7.4. Теория общественного выбора

Предметом общественного выбора является: принятие решений внутри коллективных хозяйствующих субъектов – фирм и домохозяйств; выработка механизма установления равновесных цен и определение структуры общественных приоритетов в рамках функции общественного благосостояния[1]; урегулирование внешних, побочных эффектов хозяйственной деятельности человека.

Рассмотрим вначале характеристики функции общественного благосостояния по К.Дж. Эрроу. Будем обозначать через $\gtrsim$ коллективное упорядочение социальных состояний. Отношение $\gtrsim$ так же, как и индивидуальное упорядочение $\gtrsim_i$, должно удовлетворять двум свойствам рациональности – сравнимости (1.01) и транзитивности (1.02) предпочтений.

Функция общественного благосостояния – это процесс или правило, ставящее в соответствие каждому набору индивидуальных упорядочений $\gtrsim_1, \dots, \gtrsim_n$ альтернативных социальных состояний их коллективное упорядочение $\gtrsim$. $C(S)$ – это функция общественного благосостояния Эрроу. Данная функция общественного благосостояния должна удовлетворять пяти условиям[2].

Первое условие «универсальности» предполагает следующее. Во множестве всех альтернатив имеется такое предъявление S, состоящее из трех альтернатив, что для любого набора индивидуальных упорядочений $\gtrsim_1^s, \dots, \gtrsim_n^s$ альтернатив, входящих в S, существует такой допустимый набор индивидуальных упорядочений всех альтернатив $\gtrsim_1, \dots, \gtrsim_n$, что для каждого индивидуума с номером i и x_1 и x_2 из предъявления S $(x_1 \gtrsim_i x_2) \leftrightarrow (x_1 \gtrsim_i^s x_2)$. Другими словами, каждый логически допустимый набор индивидуальных упорядочений некоторого предъявления S, состоящего из трех альтернатив, можно получить из некоторых индивидуальных упорядочений всех альтернатив. Допустимым является набор отношений индивидуального упорядочения, для которого функция общественного благосостояния определяет соответствующее коллективное упорядочение, т.е. отношение, удовлетворяющее аксиомам сравнимости (1.01) и транзитивности (1.02).

Универсальность функции общественного благосостояния подразумевает, что она существует независимо от вида индивидуальных предпочтений: существуют по крайней мере три альтернативы, любое упорядочение которых со стороны индивидуумов позволяет сформировать коллективное упорядочение, т.е. любой набор индивидуальных предпочтений является допустимым.

Условие универсальности предназначено для исключения парадокса голосования по методу большинства голосов при попарном сравнении альтернатив (Кондорсе), который можно проиллюстрировать следующим примером.

Допустим, что структура предпочтений первого индивидуума выглядит так:

$$x_1 \gtrsim_1 x_2, x_2 \gtrsim_1 x_3, \text{т.е. } \gtrsim_1 = (x_1 x_2 x_3).$$

Для второго индивидуума:

$$x_2 \gtrsim_2 x_3, x_3 \gtrsim_2 x_1, \text{т.е. } \gtrsim_2 = (x_2 x_3 x_1);$$

а для третьего –

$$x_3 \gtrsim_3 x_1, x_1 \gtrsim_3 x_2, \text{т.е. } \gtrsim_3 = (x_3 x_1 x_2).$$

В соответствии с механизмом голосования для большинства

$$(x_1 \gtrsim x_2) \& (x_2 \gtrsim x_3) \to (x_1 \gtrsim x_3).$$

---

[1] Эрроу К.Дж. Возможности и пределы рынка как механизма распределения ресурсов // THESIS. 1993. Т. 1. Вып. 2.

[2] Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004.

На самом деле $x_2 \gtrsim x_1$.

Сформулируем теперь второе условие – приемлемости по критерию Парето. Пусть, $\gtrsim_1, \dots, \gtrsim_n$ и $\gtrsim'_1, \dots, \gtrsim'_n$ – два набора индивидуальных упорядочений; $\gtrsim$ и $\gtrsim'$ – соответствующие коллективные упорядочения; $\succ$ и $\succ'$ – соответствующие коллективные предпочтения. Предположим, что для каждого индивидуума с номером i два набора упорядочений связаны следующим образом: во-первых, для $x'_1 \neq x_1$ и $x'_2 \neq x_1$ $(x'_1 \gtrsim'_i x'_2) \leftrightarrow (x'_1 \gtrsim_i x'_2)$, т.е. x'_1 не хуже, чем x'_2, в новой шкале тогда и только тогда, когда такое же соотношение между данными альтернативами наблюдалось и ранее; во-вторых, для любой альтернативы x'_2 $(x_1 \gtrsim_i x'_2) \rightarrow (x_1 \gtrsim'_i x'_2)$, т.е. x предпочтительнее или безразлична в новой шкале по отношению к любой альтернативе, в сравнении с которой x была предпочтительнее или безразлична ранее; в-третьих, для любой альтернативы x'_2 $(x_1 \succ_i x'_2) \rightarrow (x_1 \succ'_i x'_2)$, т.е. в новой шкале x_1 предпочтительнее любой альтернативы, предпочтительнее которой была и ранее. Тогда $(x_1 \succ x_2) \rightarrow (x_1 \succ' x_2)$.

Другими словами, существует положительная связь индивидуальных и коллективных оценок: если одно из альтернативных социальных состояний (x_1) повышает ранг или остается неизменным в оценках каждого индивидуума при отсутствии других изменений в упорядочении, то это социальное состояние по крайней мере не убывает в коллективном упорядочении.

Третье условие «независимости от посторонних альтернатив» утверждает следующее. Пусть, существуют два альтернативных профиля индивидуальных предпочтений $\gtrsim_1, \dots, \gtrsim_n$ и $\gtrsim'_1, \dots, \gtrsim'_n$, а $C(S)$ и $C'(S)$ – соответствующие функции коллективного выбора. Пусть для каждого индивидуума с номером i и любых альтернатив x_1 и x_2 из множества S индивидуальные предпочтения одинаковы: $(x_1 \gtrsim_i x_2) \leftrightarrow (x_1 \gtrsim'_i x_1)$. В таком случае можно утверждать, что и общественные предпочтения должны быть одними и теми же относительно обоих вариантов: $C(S)$ и $C'(S)$ – независимы от посторонних альтернатив. В частности, изменение мнений индивидуумов по поводу третьей, «несущественной» возможности не должно отразиться на социальном сопоставлении x_1 и x_2.

Четвертое условие «суверенитета граждан» гласит, что функция общественного благосостояния не должна быть навязанной, когда при любом наборе индивидуальных упорядочений $\gtrsim_1, \dots, \gtrsim_n$ для пары альтернатив $x_1 \neq x_2$ в рамках общества в целом $x_1 \gtrsim x_2$, где $\gtrsim$ – соответствующее коллективное упорядочение. Примерами навязанных функций общественного благосостояния являются господство обычая, колониальные или захватнические режимы.

Пятое условие требует, чтобы функция общественного благосостояния не была диктаторской, когда существует такой индивидуум с номером i, для которого общественные предпочтения всегда будут такими же, как и его персональные, т.е. при произвольной паре альтернатив x_1 и x_2 $(x_1 \succ_i x_2) \rightarrow (x_1 \succ x_2)$ независимо от упорядочений $\gtrsim_1, \dots, \gtrsim_n$ всех индивидуумов за исключением i-го, где $\succ$ – отношение коллективного предпочтения, соответствующее $\gtrsim_1, \dots, \gtrsim_n$.

Правило большинства голосов – это функция общественного благосостояния, в которой $x_1 \gtrsim x_2$ тогда и только тогда, когда число таких индивидуумов, для которых $x_1 \gtrsim_i x_2$ (обозначим его $N(x_1, x_2)$ по крайней мере не меньше числа таких, для которых $x_2 \gtrsim_i x_1$ (обозначим его $N(x_2, x_1)$. Итак, $(x_1 \gtrsim x_2) \leftrightarrow N(x_1, x_2) \geqslant N(x_2, x_1)$.

Очевидно, что для рассматриваемой функции общественного благосостояния требуется видоизменить условие универсальности: каждое множество индивидуальных упорядочений двух рассматриваемых альтернатив должно порождать коллективное упорядочение, удовлетворяющее свойствам сравнимости (1.01) и транзитивности (1.02).

Теорема о возможности для двух альтернатив утверждает, что если число альтернатив равно двум, правило большинства голосов[3] является функцией общественного благосостояния, удовлетворяющей всем пяти условиям, и приводит к коллективному упорядочению двух альтернатив для каждого множества индивидуальных упорядочений.

Проверим выполнение условия универсальности, т.е. связность и транзитивность данного коллективного упорядочения $\gtrsim$. Очевидно, всегда либо $N(x_1, x_2) \geqslant N(x_2, x_1)$, либо, наоборот, $N(x_2, x_1) \geqslant N(x_1, x_2)$, так что $(x_1 \gtrsim x_2) \vee (x_2 \gtrsim x_1)$ верно для произвольных альтернатив x и y, значит, $\gtrsim$ связно. Докажем теперь, что, если для некоторых трех возможностей $x_1 \gtrsim x_2$ и $x_2 \gtrsim x_3$, то $x_1 \gtrsim x_3$. Поскольку существуют только две альтернативы, две из трех альтернатив x_1, x_2 и x_3 должны совпадать. Если $x_1 = x_2$, то $(x_2 \gtrsim x_3) \to (x_1 \gtrsim x_3)$. Если $x_2 = x_3$, то $(x_1 \gtrsim x_2) \to (x_1 \gtrsim x_3)$. Показать, что $x_1 \gtrsim x_3$ в случае $x_1 = x_3$, эквивалентно доказательству того, что $x_1 \gtrsim x_1$. Это, в свою очередь, эквивалентно утверждению $N(x_1, x_1) \geqslant N(x_1, x_1)$, которое безусловно истинно. Таким образом, $\gtrsim$ транзитивно, а значит, условие универсальности справедливо для правила большинства голосов.

Проверим выполнение условия сравнимости по критерию Парето. Допустим, индивидуальные упорядочения $\gtrsim_1, \dots, \gtrsim_n$ таковы, что $(x_1 \succ x_2) = \left((x_1 \gtrsim x_2) \& \left(\overline{x_2 \gtrsim x_1}\right)\right)$, т.е. $N(x_1, x_2) \geqslant N(x_2, x_1)$, и неверно, что $N(x_2, x_1) \geqslant N(x_1, x_2)$. Значит:

$$N(x_1, x_2) > N(x_2, x_1). \tag{7.19}$$

Рассмотрим новое множество индивидуальных упорядочений $\gtrsim'_1, \dots, \gtrsim'_n$, удовлетворяющее гипотезе условия сравнимости по Парето, т.е.: а) для $x'_1 \neq x_1$ и $x'_2 \neq x_1$ $(x'_1 \gtrsim'_i x'_2) \leftrightarrow (x'_1 \gtrsim_i x'_2)$; б) $(x_1 \gtrsim_i x'_2) \to (x_1 \gtrsim'_i x'_2)$; в) $(x_1 \succ_i x'_2) \to (x_1 \succ'_i x'_2)$.

Рассмотрим два последних условия при $x'_2 = x_2$:

$$(x_1 \gtrsim_i x_2) \to (x_1 \gtrsim'_i x_2); \tag{7.20}$$

$$(x_1 \succ_i x_2) \to (x_1 \succ'_i x_2). \tag{7.21}$$

Если для некоторого i $x_2 \gtrsim'_i x_1$, то $\overline{x_1 \succ'_i x_2}$, а значит, в соответствии с (7.21), $\overline{x_1 \succ_i x_2}$, т.е., в силу (1.3), $(x_2 \gtrsim'_i x_1) \to (x_2 \gtrsim_i x_1)$.

Пусть, $N'(x_1, x_2)$ – число индивидуумов, для которых $x_1 \gtrsim'_i x_2$, $N'(x_2, x_1)$ – число индивидуумов, для которых $x_2 \gtrsim'_i x_1$. В соответствии с (7.20), для каждого индивидуума, для которого $x_1 \gtrsim_i x_2$, выполняется и отношение $x_1 \gtrsim'_i x_2$, значит, $N'(x_1, x_2) \geqslant N(x_1, x_2)$. Используя (7.19), получаем: $N'(x_1, x_2) > N(x_2, x_1)$.

Аналогично из последней импликации вытекает, что $N(x_2, x_1) \geqslant N'(x_2, x_1)$, а значит, в соответствии с предпоследним неравенством $N'(x_1, x_2) > N'(x_2, x_1)$, т.е. $x_1 \succ' x_2$. Таким образом, $(x_1 \succ x_2) \to (x_1 \succ' x_2)$, и условие приемлемости по Парето выполнено.

---

[3] О формальных характеристиках правила большинства голосов как функции общественного благосостояния см., например: Нуреев Р.М. Теория общественного выбора. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2005.

Условие независимости от сторонних альтернатив выполняется в данном случае тривиально, потому что единственное множество *S*, содержащее более одного элемента, содержит целиком множество всех альтернатив, состоящее из двух элементов. Если *S* содержит один элемент, *C*(*S*) – тот же самый элемент независимо от вкусов относительно альтернатив, не входящих в *S*. Если *S* содержит два элемента, выбор *C*(*S*) безусловно определен индивидуальными упорядочениями для элементов из *S*, поскольку других просто нет.

Подтвердим выполнение условия суверенитета граждан. Предположим, что при любых x_1 и x_2, для любого, i-го индивидуума $x_2 \succ_i x_1 = (x_2 \succsim_i x_1)\&\left(\overline{x_1 \succsim_i x_2}\right)$, т.е. $N(x_2, x_1) \geqslant N(x_1, x_2)$, и $\overline{\text{не выполняется } N(x_1, x_2) \geqslant N(x_2, x_1)}$. Следовательно, по определению правила большинства, $x_2 \succ x_1$, а значит, $\overline{x_1 \succsim x_2}$. Следовательно, не существует $x_1 \succsim x_2$ независимо от индивидуальных упорядочений $\succsim_1, \dots, \succsim_n$.

Будем проверять условие отсутствия диктатуры от противного. Предположим, что диктатор, которому присвоим первый номер $(i = 1)$, существует: $(x_1 \succ_1 x_2) \rightarrow (x_1 \succ x_2)$. $\overline{\text{Пусть}}\ x_2 \succ_i x_1$ для всех индивидуумов, за исключением первого. Тогда $x_1 \succsim_1 x_2$ и $\overline{x_1 \succsim_i x_2}$ для всех, кроме первого индивидуума, так что $N(x_1, x_2) = 1$. Поскольку $x_2 \succsim_i x_1$ для всех индивидуумов, кроме $\overline{\text{первого}}$, $N(x_2, x_1) \geqslant 1 = N(x_1, x_2)$, значит, по правилу большинства, $x_2 \succsim x_1$, а значит, $\overline{x_1 \succ x_2}$. Получаем противоречие с предположением о диктатуре, которая тем самым исключается.

Таким образом, теорема о возможности для правила большинства при двух альтернативах доказана[4]. Проведенные рассуждения показывают, что данная функция общественного благосостояния удовлетворяет условиям приемлемости по Парето, нечувствительности к сторонним альтернативам, суверенитета граждан и отсутствия диктатуры независимо от допущения о двух альтернативах – все условия, кроме универсальности, будут выполнены и при числе альтернатив, большем двух. Но парадокс голосования (Кондорсе) показывает, что правило большинства не удовлетворяет условию универсальности, когда число альтернатив уже равно трем. Данная теорема является логическим основанием англо-американской двухпартийной системы.

Теорема о возможности в случае двух индивидуумов и трех альтернатив утверждает, что не существует функции благосостояния, совместимой со всеми пятью сформулированным выше условиями, для общества, состоящего из двух индивидуумов, при наличии трех альтернатив[5].

Для доказательства данной теоремы возьмем x_1, x_2, x_3 – три альтернативы, из которых делается выбор. Пусть x_1' и x_2' – переменные, представляющие данные три альтернативы, т.е. принимающие значения x_1, x_2, x_3.

Утверждение 1. $(x_1' \succ_1 x_2')\&(x_2' \succ_2 x_1') \rightarrow (x_1' \succ x_2')$: если оба индивида предпочитают переменную x_1' переменной x_2', то общество должно предпочесть x_1' по отношению к x_2'.

[4] Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004.
[5] Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004.

Докажем утверждение 1. Согласно условию 4, существуют такие индивидуальные предпочтения $\succsim_1'$ и $\succsim_2'$, что в соответствующем коллективном предпочтении $x_1' \succ' x_2'$. Построим $\succsim_1''$ из $\succsim_1'$, поднимая x_1', если потребуется, на самый верх и оставляя относительные положения двух других альтернатив неизменными. Сформируем таким же образом $\succsim_2''$ из $\succsim_2'$. Поскольку была лишь поднята альтернатива x_1' в оценке каждого, а остальные альтернативы остались неизменными, в силу положительной связи индивидуальных и коллективных оценок, для общества по–прежнему $x_1' \succ'' x_2'$.

Итак, по построению, оба индивидуума предпочитают x_1' переменной x_2' в упорядочениях $\succsim_1''$ и $\succsim_2''$, и общество предпочитает x_1' по отношению к x_2'. Поскольку, по условию 3, коллективный выбор между x_1' и x_2' зависит только от индивидуальных упорядочений этих двух альтернатив, отсюда следует, что, поскольку всякий раз оба индивидуума предпочитают x_1' переменной x_2' независимо от положения третьей альтернативы, общество предпочтет x_1' переменной x_2'.

Утверждение 2. Предположим, что существуют такие альтернативы x_1' и x_2', для которых $(x_1' \succ_1 x_2') \& (x_2' \succ_2 x_1') \rightarrow (x_1' \succ' x_2')$. Тогда $(x_1' \succ_1 x_2') \rightarrow (x_1' \succ x_2')$. Другими словами, если в данной ситуации воля первого индивидуума возобладала над сопротивлением второго, то взгляды первого возобладают, когда второй – безразличен или согласен с первым.

Докажем утверждение 2. Пусть для упорядочения $\succsim_1$ выполняется соотношение $x_1' \succ_1 x_2'$, а $\succsim_2$ – любое упорядочение. Пусть, далее $\succsim_1'$ – такое же упорядочение, как и $\succsim_1$, а $\succsim_2'$ выводится из $\succsim_2$ опусканием x_1' в самый низ при сохранении относительного порядка двух других альтернатив. По построению, $(x_1' \succ_1' x_2') \& (x_2' \succ_2' x_1')$, следовательно, по предположению, $x_1' \succ' x_2'$. Единственным различием между $\succsim_1'$, $\succsim_2'$ и $\succsim_1$, $\succsim_2$ является то, что x_1' располагается в $\succsim_1$ выше, чем в $\succsim_2'$. Следовательно, по условию приемлемости по Парето, $(x_1' \succ' x_2') \rightarrow (x_1' \succ x_2')$. Таким образом, если $\succsim_1$ и $\succsim_2$ таковы, что $x_1' \succ_1 x_2'$, то обязательно будет выполнено отношение $x_1' \succ x_2'$.

Утверждение 3. $(x_1' \succsim_1 x_2') \& (x_2' \succsim_2 x_1') \rightarrow (x_1' \sim x_2')$: если у двух индивидуумов строго противоположные интересы при выборе между данными альтернативами, то общество будет безразлично к этим альтернативам.

Будем проводить доказательство утверждения 3 от противного. Пусть утверждение неверно, т.е. либо:

а) $(x_1' \succ_1 x_2') \& (x_2' \succ_2 x_1') \rightarrow (x_1' \succ x_2')$, либо:

б) $(x_1' \succ_1 x_2') \& (x_2' \succ_2 x_1') \rightarrow (x_2' \succ x_1')$.

Рассмотрим случай а). Пусть $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$. Если верно а), то $(x_1 \succ_1 x_2) \& (x_2 \succ_2 x_1) \rightarrow (x_1 \succ x_2)$. Отсюда с учетом утверждения 2 следует, что $(x_1 \succ_1 x_2) \rightarrow (x_1 \succ x_2)$.

Пусть $x_1' = x_1$, $x_2' = x_3$, тогда, по предположению а), $(x_1 \succ_1 x_3) \& (x_3 \succ_2 x_1) \rightarrow (x_1 \succ x_3)$, откуда, по утверждению 2, получаем $(x_1 \succ_1 x_3) \rightarrow (x_1 \succ x_3)$.

Пусть $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, значит, предполагая а), можно записать: $(x_2 \succ_1 x_3) \& (x_3 \succ_2 x_2) \rightarrow (x_2 \succ x_3)$. Отсюда, по утверждению 2, получаем: $(x_2 \succ_1 x_3) \rightarrow (x_2 \succ x_3)$.

Пусть $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$. Из гипотезы а) вытекает, что $(x_2 \succ_1 x_1) \& (x_1 \succ_2 x_2) \rightarrow (x_2 \succ x_1)$; откуда, в силу утверждения (7.20), $(x_2 \succ_1 x_1) \rightarrow (x_2 \succ x_1)$.

Пусть $x_1' = x_3$, $x_2' = x_1$, тогда, по предположению а), можно записать: $(x_3 \succ_1 x_1) \& (x_1 \succ_2 x_3) \rightarrow (x_3 \succ x_1)$. Значит, в силу утверждения 2, $(x_3 \succ_1 x_1) \rightarrow (x_3 \succ x_1)$.

Пусть, наконец, $x_1' = x_3$, $x_2' = x_2$. Предполагая а), получаем: $(x_3 \succ_1 x_2)\&(x_2 \succ_2 x_3) \to (x_3 \succ x_2)$. По утверждению 2, $(x_3 \succ_1 x_2) \to (x_3 \succ x_2)$.

Итак, из проведенных рассуждений на основе гипотезы а) с учетом утверждения 2 вытекает, что для любой пары альтернатив x_1', x_2' $(x_1' \succ_1 x_2') \to (x_1' \succ x_2')$. Следовательно, по определению, индивидуум 1 является диктатором, что запрещено условием 5. Значит, предположение а) ложно.

Рассуждения для случая б) полностью аналогичны. Таким образом, утверждение 3 доказано.

Опираясь на утверждения 1 и 3, можно завершить доказательство отсутствия функции благосостояния для общества, состоящего из двух индивидуумов, при наличии трех альтернатив. Пусть, $\succsim_1$ – упорядочение (x_1, x_2, x_3); $\succsim_2$ – это (x_3, x_1, x_2). Согласно утверждению 1 $x_1 \succ x_2$. Поскольку $(x_2 \succ_1 x_3)\&(x_3 \succ_2 x_2)$, из утверждения 3 вытекает, что $x_2 \sim x_3$; а значит, с учетом предпоследнего отношения предпочтения получаем: $x_1 \succ x_3$. Но также имеет место $(x_1 \succ_1 x_3)\&(x_3 \succ_2 x_1)$, откуда, по утверждению 3, следует $x_1 \sim x_3$. Не может быть, чтобы альтернатива x_1 одновременно предпочиталась и была безразлична по отношению к x_3. Следовательно, предположение, что существует функция общественного благосостояния, совместная со всеми перечисленными выше пятью условиями, привело к противоречию.

Общая теорема о возможности утверждает, что если существуют хотя бы три альтернативы, которые индивидуумы вольны ранжировать любым способом, то каждая функция общественного благосостояния, соответствующая условиям приемлемости по Парето и независимости от сторонних альтернатив и приводящая к коллективному упорядочению, удовлетворяющему свойствам сравнимости и транзитивности, должна быть либо навязанной, либо диктаторской.

В ходе доказательства теоремы будем обозначать через V множество индивидуумов. В частности, V' – это множество, состоящее из одного индивидуума, V'' – множество всех индивидуумов. Множество V назовем решающим для x_1 против x_2, если $x_1 \neq x_2$ и $x_1 \succ x_2$ для всех допустимых наборов индивидуальных упорядочений, в которых $x_1 \succ_i x_2$ для любого индивидуума с номером i из V.

Утверждение 1. Пусть, $\succsim_1, \dots, \succsim_n$ и $\succsim_1', \dots, \succsim_n'$ – два таких набора индивидуальных упорядочений, что при заданных x_1 и x_2 для любого индивидуума, для которого $x_1 \succsim_i x_2$, будет верно, что $x_1 \succ_i' x_2$. Тогда $(x_1 \succ x_2) \to (x_1 \succ' x_2)$, где $\succ$ и $\succ'$ – отношения коллективного предпочтения, соответствующие $\succsim_1, \dots, \succsim_n$ и $\succsim_1', \dots, \succsim_n'$.

Это утверждение расширяет условие приемлемости по Парето. Если x_1 поднимается или не опускается относительно x_2 в упорядочениях для каждого индивидуума и строго поднимается, когда x_1 и x_2 безразличны, и если сначала x_1 предпочтительнее для коллектива, чем x_2, то x_1 предпочтительнее x_2 вне зависимости от изменений в предпочтениях относительно альтернатив, отличных от x_2.

Для доказательства утверждения 1 предположим, что существуют три альтернативы x_1, x_2, x_3. Пусть $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$. Введем такие вспомогательные упорядочения $\succsim_i''$ и $\succsim_i^*$, которые позволили бы сравнить два набора, приемлемые по Парето.

Для каждого, i-го индивидуума определим упорядочение $\succsim_i''$ так:

$$(x_1' \succsim_i'' x_2') \leftrightarrow ((x_1' \succsim_i x_2')\&(x_1' \neq x_3)) \vee (x_2' = x_3), \qquad (7.22)$$

т.е. x_3 передвигается в самый конец упорядочения $\succsim_i$, а в остальном $\succsim_i$ остается без изменений.

Легко убедиться, что $\succsim_i''$ представляет собой упорядочение, т.е. для него справедливы свойства сравнимости и транзитивности. Кроме того, для каждого индивидуума $\succsim_i''$ упорядочивает элементы x_1, x_2 так же, как и $\succsim_i$, т.е. $(x_1' \succsim_i'' x_2') \leftrightarrow (x_1' \succsim_i x_2')$ для x_1', x_2' в $\{x_1, x_2\}$. Отсюда, с учетом условия нечувствительности к сторонним альтернативам, следует, что для соответствующих функций коллективного выбора выполняется равенство $C(\{x_1, x_2\}) = C''(\{x_1, x_2\})$.

По нашей гипотезе, $x_1 \succ x_2$, а из (1.5) следует, что $C(\{x_1, x_2\})$ содержит единственный элемент x_1. Значит, $C''(\{x_1, x_2\})$ содержит единственный элемент x_1, или в соответствии с (1.5):

$$x_1 \succ'' x_2. \tag{7.23}$$

Определим индивидуальные упорядочения $\succsim_1^*, \ldots, \succsim_n^*$ так:

$$(x_1' \succsim_i^* x_2') \leftrightarrow ((x_1' \succsim_i x_2') \& (x_1' \neq x_3)) \vee (x_2' = x_3). \tag{7.24}$$

Условие (7.24) аналогично (7.22). Из (7.22) и (7.24) в силу определения предпочтения следует, что для всех индивидуумов $x_2 \succ_i'' x_3$ и $x_2 \succ_i^* x_3$. Следовательно, при $x_1' \neq x_1$ и $x_2' \neq x_1$:

$$(x_1' \succsim_i'' x_2') \leftrightarrow (x_1' \succsim_i^* x_2'). \tag{7.25}$$

Для любого, i-го индивидуума так же имеет место $x_1 \succ_i'' x_3$, $x_1 \succ_i^* x_3$.

Согласно (7.22) для всех индивидуумов, для которых $x_1 \succsim_i'' x_2$, верно, что $x_1 \succsim_i x_2$. Согласно предположению, для таких индивидуумов $x_1 \succ_i' x_2$, и потому, согласно (7.24), $x_1 \succ_i^* x_2$. Следовательно,

$$\text{для любой альтернативы } x_2' \ (x_1 \succsim_i'' x_2') \leftrightarrow (x_1 \succsim_i^* x_2'), \tag{7.26}$$

$$\text{для любой альтернативы } x_2' \ (x_1 \succ_i'' x_2') \leftrightarrow (x_1 \succ_i^* x_2'). \tag{7.27}$$

Согласно (7.25)–(7.27) и (7.23), предпосылки условия приемлемости по критерию Парето выполнены, следовательно, $x_1 \succ^* x_2$.

Из (7.24) путем рассуждений, аналогичных проведенным выше, следует, что $C^*(\{x_1, x_2\}) = C'(\{x_1, x_2\})$, значит, $x_1 \succ' x_2$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. Если существует некоторый набор таких индивидуальных упорядочений $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$, что для некоторых x_1 $x_1 \succ_i x_2$ для всех индивидуумов в V и $x_2 \succ_i x_1$ для индивидуумов вне V, причем $x_1 \succ x_2$, то V является решающим для x_1 против x_2.

Для доказательства утверждения 2 предположим, что $\succsim_1', \ldots, \succsim_n'$ – набор индивидуальных упорядочений, отвечающих условию:

$$x_1 \succ_i' x_2 \text{ для любого индивидуума в } V. \tag{7.28}$$

Чтобы показать, что V является решающим, необходимо согласно определению, показать, что для любого такого набора $\succsim_1', \ldots, \succsim_n'$ соответствующее коллективное упорядочение $\succsim'$ будет давать $x_1 \succ' x_2$. Согласно (7.28) и предположению, что $x_1 \succ_i' x_2$ для каждого, i-го индивидуума в V и $x_2 \succ_i' x_1$ для всех индивидуумов вне V, следует, что $x_1 \succ_i' x_2$ всякий раз, когда $x_1 \succsim_i x_2$. Согласно утверждению 1, $x_1 \succ' x_2$, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. Для любых не совпадающих друг с другом альтернатив x_1 и x_2 $x_1 \neq x_2$, V'' – решающее множество для x_1 против x_2: если каждый индивидуум предпочитает x_1 альтернативе x_2, то группа имеет аналогичные предпочтения.

Для доказательства утверждения 3 обратим определение навязанной функции общественного благосостояния. Тогда условие суверенитета граждан гласит, что существует набор $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$, для которого $\overline{x_2 \succsim x_1}$. В силу (1.3):

$$x_1 \succ x_2. \tag{7.29}$$

Пусть $\succsim'_1, \dots, \succsim'_n$ – такое множество индивидуальных упорядочений, что:

$$x_1 \succ'_i x_2 \text{ для любого индивидуума с номером } i. \quad (7.30)$$

Согласно (7.30), очевидно, выполняется $x_1 \succ'_i x_2$ для любого, i-го индивидуума, такого, что $x_1 \succsim_i x_2$. Тогда из (7.29) и утверждения 1 вытекает, что $x_1 \succ' x_2$. Поскольку это справедливо для любого набора упорядочений, удовлетворяющих (7.30), из определения V'' следует, что $x_1 \succ' x_2$ для любого набора упорядочений, такого, что $x_1 \succ'_i x_2$ для всех, i–х индивидуумов в V'' и $x_2 \succ'_i x_1$ для всех индивидуумов с номерами i вне V'', т.е. ни для какого i. Согласно утверждению 2, V'' – решающее множество для x_1 против x_2.

Утверждение 4. Если одноэлементное множество V' является решающим: либо для x_1 против x_2, либо для x_2 против x_3, то V' – решающее множество для x_1 против x_3, где x_1, x_2, x_3 – отличные друг от друга альтернативы. Другими словами, если индивидуум является решающим для некоторой альтернативы x_1 против другой альтернативы x_2, то он является решающим для x_1 против любой другой альтернативы; если индивидуум является решающим для любой альтернативы против данной – x_3, то он является решающим для данной, конкретной альтернативы против x_3.

Рассмотрим вначале первую возможность. Пусть V' – решающее множество для x_1 против x_2. Без потери общности можно присвоить решающему индивидууму первый номер. Пусть, далее, $\succsim_1, \dots, \succsim_n$ – набор индивидуальных упорядочений, удовлетворяющий следующим условиям:

$$x_1 \succ_1 x_2, \quad (7.31)$$

$$x_2 \succ_i x_3 \text{ для любого индивидуума}, \quad (7.32)$$

$$x_3 \succ_i x_1 \text{ для всех индивидуумов, кроме первого.} \quad (7.33)$$

Согласно (7.31), $x_1 \succ_i x_2$ для всех индивидуумов в V', поэтому, по определению решающего множества:

$$x_1 \succ x_2. \quad (7.34)$$

Из (7.32) следует, что $x_2 \succ_i x_3$ для всех индивидуумов в V''. По утверждению 3 и определению решающего множества:

$$x_2 \succ x_3. \quad (7.35)$$

Согласно условию универсальности, отношение коллективного упорядочения связно и транзитивно, в частности для него справедливо утверждение (1.4). Значит, из (7.34) – (7.35) следует, что:

$$x_1 \succ x_3. \quad (7.36)$$

Исходя из (7.31) – (7.32) и свойства транзитивности, можно записать: $(x_1 \succ_1 x_2) \& (x_2 \succ_1 x_3) \rightarrow (x_1 \succ_1 x_3)$, или:

$$x_1 \succ_i x_3 \text{ для всех индивидуумов в } V'. \quad (7.37)$$

Условие (7.33) можно переписать следующим образом:

$$x_3 \succ_i x_1 \text{ для каждого индивидуума вне } V'. \quad (7.38)$$

Согласно (7.36) – (7.38), посылки утверждения 2 удовлетворены, так что V' является решающим для x_1 против x_3.

Рассмотрим теперь вторую возможность. Пусть V' – решающее множество для x_2 против x_3. Пусть индивидуум в V' имеет первый номер. Пусть, $\succsim_1, \dots, \succsim_n$ – набор индивидуальных упорядочений, таких, что:

$$x_1 \succ_i x_2 \text{ для всех индивидуумов}, \quad (7.39)$$

$$x_2 \succ_1 x_3, \quad (7.40)$$

$$x_3 \succ_i x_1 \text{ для всех индивидуумов, за исключением первого.} \quad (7.41)$$

Как и в предыдущем случае, из (7.39) вытекает, что $x_1 \succ x_2$; из (7.40) – что $x_2 \succ x_3$, следовательно, $x_1 \succ x_3$. Но (7.39) – (7.40) свидетельствуют о том, что $x_1 \succ_1 x_3$, что вместе с (7.41) обеспечивает выполнение предположений утверждения 2, значит, V' – решающее множество для x_1 против x_3.

Утверждение 5. Для каждой пары альтернатив x_1, x_2 и каждого одноэлементного множества индивидуумов V' утверждение, что V' – решающее множество для x_1 против x_2 ложно.

Проведем доказательство утверждения 5 от противного. Присвоим некоторому решающему индивидууму из множества V' первый номер. Пусть, V' – решающее множество для некоторой альтернативы x_1 против некоторой альтернативы x_2.

Из утверждения 4 вытекает, что V' – решающее множество для x_1 так же против некоторой альтернативы x_2', отличной от x_1 и x_2. Поскольку это утверждение остается верным для $x_2' = x_2$, можно сказать, что:

V' – решающее множество для x_1 против любого $x_2' \neq x_1$. (7.42)

Пусть для фиксированной $x_2' \neq x_1$ альтернатива x_1' отлична от x_1 и x_2'. Этот выбор возможен, согласно условию универсальности, так как существуют только три альтернативы. Из (7.42) и утверждения 4 вытекает, что V' – решающее для x_1' против x_2'. Согласно (7.42), это утверждение справедливо и при $x_1' = x_1$:

V' – решающее множество для x_1' против x_2' при $x_1' \neq x_2'$ и $x_2' \neq x_1$. (7.43)

Выберем любую $x_1' \neq x_1$ и некоторую x_2'', отличную как от x_1, так и от x_1'. Этот выбор возможен, согласно условию универсальности. Тогда (7.43) выполняется в следующем виде: V' – решающее для x_1' против y'' при $x_1' \neq x_2''$, $x_2'' \neq x_1$, $x_1' \neq x_1$. Тогда в силу утверждения 4, если в качестве x_3 взять x_1, можно записать, что:

V' – решающее множество для x_1' против x_1 при $x_1' \neq x_1$. (7.44)

Объединяя условия (7.43) – (7.44), получаем, что:

V' – решающее множество для любого x_1' против любого x_2' при $x_1' \neq x_2'$. (7.45)

По определению решающего множества, (7.45) утверждает, что для каждого $x_1' \neq x_2'$ $(x_1' \succ_1 x_2') \rightarrow (x_1' \succ x_2')$. Значит, по определению, функция общественного благосостояния является диктаторской, что исключается. Следовательно, предположение о ложности утверждения 5 ведет к противоречию с одним из условий. Таким образом, утверждение 5 истинно.

Теперь можно завершить доказательство общей теоремы о возможности. Пусть S – предъявление, составленное из трех отличных друг от друга альтернатив, которые встречаются в условии универсальности. Для каждой возможной упорядоченной пары x_1', x_2' из предъявления S, $x_1' \neq x_2'$, имеется, согласно утверждению 3, по крайней мере, одно решающее множество индивидуумов для x_1' против x_2'. Рассмотрим все решающие множества индивидуумов для некоторой x_1' против некоторой $x_2' \neq x_1'$ в S. Среди этих множеств выберем такое, в котором присутствует наименьшее число лиц – если его нельзя выбрать однозначно, то возьмем любое из таких множеств. Обозначим выбранное множество V_1. С помощью соответствующего обозначения можно сказать, что V_1 является решающим для x_1 против x_2.

Пусть, k – число индивидуумов в V_1. Обозначим их номерами $1, \dots, k$. Пусть, V' содержит индивидуума под первым номером, V_2 – индивидуумов с номерами $2, \dots, k$, V_3 – остальных с номерами $k+1, \dots, n$. На основании построения можно заключить:

V_1 – решающее множество для x_1 против x_2; (7.46)

$$\text{любое решающее множество для некоторой альтернативы в } S$$
$$\text{против некоторой другой альтернативы в } S$$
$$\text{содержит не менее чем } k \text{ элементов.} \tag{7.47}$$

По построению, V_2 содержит $k-1$ элементов. Значит, в соответствии с (7.47):

$$V_2 \text{ не является решающим для любой альтернативы в } S$$
$$\text{против любой другой альтернативы в } S. \tag{7.48}$$

В силу утверждения 5

$$V' \text{ не является решающим множеством для любой альтернативы}$$
$$\text{против произвольной другой альтернативы.} \tag{7.49}$$

Пусть $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ – такой набор индивидуальных упорядочений, что:

$$\text{для любого индивидуума в } V' \ (x_1 \succ_i x_2)\&(x_2 \succ_i x_3), \tag{7.50}$$
$$\text{для каждого индивидуума в } V_2 \ (x_3 \succ_i x_1)\&(x_1 \succ_i x_2), \tag{7.51}$$
$$\text{для всех индивидуумов в } V_3 \ (x_2 \succ_i x_3)\&(x_3 \succ_i x_1). \tag{7.52}$$

Из (7.50) – (7.52) и определений V_1, V_2, V' следует, что $x_1 \succ_i x_2$ для всех, i-х индивидуумов в V_1. Из (7.46) вытекает, что:

$$x_1 \succ x_2. \tag{7.53}$$

Из (7.51) и транзитивности $\succsim_i$ приходим к выводу о том, что $x_3 \succ_i x_2$ для всех индивидуумов в V_2. Из (7.50) и (7.52) делаем вывод, что $x_2 \succ_i x_3$ для каждого индивидуума вне V_2. Если бы $x_3 \succ x_2$, то в силу данных выводов и утверждения 2 V_2 было бы решающим множеством для x_2 против x_3, что противоречит (7.48). Следовательно, $\overline{x_3 \succ x_2}$, т.е. $x_2 \succ x_3$.

Из (7.53) и последнего отношения предпочтения, в силу транзитивности $\succsim$, следует $x_1 \succ x_3$. Из (7.50) и транзитивности отношения $\succsim_i$ вытекает, что $x_1 \succ_i x_3$ для всех индивидуумов в V'. А из (7.51)–(7.52) следует, что $x_3 \succ_i x_1$ для каждого индивидуума вне V'. Согласно последним трем отношениям предпочтения и утверждению 2, V' – решающее множество для x_1 против x_3, что противоречит (7.49). Таким образом, общая теорема о возможности доказана[6].

[6] Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004.