7.2. Характеристики общего экономического равновесия вальрасова типа.

Рассмотрим простейшую модель (2×2) распределительной экономической системы, в которой присутствуют только два потребителя, осуществляющие выбор в пространстве двух товаров. Каждый экономический агент решает задачу выбора с учетом первоначальных запасов благ. При этом для экономической системы в целом должны выполняться натуральные балансовые ограничения по объемам потребляемой и имеющейся в наличии продукции. Итак, экономическая система в целом описывается следующей оптимизационно-балансовой моделью:

$$\begin{cases} \begin{cases} \max\limits_{x_{11}^c, x_{12}^c} U_1(x_{11}^c, x_{12}^c): \\ p_1 x_{11}^c + p_2 x_{12}^c \leqslant p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12}; \end{cases} \\ \begin{cases} \max\limits_{x_{21}^c, x_{22}^c} U_2(x_{21}^c, x_{22}^c): \\ p_1 x_{21}^c + p_2 x_{22}^c \leqslant p_1 \omega_{21} + p_2 \omega_{22}; \end{cases} \\ x_{11}^c \geqslant 0; x_{12}^c \geqslant 0; x_{21}^c \geqslant 0; x_{22}^c \geqslant 0; \\ x_{11}^c + x_{21}^c \leqslant \omega_{11} + \omega_{21}; \\ x_{12}^c + x_{22}^c \leqslant \omega_{12} + \omega_{22}. \end{cases}$$

Оптимальный выбор каждого из потребителей будет подчиняться эквимаржинальному принципу (2.10):

$$MRS_{12}^1 \equiv -\frac{dx_{12}^c}{dx_{11}^c}\bigg|_{U_1=const} = \frac{MU_{11}}{MU_{12}} = \frac{p_1}{p_2}, MRS_{12}^1 \equiv -\frac{dx_{22}^c}{dx_{21}^c}\bigg|_{U_2=const} = \frac{MU_{21}}{MU_{22}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Поскольку в экономике вектор цен един для всех хозяйствующих субъектов, постольку предельные нормы замещения для двух потребителей равны. Таким образом, получаем условия общего равновесия в потреблении:

$$MRS_{12}^1 \equiv -\frac{dx_{12}^c}{dx_{11}^c}\bigg|_{U_1=const} = \frac{MU_{11}}{MU_{12}} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_{21}}{MU_{22}} = -\frac{dx_{22}^c}{dx_{21}^c}\bigg|_{U_2=const} \equiv MRS_{12}^1. \qquad (7.13)$$

Пример 7.1. Общее экономическое равновесие в потреблении

Пусть экономика состоит из двух потребителей (A и B), каждый из которых потребляет три вида продуктов и обладает соответствующей функцией полезности[1]: $U_A = (x_1 - 5)^{½}(x_2 - 4)^{¼}(x_3 - 10)^{¼}$, $U_B = (x_1 - 2)^{¼}(x_2 - 20)^{¼}(x_3 - 1)^{½}$. Первоначальные запасы благ в данной экономике у этих индивидуумов составляют соответственно $\omega_1^A = 20$, $\omega_1^B = 30$, $\omega_2^A = 50$, $\omega_2^B = 100$, $\omega_3^A = 10$, $\omega_3^B = 40$. Поскольку функции полезности в данной задаче имеют вид зависимостей Стоуна–Джери (П1.3.1), постольку функции спроса на первые два товара для каждого из потребителей задаются соотношениями (П2.1.1):

$$x_1^A = a_1^A + \frac{\alpha_1^A}{p_1}\frac{(M_A - p_1 a_1^A - p_2 a_2^A - p_3 a_3^A)}{(\alpha_1^A + \alpha_2^A + \alpha_3^A)}, \qquad (П7.1.1)$$

$$x_2^A = a_2^A + \frac{\alpha_2^A}{p_2}\frac{(M_A - p_1 a_1^A - p_2 a_2^A - p_3 a_3^A)}{(\alpha_1^A + \alpha_2^A + \alpha_3^A)}, \qquad (П7.1.2)$$

$$x_1^B = a_1^B + \frac{\alpha_1^B}{p_1}\frac{(M_B - p_1 a_1^B - p_2 a_2^B - p_3 a_3^B)}{(\alpha_1^B + \alpha_2^B + \alpha_3^B)}, \qquad (П7.1.3)$$

[1] Ср. Тарасевич Л.С., Гальперин В.М., Гребенников Л.И., Леусский А.И. Макроэкономика. – 6-е изд. – М.: Высшее образование, 2006.

$$x_2^B = a_2^B + \frac{\alpha_2^B}{p_2}\frac{(M_B - p_1 a_1^B - p_2 a_2^B - p_3 a_3^B)}{(\alpha_1^B + \alpha_2^B + \alpha_3^B)}. \qquad (П7.1.4)$$

В силу того, что в рамках модели общего экономического равновесия анализируется потребительский выбор с учетом первоначальных запасов благ (I.1b), следует расписать доходы потребителей по источникам их формирования: $M_A = p_1\omega_1^A - p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A$, $M_B = p_1\omega_1^B - p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B$. Тогда функции спроса приобретают вид:

$$x_1^A = a_1^A + \frac{\alpha_1^A}{p_1}\frac{(p_1\omega_1^A - p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A - p_1 a_1^A - p_2 a_2^A - p_3 a_3^A)}{(\alpha_1^A + \alpha_2^A + \alpha_3^A)},$$
$$x_2^A = a_2^A + \frac{\alpha_2^A}{p_2}\frac{(p_1\omega_1^A - p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A - p_1 a_1^A - p_2 a_2^A - p_3 a_3^A)}{(\alpha_1^A + \alpha_2^A + \alpha_3^A)},$$
$$x_1^B = a_1^B + \frac{\alpha_1^B}{p_1}\frac{(p_1\omega_1^B - p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B - p_1 a_1^B - p_2 a_2^B - p_3 a_3^B)}{(\alpha_1^B + \alpha_2^B + \alpha_3^B)},$$
$$x_2^B = a_2^B + \frac{\alpha_2^B}{p_2}\frac{(p_1\omega_1^B - p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B - p_1 a_1^B - p_2 a_2^B - p_3 a_3^B)}{(\alpha_1^B + \alpha_2^B + \alpha_3^B)}.$$

Суммарный спрос двух потребителей на каждое благо должен равняться его запасам, находящимся в распоряжении индивидуумов, причем, в силу закона Вальраса, достаточно выписать балансы лишь для двух из трех рынков:

$$x_1^A + x_1^B = a_1^A + a_1^B + \frac{1}{p_1}\left(\frac{\alpha_1^A(p_1\omega_1^A - p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A - p_1 a_1^A - p_2 a_2^A - p_3 a_3^A)}{\alpha_1^A + \alpha_2^A + \alpha_3^A}\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_1^B(p_1\omega_1^B - p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B - p_1 a_1^B - p_2 a_2^B - p_3 a_3^B)}{\alpha_1^B + \alpha_2^B + \alpha_3^B}\right) = \omega_1^A + \omega_1^B;$$
$$x_2^A + x_2^B = a_2^A + a_2^B + \frac{1}{p_2}\left(\frac{\alpha_2^A(p_1\omega_1^A - p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A - p_1 a_1^A - p_2 a_2^A - p_3 a_3^A)}{\alpha_1^A + \alpha_2^A + \alpha_3^A}\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_2^B(p_1\omega_1^B - p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B - p_1 a_1^B - p_2 a_2^B - p_3 a_3^B)}{\alpha_1^B + \alpha_2^B + \alpha_3^B}\right) = \omega_2^A + \omega_2^B.$$

Распишем данные балансовые равенства объемов потребления и запасов применительно к условиям задачи:

$$\frac{p_1 15 + p_2 46}{2p_1} + \frac{p_1 28 + p_2 80 + p_3 39}{4p_1} = 43;$$
$$\frac{p_1 15 + p_2 46}{4p_2} + \frac{p_1 28 + p_2 80 + p_3 39}{4p_2} = 126.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 43p_1 = 474p_2 - 39p_3, \\ 114p_1 = -172p_2 + 39p_3. \end{cases}$$

Их сумма дает отношения товарных цен:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{157}{302}.$$

Таким образом, получаем равновесный вектор относительных цен:

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (0{,}15;\ 0{,}08; 0{,}77). \qquad (П7.1.5)$$

Рассмотрим теперь условия общего равновесия в производстве. Предположим, что в экономике присутствуют два предприятия, каждое из которых производит один, отличный от другого вид продукции. Выпишем функции прибыли каждой из фирм. Для первого предприятия она будет иметь вид:

$$PR_1(x_{11}^p, x_{12}^p) = p_1 y_{11} + p_2 y_{12} = p_1(q_{11} - x_{11}^p) + p_2(q_{12} - x_{12}^p)$$
$$= p_1 q_{11} - p_1 x_{11}^p - p_2 x_{12}^p,$$
поскольку, по предположению, $q_{12} = 0$.

Аналогично, в силу предположения, что $q_{21} = 0$, прибыль второй фирмы такова:
$$PR_2(x_{21}^p, x_{22}^p) = p_1 y_{21} + p_2 y_{22} = p_1(q_{21} - x_{21}^p) + p_2(q_{22} - x_{22}^p)$$
$$= p_2 q_{22} - p_1 x_{21}^p - p_2 x_{22}^p.$$

Условия максимизации прибыли каждого из предприятий будут иметь вид (4.24):
$$\begin{cases} MP_{11} = \dfrac{\partial q_{11}}{\partial x_{11}^p} = 1, \\ MP_{12} = \dfrac{\partial q_{11}}{\partial x_{12}^p} = \dfrac{p_2}{p_1}; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} MP_{21} = \dfrac{\partial q_{22}}{\partial x_{21}^p} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ MP_{22} = \dfrac{\partial q_{22}}{\partial x_{22}^p} = 1. \end{cases}$$

Поделив в каждой из систем первое из равенств на второе и объединив полученные соотношения, получаем аналогичное распределительной системе (7.13) соотношение, характеризующее общее равновесие в производстве:
$$MRTS_{12}^1 \equiv -\left.\frac{dx_{12}^p}{dx_{11}^p}\right|_{q_{11}=const} = \frac{MP_{11}}{MP_{12}} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{MP_{21}}{MP_{22}} = -\left.\frac{dx_{22}^p}{dx_{21}^p}\right|_{q_{22}=const} \equiv MRTS_{12}^2. \quad (7.14)$$

Распишем полный дифференциал технологии первого производителя, в котором учтем условия максимизации прибыли:
$$dq_{11} = \frac{\partial q_{11}}{\partial x_{11}^p} dx_{11}^p + \frac{\partial q_{11}}{\partial x_{12}^p} dx_{12}^p = dx_{11}^p + \frac{p_2}{p_1} dx_{12}^p,$$
т.е.
$$dq_{11} - dx_{11}^p = \frac{p_2}{p_1} dx_{12}^p.$$

Аналогично, для второй фирмы имеем:
$$dq_{22} = \frac{\partial q_{22}}{\partial x_{21}^p} dx_{21}^p + \frac{\partial q_{22}}{\partial x_{22}^p} dx_{22}^p = \frac{p_1}{p_2} dx_{21}^p + dx_{22}^p,$$
т.е.
$$-dx_{21}^p = -\frac{p_2}{p_1} dq_{22} + \frac{p_2}{p_1} dx_{22}^p.$$

Складывая полученные соотношения и используя определения совокупного чистого выпуска для каждого из товаров по экономике в целом, приходим к соотношению:
$$dq_{11} - dx_{11}^p - dx_{21}^p = dy_1 = -\frac{p_2}{p_1}(dq_{22} - dx_{12}^p - dx_{22}^p) = -\frac{p_2}{p_1} dy_2. \quad (7.15)$$

Поскольку первоначальные запасы благ в экономике фиксированы, постольку изменение объема производства будет соответствовать изменению объема потребления каждого из товаров: $dx_1^c = dy_1 + d\omega_1 = dy_1$, $dx_2^c = dy_2 + d\omega_2 = dy_2$. Следовательно, равенство (7.15) можно переписать таким образом:
$$MRT_{12} \equiv -\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{dx_2^c}{dx_1^c} = \frac{p_1}{p_2}, \quad (7.16)$$
где $MRT_{12} \equiv -\frac{dy_2}{dy_1}$ – предельная норма трансформации одного продукта в другой для данной экономической системы.

Объединяя соотношения (7.13), (7.14) и (7.16), получаем условия совместного равновесия в производстве и потреблении:
$$MRT_{12} = MRTS_{12}^1 = MRTS_{12}^2 = MRS_{12}^1 = MRS_{12}^2 = \frac{p_1}{p_2}. \quad (7.17)$$

Итак, в условиях общего экономического равновесия предельная норма трансформации равна обратной величине относительного предельного продукта каждого из факторов производства, которая совпадает с относительными ценами продуктов и ресурсов.

Пример 7.2. Совместное равновесие в производстве и потреблении

Допустим, что в экономике присутствуют два потребителя с функциями полезности $U_1 = (x_{11}^c)^{½}(x_{12}^c)^{½}$ и $U_2 = (x_{21}^c)^{¼}(x_{22}^c)^{¾}$, которые располагают запасами благ $\omega_{11} = 2$, $\omega_{12} = 4$, $\omega_{21} = 5$, $\omega_{22} = 4$ и долями в прибылях двух предприятий $\theta_{11} = ¼$, $\theta_{12} = ¾$, $\theta_{21} = ¾$, $\theta_{22} = ¼$. Каждое из предприятий производит один, отличный от другого продукт. Технологии производства описываются следующими функциями: $q_1 = \left(x_{11}^p\right)^{½}\left(x_{12}^p\right)^{¼}$, $q_2 = \left(x_{21}^p\right)^{¼}\left(x_{22}^p\right)^{½}$.

Используя функции производного спроса на ресурсы (П4.7.1) – (П4.7.2), получаем:

$$x_{11}^p = \frac{1}{32}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^3, y_{12} = -x_{12}^p = -\left(\frac{p_1}{8p_2}\right)^2, q_1 = \left(\frac{p_1}{4p_2}\right)^2,$$

$$y_{11} = q_1 - x_{11}^p = \left(\frac{p_1}{4p_2}\right)^2 - \frac{1}{32}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^3, y_{21} = -x_{21}^p = -\left(\frac{p_2}{8p_1}\right)^2,$$

$$x_{22}^p = \frac{p_2}{32p_1}, q_2 = \frac{p_2}{16p_1}, y_{22} = q_2 - x_{22}^p = \frac{p_2}{16p_1}.$$

С учетом того, что функции потребительского спроса для каждого из потребителей имеют вид (П3.1), можно выписать натуральное балансовое равенство для первого товарного рынка в условиях равновесия (7.10):

$$\begin{aligned} x_{11}^c + x_{21}^c &= \frac{½(2p_1 + 4p_2 + ¼p_1y_{11} + ¼p_2y_{12} + ¾p_1y_{21} + ¾p_2y_{22})}{p_1} \\ &\quad + \frac{¾(5p_1 + 4p_2 + ¾p_1y_{11} + ¾p_2y_{12} + ¼p_1y_{21} + ¼p_2y_{22})}{p_1} \\ &= \frac{19}{4} + 5\frac{p_2}{p_1} + \frac{11}{16}y_{11} + \frac{11}{16}y_{12}\frac{p_2}{p_1} + \frac{9}{16}y_{21} + \frac{9}{16}y_{22}\frac{p_2}{p_1} \\ &= \omega_{11} + \omega_{21} + q_1 - x_{11}^p - x_{21}^p = 7 + y_{11} + y_{21}; \end{aligned}$$

или

$$-\frac{9}{4} + 5\frac{p_2}{p_1} - \frac{5}{16}y_{11} + \frac{11}{16}y_{12}\frac{p_2}{p_1} - \frac{7}{16}y_{21} + \frac{9}{16}y_{22}\frac{p_2}{p_1} = 0.$$

С учетом полученных выше величин объемов чистого выпуска последнее равенство можно преобразовать к виду:

$$43\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^5 + 5120\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^4 - 2304\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^3 - 11\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 20\frac{p_2}{p_1} + 10 = 0.$$

Численно решая данное уравнение, получаем равновесное отношение товарных цен:

$$\frac{p_2}{p_1} = 0{,}16375.$$

Таким образом, искомый равновесный вектор относительных цен будет таков:

$$(\rho_1, \rho_2) = (0{,}86;\ 0{,}14).$$