7.1. Закон Вальраса и существование общего экономического равновесия

Современное понимание предмета экономической теории как науки об оптимальном, рациональном использовании ограниченных ресурсов наиболее отчетливо отражается моделью общего равновесия. Модель общего экономического равновесия включает в себя количественное описание технологических, производственных процессов и вытекающих из них распределительных аспектов взаимодействия между факторами общественного воспроизводства. Эта модель характеризует экономику как систему, интегрированно включающую в себя процессы производства, распределения, обмена и потребления.

В модели общего экономического равновесия вальрасова типа рассматривается закрытая рыночная экономика без учета роли государства в условиях совершенной конкуренции[1]. Предполагается способность ее к саморегулированию, что подразумевает гибкость ценовых параметров: товарных цен, ставок процента и заработной платы.

Изучение общего экономического равновесия при несовершенной конкуренции, т.е. в условиях наличия власти потребителей и производителей над ценовыми параметрами рынков, когда каждый из экономических агентов оказывается в состоянии варьировать цену на продукцию и ресурсы, на современном этапе развития экономической теории не представляется возможным. В связи с этим допущение об экзогенно заданной системе цен существенно облегчает анализ.

Экономическая система анализируется в долгосрочной перспективе, когда все факторы производства для каждого хозяйствующего субъекта являются переменными величинами. Блага специфицированы в пространстве и во времени (датированы), поэтому цены – это дисконтированные оценки $\left(\frac{p_{jt}}{(1+r_1)\cdots(1+r_t)}\right)$.

В модели анализируется двухсекторная экономика, что подразумевает дихотомию процессов производства и потребления (рис. 7.1).

Рис. 7.1. Кругооборот доходов и расходов в экономической системе

Данная модель описывает частнособственническую экономику, в которой всеми предприятиями и ресурсами владеют индивидуумы – потребители. Бюджетное ограничение каждого из них, обозначаемого индексом i, имеет вид:

---

[1] Вальрас Л. Элементы чистой политической экономии, или теория общественного богатства. – М.: Экономика, 2000.

$$\sum_{j=1}^{l} p_j x_{ij}^c \leqslant M_i = \sum_{j=1}^{l} p_j \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \theta_{ik} \sum_{j=1}^{l} p_j \left(q_{kj} - x_{kj}^p\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{l} p_j \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \theta_{ik} \sum_{j=1}^{l} p_j y_{kj}, \tag{7.1}$$

где x_{ij}^c – объем потребления j-го товара i-м потребителем, x_{kj}^p – объем j-го ресурса, используемого k-м предприятием, q_{kj} – объем производства j-го товара k-м предприятием, $y_{kj} = q_{kj} - x_{kj}^p$ – чистый выпуск j-го товара k-м предприятием, θ_{ik} – доля i-го потребителя в прибыли $\sum_{j=1}^{l} p_j y_{kj}$ k-го предприятия, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что сумма долей всех индивидуумов-собственников в прибыли k-го предприятия равна единице: $\sum_{i=1}^{n} \theta_{ik} = 1$.

Потребители стремятся к достижению наибольшей полезности $U(x_1, \dots, x_l)$ с учетом бюджетного ограничения (7.1). Производители максимизируют прибыль (4.20), причем их производственные возможности характеризуются технологическими множествами:

$$F_k\left(x_{k1}^p, \dots, x_{kl}^p, q_{k1}, \dots, q_{kl}\right) = 0.$$

Для экономики в целом выполняется балансовое неравенство, отражающее тот факт, что для каждого, j-го товарного рынка объемы потребления не могут превышать величины производства вместе с запасами:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^c + \sum_{k=1}^{m} x_{kj}^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{m} q_{kj}, \text{т. е.} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^c \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{m} y_{kj}, \text{или } x_j^c \leqslant \omega_j + y_j, \tag{7.2}$$

где

$$x_j^c = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^c \tag{7.3}$$

– суммарный объем индивидуального потребления j-го товара,

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} \tag{7.4}$$

– суммарные запасы j-го товара у всех потребителей,

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} y_{kj} = q_j - x_j^p = \sum_{k=1}^{m} q_{kj} - \sum_{k=1}^{m} x_{kj}^p \tag{7.5}$$

– совокупный объем чистого производства j-го товара всеми фирмами; $j = \{1, \dots, l\}$.

Совокупный рыночный, или агрегированный, чистый конечный спрос на j-й товар z_j – это превышение суммарного спроса всех n потребителей над суммой объемов его чистого производства всеми m фирмами и запасов данного товара, находящихся в собственности потребителей:

$$z_j = x_j^c - \omega_j - y_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^c - \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} - \sum_{k=1}^{m} y_{kj}. \tag{7.6}$$

Выше было показано, что маршаллианские функции потребительского спроса и функции предложения продукции фирмами непрерывны по вектору цен (3.3), (4.19). Следовательно, непрерывными по ценам будут и функции избыточного спроса (7.6) как разность непрерывных функций и константы запасов.

В дальнейшем для простоты будем анализировать экономическую систему, в которой присутствуют только два потребителя, осуществляющие выбор в пространстве двух товаров, производимых двумя фирмами[2]:

$$\begin{cases} \begin{cases} \max\limits_{x_{11}^c, x_{12}^c} U_1(x_{11}^c, x_{12}^c): \\ p_1 x_{11}^c + p_2 x_{12}^c \leqslant p_1\omega_{11} + p_2\omega_{12} + \theta_{11}(p_1 y_{11} + p_2 y_{12}) + \theta_{12}(p_1 y_{21} + p_2 y_{22}); \end{cases} \\ \begin{cases} \max\limits_{x_{21}^c, x_{22}^c} U_2(x_{21}^c, x_{22}^c): \\ p_1 x_{21}^c + p_2 x_{22}^c \leqslant p_1\omega_{21} + p_2\omega_{22} + \theta_{21}(p_1 y_{11} + p_2 y_{12}) + \theta_{22}(p_1 y_{21} + p_2 y_{22}); \end{cases} \\ \max\limits_{x_{11}^p, x_{12}^p} PR_1(x_{11}^p, x_{12}^p) = \max\limits_{x_{11}^p, x_{12}^p} (p_1 y_{11} + p_2 y_{12}); \\ \max\limits_{x_{21}^p, x_{22}^p} PR_2(x_{21}^p, x_{22}^p) = \max\limits_{x_{21}^p, x_{22}^p} (p_1 y_{21} + p_2 y_{22}); \\ \theta_{11} + \theta_{21} = 1;\ \theta_{12} + \theta_{22} = 1; \\ x_{11}^c \geqslant 0; x_{12}^c \geqslant 0; x_{21}^c \geqslant 0; x_{22}^c \geqslant 0; x_{11}^p \geqslant 0; x_{12}^p \geqslant 0; x_{21}^p \geqslant 0; x_{22}^p \geqslant 0; \\ x_{11}^c + x_{21}^c \leqslant \omega_{11} + \omega_{21} + y_{11} + y_{21}; \\ x_{12}^c + x_{22}^c \leqslant \omega_{12} + \omega_{22} + y_{12} + y_{22}. \end{cases}$$

Здесь $y_{11} = q_{11} - x_{11}^p$, $y_{12} = q_{12} - x_{12}^p$, $y_{21} = q_{21} - x_{21}^p$, $y_{22} = q_{22} - x_{22}^p$, где q_{11} и q_{12} – объемы производства соответственно первого и второго товаров первым предприятием, q_{21} и q_{22} – объемы производства соответственно первого и второго товара вторым предприятием, x_{11}^p и x_{12}^p – объемы соответственно первого и второго ресурсов, используемых первым предприятием; x_{21}^p и x_{22}^p – объемы соответственно первого и второго ресурсов, используемых вторым предприятием.

Общее экономическое равновесие – это такое состояние экономической системы, когда спрос равен предложению, или, другими словами, избыточный спрос как превышение спроса над предложением равен нулю на каждом из рынков. Современная теория общего равновесия доказывает возможность его существования при разумных допущениях о характеристиках функционирования экономической системы.

Традиционно общее экономическое равновесие определяется как равенство нулю или отрицательность, т.е. неположительность, избыточного спроса на всех l рынках в экономике:

$$z_j \leqslant 0, \tag{7.7}$$

при неотрицательных ценах $$p_j \geqslant 0, \tag{7.8}$$

с учетом условия: $$p_j z_j = 0, j = \{1, \dots, l\}. \tag{7.9}$$

Последнее условие означает, что либо цена, либо избыточный спрос (7.6) на каждом из l рынков равняется нулю, т.е. натуральное балансовое соотношение по объемам потребляемой и производимой продукции с учетом запасов (7.2) выполняется в виде равенства:

$$x_j^c = \omega_j + y_j. \tag{7.10}$$

В равновесной экономике действует закон Вальраса[3], утверждающий, что стоимость совокупного, или агрегированного, чистого спроса тождественно равна нулю:

[2] Эту так называемую модель 2×2×2 возможно без труда обобщить на случай произвольного конечного числа экономических агентов и товаров.

[3] См.: Lange O. Say’s law: a restatement and criticism // Studies in mathematical economics and econometrics / Ed. by O. Lange. – Chicago, 1942.

$$p_1z_1 + \cdots + p_{l-1}z_{l-1} + p_lz_l = \sum_{h=1}^{l} p_hz_h \equiv 0. \qquad (7.11)$$

Установить его справедливость нетрудно. В условиях оптимума для каждого, i-го, индивидуума бюджетное ограничение выполняется в виде равенства: $p_1x_{i1} + \cdots + p_lx_{il} = p_1\omega_{i1} + \cdots + p_l\omega_{il}, i = 1, \ldots, m$; т.е. стоимость чистого спроса i-го индивидуума равна 0: $p_1(x_{i1} - \omega_{i1}) + \cdots + p_l(x_{il} - \omega_{il}) = p_1z_{i1} + \cdots + p_lz_{il} = 0$. Сумма таких тождеств для всех индивидуумов, по i от 1 до m, дает нулевую величину агрегированного чистого спроса в стоимостном выражении:

$$p_1\sum_{i=1}^{m} z_{i1} + \cdots + p_h\sum_{i=1}^{m} z_{ih} = \sum_{i=1}^{m} p_1z_{i1} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} p_hz_{ih} = \sum_{h=1}^{l} p_hz_h = 0,$$

что и утверждает закон Вальраса (7.11).

Из закона Вальраса вытекают два важных следствия. Во-первых, из закона Вальраса следует, что если в экономике, состоящей из l рынков, при некотором векторе цен $p = \{p_h\}_{h=1}^{l}$, $p_h > 0$, избыточный спрос равен нулю на $l - 1$ рынках, то он оказывается нулевым и на оставшемся l-том рынке. Доказательство первого следствия проведем по индукции. Допустим, для начала, что экономика состоит из двух рынков. Пусть $z_1(p_1, p_2) = 0$. Тогда из закона Вальраса (7.11), поскольку $p_2 > 0$, следует, что $z_2(p_1, p_2) = 0$. Значит, если избыточный спрос нулевой на одном рынке, то он также равен нулю и на другом.

Данное утверждение по индукции распространяется на экономику, состоящую из l рынков. Пусть имеет место нулевой избыточный спрос на $l - 1$ рынках: $z_1 = 0$, …, $z_{l-1} = 0$. Поскольку $p_l > 0$, из закона Вальраса (7.11) вместе с условием (7.7) следует, что $z_l = 0$. Итак, в соответствии с законом Вальраса, если все рынки, за исключением данного, находятся в состоянии равновесия, то избыточный спрос и на данном, последнем рынке равен нулю.

Во-вторых, следствием из закона Вальраса является то, что когда цена хотя бы одного блага в экономике отлична от нуля, величины избыточного спроса z_l не могут быть одновременно одного знака.

Докажем второе следствие для экономики, состоящей из двух рынков. В силу (7.11):

$$p_1z_1 = -p_2z_2. \qquad (7.12)$$

В случае экономических благ, когда обе цены положительны ($p_i > 0, i = 1, 2$), получается, что если $z_1 \geqslant 0$, то $z_2 \leqslant 0$, и наоборот, из $z_2 \geqslant 0$ следует $z_1 \leqslant 0$. Если первое благо является свободным ($p_1 = 0$), то избыточный спрос на него не может быть положительным ($z_1 \leqslant 0$). При этом, поскольку $p_2 > 0$, постольку из (7.12) следует, что $z_2 = 0$. Аналогично, если второе благо является свободным ($p_2 = 0$), то избыточный спрос на него не может быть положительным ($z_2 \leqslant 0$). При этом, поскольку $p_1 > 0$, постольку из (7.12) следует, что $z_1 = 0$. Тем самым, второе следствие из закона Вальраса доказано.

В силу натуральных балансовых ограничений для каждого из рынков, $z_1 \leqslant 0$, $z_2 \leqslant 0$. Поэтому сумма величин избыточного спроса в стоимостном выражении по всем рынкам в экономике должна быть неположительной: $p_1z_1 + \cdots + p_{l-1}z_{l-1} + p_lz_l = \sum_{h=1}^{l} p_hz_h \leqslant 0$. Но, поскольку в состоянии равновесия либо цена товара, либо величина избыточного спроса на него должны равняться нулю (7.9), нулевой будет и сумма соответствующих произведений, что было установлено выше законом Вальраса (7.11).

Таким образом, совокупность бюджетных ограничений потребителей и натуральных балансовых соотношений, касающихся объемов потребляемой и имеющейся в наличии продукции для всех товарных рынков, содержит одну и ту же информацию. Следовательно, одно из данных условий в состоянии равновесия является линейно зависимым от остальных.

Искомыми величинами в модели являются объемы потребления всех (l) товаров каждым из m потребителей, а также равновесный вектор цен, состоящий из l компонент. Значит, всего в модели $(l+1)m$ неизвестных. По доказанному, в модели $(l+1m-1$ независимое условие. Следовательно, можно ставить задачу определения не абсолютного уровня цен, а их относительных значений, когда цена одного из благ либо, что эквивалентно, сумма всех товарных цен будет служить единицей счета.

Осуществим переход от фактической системы цен – к нормированной, рассчитав относительные цены следующим образом: $\rho_j = \frac{p_j}{\sum_{j=1}^{l} p_j}$. Поэтому $0 \leqslant \rho_j \leqslant 0, j = 1, \ldots, l$. Действительно, относительная – так же, как и абсолютная – цена свободного блага будет равна нулю. Если же все блага – свободные и лишь одно – экономическое, то для данного, последнего товара сумма в знаменателе относительной цены совпадет с числителем – его абсолютной ценой, поэтому относительная – окажется равной единице. В остальных случаях относительные цены товаров будут находиться в промежутке между данными крайними значениями.

В силу однородности нулевой степени функций спроса по Маршаллу с учетом первоначальных запасов благ, а также функций предложения продукции предприятиями по вектору цен можно перейти в функциях избыточного спроса от абсолютных цен к относительным. Видоизмененные функции останутся полностью эквивалентными исходным: сохранятся без изменения их значения и свойства, в частности, непрерывности по вектору цен.

Основной в концепции общего экономического равновесия является следующая теорема Эрроу–Дебре, устанавливающая достаточные условия его существования[4]. Пусть выполняются предположения о непрерывности и строгой квазивогнутости функций полезности, а также о непрерывности и строгой вогнутости производственных функций. Тогда для любого первоначального распределения запасов благ между потребителями существует вектор цен, при котором достигается общее конкурентное равновесие (7.7) – (7.9).

Будем рассматривать только совокупность бюджетных ограничений, пока не привлекая к анализу натуральные балансовые соотношения по объемам потребления, производства и запасам товаров на каждом рынке. Вначале для иллюстрации проведем доказательство теоремы существования общего равновесия в экономике, состоящей из двух рынков экономических благ ($p_i > 0, i = 1, 2$). На рис. 7.2 изображена пространственная кривая избыточного спроса $Z(\rho_1) = \left(z_1(\rho_1), z_2(\rho_1)\right)$ и ее проекция на плоскость $Z_1 0 Z_2$. Здесь $\rho_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$ – относительная цена первого товара. Очевидно, что $\rho_2 = 1 - \rho_1$ можно не включать в число аргументов функций избыточного спроса. По второму следствию из закона Вальраса, в случае отсутствия равновесия экономика будет находиться в некотором состоянии A во втором квадранте или в каком-то состоянии B в четвертом квадранте. Все состояния в первом и третьем квадрантах недоступны, по-

[4] Debreu G. Theory of value. – N.Y.: Willey; L.: Chapman & Hall, 1959; Arrow K., Hahn F. General competitive analysis. – San Francisco: Holden Day; Edinburgh: Oliver & Boyd, 1971.

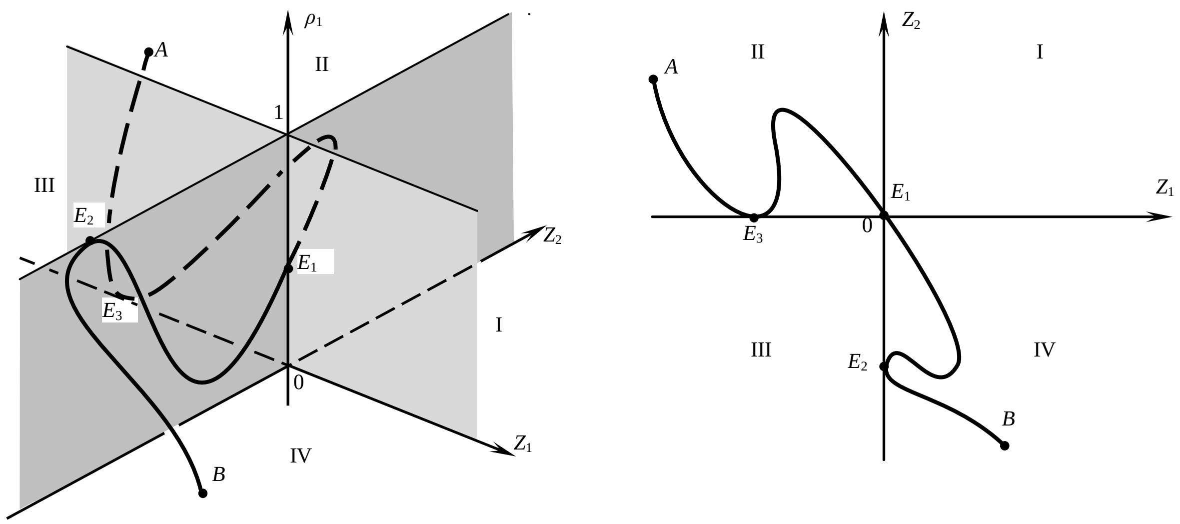
скольку там величины избыточного спроса z_1 и z_2 имеют одинаковый знак: они либо оба положительны, либо – отрицательны.

Для действительнозначных функций $z: \rho \longmapsto z(\rho)$ известна теорема Коши–Больцано, которая гласит, что если $z(\rho) \in C^0[a, b]$, то $z(\rho)$ принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $z(\alpha)$ и $z(\beta)$. Из теоремы Коши–Больцано следует, что функция из класса $C^0[a, b]$, имеющая разные по знаку значения в точках α и β, где $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, обязательно принимает в некоторой промежуточной между α и β точке нулевое значение. Воспользуемся этим следствием для доказательства существования общего равновесия.

В состоянии *A*: $z_1 < 0$, $z_2 > 0$. В состоянии *B*: $z_1 > 0$, $z_2 < 0$. По теореме Коши–Больцано, в силу того, что каждая координата отображения избыточного спроса $Z(\rho_1) = \big(z_1(\rho_1), z_2(\rho_1)\big)$ непрерывна, для перехода экономики из состояния *A* в состояние *B* каждая из координат должна принять нулевое значение. Пусть, для определенности, в состоянии E_1 $z_1 = 0$. По первому следствию из закона Вальраса, избыточный спрос z_2 также должен быть нулевым. Итак, в состоянии E_1 величины избыточного спроса z_1 и z_2 одновременно равны нулю при положительных ценах, т.е. достигается общее экономическое равновесие. Таким образом, доказано существование общего равновесия в экономике с двумя рынками при положительных ценах[5] $(p_i > 0, i = 1, 2)$. Точка E_2 отражает ситуацию, когда второе благо является свободным $(\rho_2 = 0, z_2 < 0)$, а первое – экономическим $(\rho_1 = 1, z_1 = 0)$; а E_3 – когда, наоборот, первое – свободное $(\rho_1 = 0, z_1 < 0)$, а второе – экономическое $(\rho_2 = 1, z_2 = 0)$.

Рис. 7.2. Возможные равновесные ситуации

Пространственная иллюстрация — Проекция на плоскость избыточного спроса



[5] В общем случае доказательство существования общего экономического равновесия основано на теореме Брауэра (Какутани) о неподвижной точке, которую можно рассматривать как обобщение теоремы Коши–Больцано на случай векторнозначных функций (соответствий) векторного аргумента. Оказывается, что ценовой вектор, устанавливающий общее экономическое равновесие, будет неподвижной точкой непрерывного отображения ценового бруса в себя, существование которой утверждает теорема Брауэра (Какутани).