c.$$

Потенцируя, получаем решение анализируемого однородного дифференциального уравнения, к которому применяем метод вариации постоянной:

$$Y(t) = c(t)e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}.$$

Подставляя его в исходное неоднородное уравнение, после очевидных преобразований получаем следующее дифференциальное уравнение для варьируемого множителя:

$$dc = B\frac{M}{P}\dot{m}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}dt + \frac{\alpha B}{\beta}\frac{M}{P}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}dt.$$

Интегрируем данное уравнение:

$$c = B\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)d\xi}d\tau + Y^*e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau} + c_1.$$

Подстановка данного соотношения в общее решение однородного уравнения дает общее решение исходного неоднородного уравнения (10.35):

$$Y(t) = Y^* + \left(c_1 + B\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)d\xi}d\tau\right)e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}.$$

По объему ВВП в нулевой момент времени определим константу интегрирования: $c_1 = Y(0) - Y^*$.

В итоге решение уравнения (10.35) таково:

$$Y(t) = Y^* + (Y(0) - Y^*)e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}$$
$$+ Be^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau)e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)d\xi}d\tau. \qquad (10.36)$$

В частности, если предложение денег неизменно во времени, т.е. $\dot{m} = 0$, то интеграл в выражении (10.36) аннулируется, и траектория динамики ВВП упрощается:

$$Y(t) = Y^* + (Y(0) - Y^*)e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{M}{P} d\tau = \frac{M}{P}(t) > 0$, постольку $\int_0^t \frac{M}{P} d\tau$ монотонно возрастает. Следовательно, т.к. $\frac{\alpha B}{\beta Y^*} > 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t \frac{M}{P} d\tau} = 0$. Значит, в данной, упрощенной ситуации стационарности предложения денег в долгосрочной перспективе экономика будет выходить на уровень потенциала:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^*.$$

Рассмотрим в долгосрочном плане поведение системы в общем случае (10.36):

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^* + (Y(0) - Y^*) \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t \frac{M}{P}(\tau) d\tau} + \lim_{t\to\infty} \frac{B\int_0^t \frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau) e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^\tau \frac{M}{P}(\xi) d\xi} d\tau}{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t \frac{M}{P}(\tau) d\tau}}.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau) e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^\tau \frac{M}{P}(\xi) d\xi} d\tau = \frac{M}{P}(t)\dot{m}(t) e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t \frac{M}{P}(\tau) d\tau} > 0$ при $\dot{m}(t) > 0$, постольку при стимулирующей кредитно-денежной политике $\int_0^t \frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau) e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^\tau \frac{M}{P}(\xi) d\xi} d\tau$ монотонно возрастает. Следовательно, в последнем пределе выше присутствует неопределенность вида ∞/∞. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B\int_0^t \frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau) e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^\tau \frac{M}{P}(\xi) d\xi} d\tau}{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t \frac{M}{P}(\tau) d\tau}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{d}{dt} B\int_0^t \frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau) e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^\tau \frac{M}{P}(\xi) d\xi} d\tau}{\frac{d e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t \frac{M}{P}(\tau) d\tau}}{dt}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{B\frac{M}{P}(t)\dot{m}(t) e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t \frac{M}{P}(\tau) d\tau}}{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\frac{M}{P}(t) e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^t \frac{M}{P}(\tau) d\tau}} = \frac{\beta}{\alpha} Y^* \lim_{t\to\infty} \dot{m}(t).$$

Следовательно, при отсутствии ожиданий в условиях стимулирующей кредитно-денежной политики кейнсианская модель в пределе, на бесконечно удаленном временно́м интервале описывается тем же соотношением (10.27), что и неоклассическая – эти модели оказываются асимптотически эквивалентными.

В условиях рестриктивной кредитно-денежной политики, когда $\dot{m}(t) < 0$, $\int_0^t \frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau) e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int_0^\tau \frac{M}{P}(\xi) d\xi} d\tau$ будет монотонно убывать, и в долгосрочном плане поведение системы будет аналогично случаю $\dot{m}(t) = 0$ – ВВП будет стремиться к потенциальному значению:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^*.$$

Таким образом, аналогично случаю неоклассической функции *AD* отказ от учета ожиданий в функции *AS* приводит к тому, что в кейнсианской макромодели в общем случае деньги не являются нейтральными. В пределе, в бесконечно удаленный момент времени существует прямая зависимость ВВП от темпа прироста денежной массы.

При этом в исключительно жестких условиях ограничительной политики монетарных властей – при сжатии либо постоянстве денежной массы ($\dot{m}(t) \leqslant 0$) – объем ВВП будет стремиться к потенциально возможному. Однако модель допускает расширение народнохозяйственных возможностей – экономического потенциала страны: при увеличении денежной массы ВВП с течением времени, в пределе (при $t \to \infty$) будет выходить за рамки своего потенциального уровня.

Проанализируем теперь динамику кейнсианской модели с учетом ожиданий. Если усилить ожиданиями функцию совокупного предложения, то поведение макроэкономической системы будет описываться уравнениями (10.22), (10.34). В дискретном времени совокупное предложение описывается соотношением (10.21), а уравнение совокупного спроса, соответствующее (10.34), будет иметь вид:

$$Y_t = Y_{t-1} + B\frac{M_t}{P_t}(\dot{m}_t - \pi_t). \qquad (10.37)$$

При этом величина денежной массы и уровень цен берутся в каждый данный момент времени, т.е. их величина является результатом кредитно-денежной политики и разворачивающихся инфляционных процессов.

Траектория динамики экономической системы будет аналогичной проанализированной ранее в ситуации неоклассического совокупного спроса с той лишь разницей, что в силу (8.5) при $\dot{m}(t) > \pi(t)$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right) > 0$, т.е. реальная денежная масса возрастает, а значит, увеличивается абсолютное значение углового коэффициента линии AD (10.37). Соответственно, при $\dot{m}(t) < \pi(t)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right) < 0$, и отношение $\frac{M(t)}{P(t)}$ убывает, следовательно, линия совокупного спроса (10.37) становится более «пологой».

Возникают инфляционно-дефляционные спирали, соответствующие различным видам экономической политики государства. Для того чтобы изобразить траекторию динамики экономической системы, выразим из уравнения совокупного спроса (10.37) уровень инфляции через объемы ВВП:

$$\pi_t = \dot{m}_t + \frac{P_t Y_{t-1}}{BM_t} - \frac{P_t Y_t}{BM_t}. \qquad (10.38)$$

Уравнение совокупного предложения (10.21) принимает вид (10.28).

Очевидно, что при $\dot{m}(t) > \pi(t)$ отношение $\frac{M(t)}{P(t)}$ будет возрастать, а значит, график данной обратной функции совокупного спроса (10.38) становится более «пологим». Соответственно, при $\dot{m}(t) < \pi(t)$ реальная денежная масса убывает, следовательно, будет увеличиваться угловой коэффициент линии совокупного спроса (10.38). Поскольку в свободном члене линии AD (10.38) присутствуют величины Y_{t-1} и $\frac{M_t}{P_t}$, постольку точка пересечения данного графика с вертикальной координатной осью будет зависеть от их соотношения.

Как следует из уравнения (10.28), при $Y_t = Y^*$ $\pi_t = \pi_{t-1}$; а кейнсианское уравнение совокупного спроса (10.38) свидетельствует о том, что при $Y_t = Y_{t-1}$, $\pi_t = \dot{m}_t$. Таким образом, как и при классической функции совокупного спроса, график функции AS_t проходит через точку с координатами (Y^*, π_{t-1}), а график AD_t – через точку $(Y_{t-1}, \dot{m}_t)$, $t > 0$.

Рассмотрим процесс адаптации экономической системы к стимулирующему воздействию в кредитно-денежной сфере (рис. 10.24). Пусть исходно, при темпе прироста денежной массы $\dot{m}_0$, экономика характеризовалась функциями спроса и предложения AD и AS соответственно и находилась в состоянии долгосрочного равновесия при $\pi_t = \dot{m}_0$, полностью реализуя свой потенциал Y^*. Допустим, что в результате проведения стимулирующей кредитно-денежной политики темп роста денежной массы возрастает от уровня $\dot{m}_0$ до $\dot{m}_1$ и затем остается постоянным.

Происходит сдвиг функции совокупного спроса в положение AD_0, и в качестве новой точки отсчета получаем краткосрочное равновесие E_0 с возросшим темпом инфляции $\pi_0 < \dot{m}_1$ и уровнем ВВП Y_0. Это значит, что в следующий момент времени совокупное предложение (10.28) сдвинется влево-вверх, а совокупный спрос переместится вправо-вверх и повернется против часовой стрелки (AD_1). При этом экономика окажется в точке E_1. Повторная итерация переведет систему в положение, когда уровень инфляции уже превысит темп прироста денежной массы ($\pi_2 > \dot{m}_1$), в ВВП начнет снижаться ($Y_2 < Y_1$). Это значит, что в следующий момент времени совокупный спрос уже сдвинется вниз и повернется по часовой стрелке (AD_3), тогда как совокупное предложение продолжит смещаться вверх (AS_3). Следующая аналогичная итерация переведет экономику из положения E_3 в точку E_4. При этом уровень инфляции начнет снижаться, а ВВП упадет ниже потенциала.

Таким образом, возникает инфляционная спираль, и экономика возвращается на потенциальный уровень ВВП при возросшем уровне инфляции, соответствующем новому темпу роста денежной массы $\dot{m}_1$.

Однократное воздействие в финансовой сфере, например единовременное вливание в экономику денег, в долгосрочном плане никак не скажется на параметрах равновесия (рис. 10.25). В результате первоначального, мгновенного увеличения темпа прироста денежной массы (который сразу же возвращается на исходный уровень) линия совокупного спроса AD, задаваемая соотношением (10.38), перемещается вверх в положение AD_0. AD_1 сдвигается выше по отношению к AD_0 за счет возросшего объема ВВП и, поскольку $\dot{m} < \pi$, поворачивается по часовой стрелке. AS_1 окажется выше и левее по сравнению с AS в силу возросшего темпа инфляции в предыдущий период. В новом равновесии E_1 темп инфляции увеличится по сравнению с предыдущим значением π_0, оставаясь выше темпа прироста денежной массы $\dot{m}$; а ВВП (Y_1) окажется ниже предыдущего уровня (Y_0). Это значит, что в следующий момент совокупное предложение продолжит сдвигаться вверх – в положение AS_2, а совокупный спрос (AD_2) сместится вниз, поворачиваясь по часовой стрелке. В новом краткосрочном равновесии E_2 и ВВП, и инфляция сократятся по сравнению с предыдущими значениями. Теперь уже не только совокупный спрос, но и совокупное предложение начнет сдвигаться вниз. Инфляционная спираль возвращает экономику в первоначальное состояние долгосрочного равновесия E, соответствующее полной реализации экономического потенциала при неизменном темпе роста денежной массы и прежнем уровне инфляции ($\pi_0 = \dot{m}_0$).

Рис. 10.24. Процесс адаптации экономической системы к усилению кредитно-денежной экспансии при кейнсианской функции динамического совокупного спроса

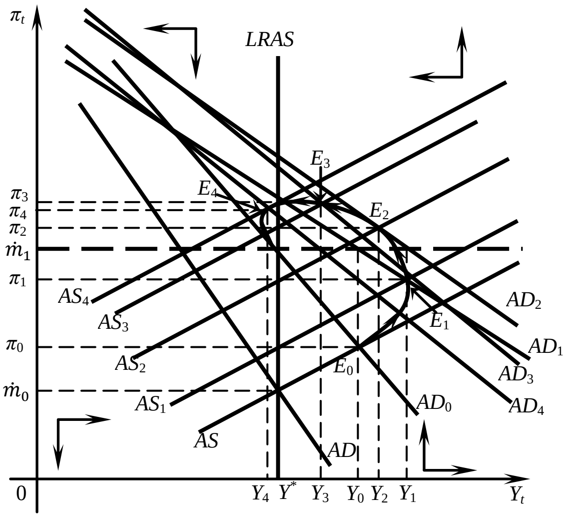
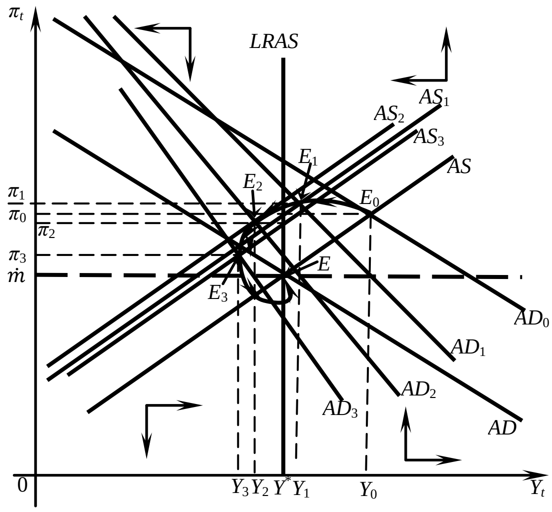


Рис. 10.25. Процесс адаптации экономической системы к единовременному стимулирующему воздействию кредитно-денежной политики государства при кейнсианской функции динамического совокупного спроса



Итак, нами проанализирована агрегированная динамика экономической системы, описываемой классической и кейнсианской функциями совокупного спроса при совокупном предложении с учетом и без учета ожиданий. Решение возникающих при этом дифференциальных уравнений показывает, что инфляционная подпитка может стимулировать увеличение потенциального уровня ВВП. В частности, в отличие от статичного равновесия, при отсутствии ожиданий в неоклассической концепции так же, как и в кейнсианской, исчезает нейтральность денег, и данные два подхода оказываются асимптотически эквивалентыми.