5.3. Устойчивость отраслевого равновесия

Рассчитаем вначале параметры рыночного равновесия в статике. Они будут служить в качестве ориентира при анализе устойчивости динамического равновесия. Допустим, что спрос и предложение можно приблизить линейными функциями:

$$p_d = a - bq, \tag{5.5}$$

$$p_s = c + dq, \tag{5.6}$$

или $q_d = \frac{a}{b} - \frac{p}{b}$, $q_s = \frac{p}{d} - \frac{c}{d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$, $a > c$, т.е. при нулевой цене спрос превышает предложение. Найдем равновесные значения цены и объема продаж:

$$p^* = \frac{ad + cb}{b + d}, \tag{5.7}$$

$$q^* = \frac{a - c}{b + d}. \tag{5.8}$$

Рассмотрим динамическое рыночное равновесие в паутинообразной модели сначала в дискретном времени. Предпосылкой ее традиционной версии является то, что объем предложения запаздывает на один период по отношению к ценам: $q_t^s = f(p_{t-1})$. Объем спроса зависит от цены текущего периода: $q_t^d = g(p_t)$. Система уравнений, описывающих рынок, будет выглядеть так:

$$\begin{cases} q_t^s = f(p_{t-1}), \\ q_t^d = g(p_t), \quad \text{или } q_t = f(p_{t-1}) = g(p_t). \\ q_t^s = q_t^d; \end{cases}$$

Итеративное действие модели можно схематично представить следующим образом: $q_0 \to p_0 = g^{-1}(q_0) \to q_1 = f(p_0) \to p_1 = g^{-1}(q_1) \to q_2 = f(p_1) \to \cdots$

Рассмотрим паутинообразную модель, в которой функции спроса и предложения линейны. Предположим, что спрос описывается зависимостью:

$$q_t = \frac{a}{b} - \frac{p_t}{b}, \text{или } p_t = a - bq_t; \tag{5.9}$$

а предложение таково:

$$q_t = \frac{p_{t-1}}{d} - \frac{c}{d}, \text{или } p_{t-1} = c + dq_t; \tag{5.10}$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$, $a > c$.

Проанализируем устойчивость динамики модели. Выразим p_t через p_{t-1}:

$$p_t = \frac{ad + cb}{d} - \frac{b}{d} p_{t-1}. \tag{5.11}$$

Расписывая данные выражения последовательно для двух соседних периодов, используя в каждом из последующих – предшествующее соотношение, индуктивно получаем соотношение между ценами произвольного, t-го и первоначального, нулевого периодов:

$$p_t = \frac{ad + cb}{d} - \frac{b(ad + cb)}{d^2} + \frac{b^2(ad + cb)}{d^3} - \cdots + (-1)^{t-1} \frac{b^{t-1}(ad + cb)}{d^t} + (-1)^t \left(\frac{b}{d}\right)^t p_0.$$

Слагаемые, присутствующие в правой части данного выражения, за исключением последнего представляют собой t членов геометрической прогрессии. Просуммируем их:

$$p_t = \left(\frac{ad + cb}{b + d}\right)\left(1 - \left(-\frac{b}{d}\right)^t\right) + \left(-\frac{b}{d}\right)^t p_0 = p^* + (p_0 - p^*)\left(-\frac{b}{d}\right)^t, \text{или}$$

$$p_t - p^* = (p_0 - p^*)\left(-\frac{b}{d}\right)^t, \tag{5.12}$$

где p^* – это равновесный уровень цены в статике (5.7).

Рассогласование спроса и предложения означает при этом накопление и расходование запасов продукции[1].

Если $\frac{b}{d} < 1$, то $\left(\frac{b}{d}\right)^t \to 0$ при $t \to \infty$, а значит, $\lim_{t\to\infty} p_t = \frac{ad+cb}{b+d} = p^*$, т.е. при большем по модулю угловом коэффициенте линии предложения по сравнению с линией спроса равновесие является устойчивым (рис. 5.4). При этом с течением времени отклонения рыночной цены от равновесного уровня стремятся к нулю (рис. 5.7).

Если $\frac{b}{d} > 1$, то $\left(\frac{b}{d}\right)^t \to \infty$ при $t \to \infty$, и с течением времени отклонения рыночных параметров от равновесных будут неограниченно возрастать. Т.е. при большем по абсолютной величине тангенсе угла наклона линии спроса по сравнению с линией предложения равновесие неустойчиво (рис. 5.5).

Если $\frac{b}{d} = 1$, то $p_t = \left(\frac{ad+cb}{b+d}\right)(1-(-1)^t) + (-1)^t p_0$. Следовательно, при $t = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $p_t = p_0$, а при $t = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $p_t = \frac{2(ad+cb)}{b+d} - p_0$. Итак, при равном (по абсолютной величине) угловом коэффициенте линейных функций спроса и предложения равновесие является квазистабильным, т.е. существуют только два чередующиеся во времени значения рыночной цены (рис. 5.6).

Рис. 5.4.
Устойчивое равновесие

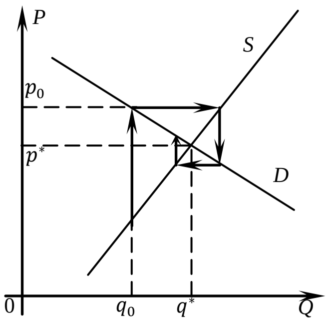


Рис. 5.5.
Нестабильное равновесие

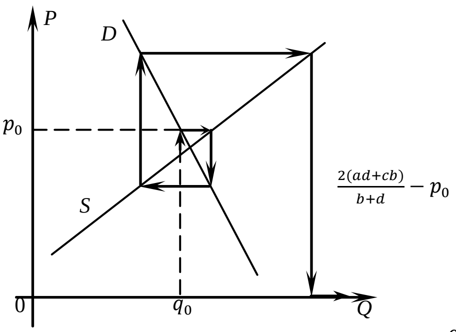
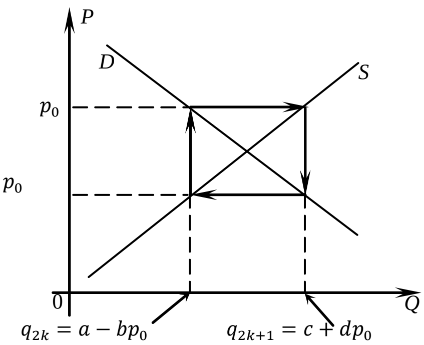


Рис. 5.6.
Квазистабильное равновесие



Перейдем теперь к исследованию паутинообразной модели в непрерывном времени. Рассчитаем отклонение рыночной цены текущего, t-го – от предыдущего периода под номером $(t - \Delta t)$. Для этого вычтем p_{t-1} из левой и правой частей соотношения (5.11) и перейдем от дискретного временно́го шага в один период к интервалу Δt, рассчитав тем самым приращение цены за произвольный единичный период времени Δt:

$$\frac{p(t) - p(t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{ad+cb}{d} - \frac{(d+b)}{d} p(t-\Delta t). \qquad (5.13)$$

Устремляя временной шаг Δt к нулю, в пределе

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{p(t) - p(t-\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \left(\frac{a-c}{b} - p(t)\frac{(d+b)}{b}\right)$$

получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{ad+bc}{d} - \frac{(d+b)}{d} p(t), \qquad (5.14)$$

которое является аналогом соответствующего разностного уравнения (5.13).

Действительно, дифференциальное уравнение (5.14) можно аппроксимировать разностной схемой[2]:

---

[1] Воркуев Б.Л. Количественные методы исследования в микро- и макроэкономике. – М.: ТЕИС, 2007.

[2] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973.

$$p(t+h)-p(t)=h\left(\frac{ad+bc}{d}-\frac{(d+b)}{d}p(t)\right).$$

Если установить в ней временной шаг h равным единице, то уравнение принимает вид (5.13).

Решаем уравнение (5.14), разделяя переменные: $\frac{dp}{p-\frac{ad+bc}{d+b}}=-\frac{(d+b)}{d}dt$. Интегрируя: $\int d\ln\left|p-\frac{ad+bc}{d+b}\right|=-\int\frac{(d+b)}{d}dt+\ln c_1$, а затем потенцируя данное уравнение получаем: $p(t)=\frac{ad+bc}{d+b}+c_1e^{-\frac{(d+b)}{d}t}$. Используя начальное условие, определяем константу: $c_1=p(0)-\frac{ad+bc}{d+b}$. Окончательно имеем уравнение динамики цен:

$$p(t)=p^*+(p(0)-p^*)e^{-\frac{(d+b)}{d}t}, \tag{5.15}$$

где p^* – это равновесный уровень цены в статике (5.7).

С течением времени цена стремится к равновесному уровню[3]: $\lim_{t\to\infty}p(t)=p^*$ (рис. 5.7).

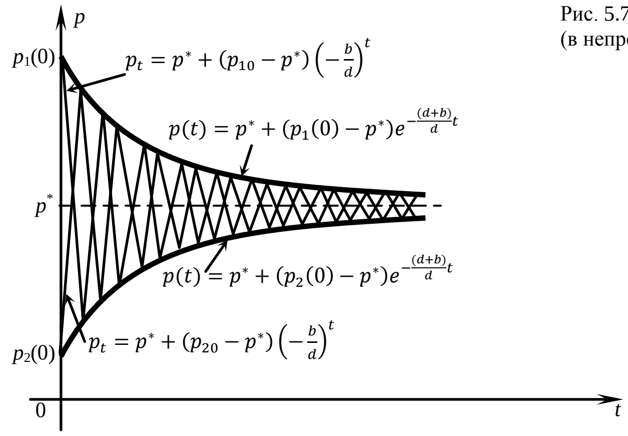


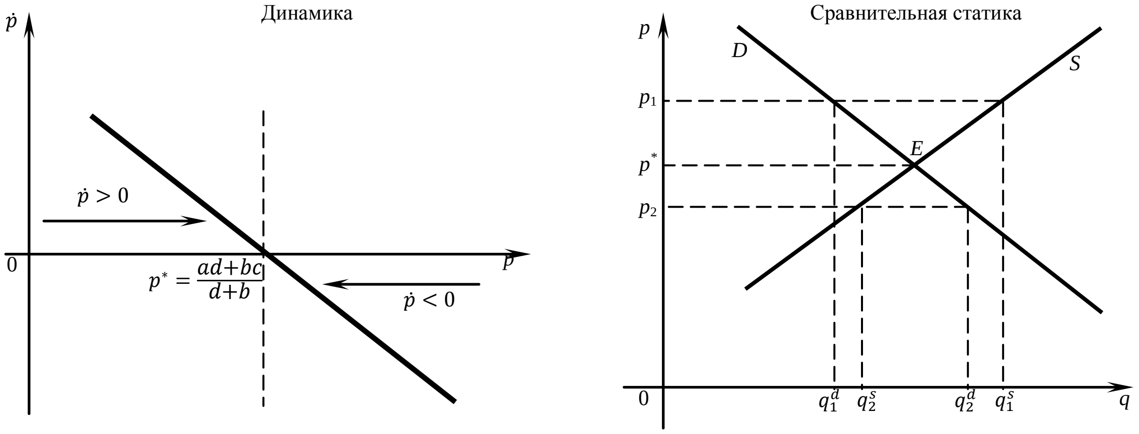
Рис. 5.7. Устойчивая рыночная динамика (в непрерывном и дискретном времени)

Траектория динамики рыночной цены в дискретном времени (5.12) служит аппроксимацией непрерывного случая (5.15), ведь $e^{-\frac{(d+b)}{d}t}\approx\left(1-\frac{d+b}{d}\right)^t=\left(-\frac{b}{d}\right)^t$.

Устойчивую динамику рыночной цены в непрерывном времени можно проиллюстрировать и по-другому. Если преобразовать уравнение (5.14): $\dot{p}=\frac{d+b}{d}\left(\frac{ad+bc}{d+b}-p\right)$, то поскольку $\frac{d+b}{d}>0$, постольку очевидно, что в случае $p(t)>\frac{ad+bc}{d+b}$ цена с течением времени снижается ($\dot{p}<0$) в направлении равновесного уровня (5.7). Если же $p(t)<\frac{ad+bc}{d+b}$, то цена увеличивается ($\dot{p}>0$) до равновесного значения (5.7). Таким образом, равновесие в модели устойчиво (рис. 5.8) при любых значениях коэффициентов спроса и предложения.

[3] Ведь $\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{(d+b)}{d}t}=0$, поскольку $\frac{d+b}{d}>0$.

Рис. 5.8. Устойчивость рыночного равновесия по Вальрасу



Проанализированная выше паутинообразная модель иллюстрирует тот факт, что при отрицательном наклоне кривой спроса и положительном наклоне кривой предложения рыночное равновесие будет устойчивым по Вальрасу, когда цена p рассматривается в качестве независимой переменной, а объем сделок q – зависимой.

Действительно, пусть $p_1 > p^*$. Тогда $q_1^s > q_1^d$. Следовательно, p снижается, приближаясь к уровню p^*. Допустим, что $p_2 < p^*$. Тогда $q_2^s > q_2^d$. Следовательно, p повышается, возвращаясь к уровню p^*. Итак, равновесие устойчиво (рис. 5.8).

В рамках паутинообразной модели, итерационное взаимодействие между спросом и предложением можно представить альтернативным образом. Спрос запишем в таком же виде, как и ранее (5.9), а запаздывание в предложении представим следующим образом: $q_{t+1} = \frac{p_t}{d} - \frac{c}{d}$, или $p_t = c + dq_{t+1}$.

Условие рыночного равновесия представим как равенство цен спроса и предложения для каждого периода: $p_t^s = p_t^d$, т.е.

$$q_{t+1} = \frac{a-c}{d} - \frac{b}{d}q_t.$$

Тогда отклонение величины предложения в будущем от текущего объема спроса составит:

$$q_{t+1} - q_t = \frac{a-c}{d} - \frac{(d+b)}{d}q_t,$$

или при произвольном временно́м интервале:

$$\frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \frac{a-c}{d} - \frac{(d+b)}{d}q(t).$$

Устремляя шаг времени к нулю:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{a-c}{d} - \frac{(d+b)}{d}q(t)\right),$$

получаем уравнение в дифференциалах

$$dq + \frac{(d+b)}{d}qdt = \frac{(a-c)}{d}dt.$$

Выделим в левой части последнего равенства полный дифференциал. Для этого домножим его левую и правую части на интегрирующий множитель $e^{\int \frac{(d+b)}{d}dt} = e^{\frac{(d+b)}{d}t} \neq 0$:

$$e^{\frac{(d+b)}{d}t}dq + qde^{\frac{(d+b)}{d}t} = \left(\frac{a-c}{b+d}\right)de^{\frac{(d+b)}{d}t}.$$

Интегрируя

$$\int d\left(qe^{\frac{(d+b)}{d}t}\right) = \frac{a-c}{b+d}\int de^{\frac{(d+b)}{d}t} + C,$$

получаем:

$$qe^{\frac{(d+b)}{d}t} = \left(\frac{a-c}{b+d}\right)e^{\frac{(d+b)}{d}t} + C,$$

т.е.

$$q(t) = \frac{a-c}{b+d} + Ce^{-\frac{(d+b)}{d}t}.$$

Используя начальное условие: $q(0) = \frac{a-c}{b+d} + C$, определяем константу $C = q(0) - q^*$. Окончательно имеем:

$$q(t) = q^* + (q(0) - q^*)e^{-\frac{(d+b)}{b}t},$$

где q^* – это равновесный объем продаж (5.8), к которому будет стремиться объем сделок с течением времени:

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \frac{a-c}{b+d}.$$

Таким образом, при стандартной форме графиков спроса и предложения равновесие будет устойчивым по Маршаллу, когда q предполагается независимой переменной, а p – зависимой, так же, как и равновесие по Вальрасу. Действительно, пусть, $q_1 < q^*$. Тогда $p_1^d > p_1^s$. Следовательно, q возрастает, стремясь к q^*. Допустим, что $q_2 > q^*$. В этом случае $p_2^s > p_2^d$. Поэтому q снижается до уровня q^*. Итак, равновесие устойчиво (рис. 5.9).

Рис. 5.9. Устойчивость рыночного равновесия по Маршаллу

Сравнительная статика   Динамика