4.8. Оптимальное управление максимизацией прибыли

Пусть $q(t)$ – объем выпуска продукции предприятием в момент времени t. Предприятие работает в условиях совершенной конкуренции, причем цена на продукт $\bar{p} = const$ не меняется во времени. Предположим, что в каждый, данный момент времени инвестируется определенная доля $u(t)$ выручки предприятия $TR(t) = \bar{p} \cdot q(t)$: $I(t) = u(t) \cdot TR(t) = u(t)\bar{p}q(t)$. Допустим, что в соответствии с механизмом акселератора выручка растет пропорционально инвестициям $I(t)$ с постоянным коэффициентом акселерации α. Итак, $\frac{dTR(t)}{dt} = \bar{p}\frac{dq(t)}{dt} = \alpha I(t) = \alpha u(t)TR(t) = \alpha u(t)\bar{p}q(t)$, т.е. $\frac{dq(t)}{dt} = \alpha u(t)q(t)$. Пусть эксплуатационные (операционные) расходы фирмы $C(t)$ так же пропорциональны выручке, и стационарный во времени коэффициент пропорциональности равен β: $C(t) = \beta TR(t) = \beta\bar{p}q(t)$. Изначально (при $t = 0$) в распоряжении предприятия находятся запасы продукции в размере $q(0) = q_0$.

Прибыль в момент времени t составит: $PR(t) = TR(t) - I(t) - C(t) = \bar{p}q(t)(1 - \beta - u(t))$. Задача заключается в том, чтобы выбрать такую стратегию инвестиций, т.е. так распределить их коэффициент $u(t)$ во времени, чтобы к моменту T совокупная прибыль, полученная предприятием, была максимальной[1]:

$$\max \int_0^T \bar{p}q(t)\big(1 - \beta - u(t)\big)e^{-it}dt = \min \int_0^T \bar{p}q(t)(u(t) - 1 + \beta)e^{-it}dt:$$

$$\dot{q} = \alpha uq; 0 \leqslant u \leqslant 1 - \beta; q(0) = q_0.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^T (\lambda_0\bar{p}q(t)(u(t) - 1 + \beta)e^{-it} + p(t)(\dot{q}(t) - \alpha u(t)q(t)))dt + \lambda_1(q(0) - q_0).$$

Необходимые условия оптимума включают в себя:

а) уравнение Эйлера для лагранжиана $\mathfrak{L} = \lambda_0\bar{p}q(t)(u(t) - 1 + \beta)e^{-it} + p(t)(\dot{q}(t) - \alpha u(t)q(t))$:

$$-\dot{p} + \lambda_0\bar{p}(u(t) - 1 + \beta)e^{-it} - \alpha u(t)p(t) = 0;$$

б) оптимальность по u:

$$\min_{0 \leqslant u \leqslant 1-\beta}(\lambda_0\bar{p}u(t)q(t)e^{-it} - \alpha u(t)p(t)q(t)) = \min_{0 \leqslant u \leqslant 1-\beta} u(t)q(t)\left(\lambda_0\bar{p}e^{-it} - \alpha p(t)\right);$$

в) трансверсальность по q для терминанта $l = \lambda_1(q(0) - q_0)$:

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}}(0) = p(0) = \frac{\partial l}{\partial q(0)} = \lambda_1, \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}}(T) = p(T) = -\frac{\partial l}{\partial q(T)} = 0;$$

г) неотрицательность множителя Лагранжа: $\lambda_0 \geqslant 0$.

Покажем, что множитель Лагранжа λ_0 не может быть нулевым, рассуждая от противного. Предположим, что $\lambda_0 = 0$. Тогда в соответствии с уравнением Эйлера $\dot{p} = -\alpha u(t)p(t)$. Из условия оптимальности по u следует, что при $p(t) < 0$ $u = 0$, а значит, $\dot{p} = 0$, т.е. $p = const = p(T) = 0 = p(0) = \lambda_1$. Таким образом, в любом случае при $\lambda_0 = 0$ вектор множителей Лагранжа оказывается нулевым, что исключается необходимым условием оптимальности. Аналогично получаем, что при $p(t) > 0$ $u = 1 - \beta$, а значит, $\dot{p} = \alpha(\beta - 1)p$. Следовательно, $p(t) = c_1e^{\alpha(\beta-1)t} = p(0)e^{\alpha(\beta-1)t} = \lambda_1e^{\alpha(\beta-1)t}$, в частности, $p(T) = \lambda_1e^{\alpha(\beta-1)T} = 0$, т.е. $\lambda_1 = 0$. Наконец, при $p(t) = 0$ опять же $\lambda_1 = 0$. Таким образом, снова получаем нулевой вектор множителей Лагранжа, который исключается по необходимому условию оптимальности.

---

[1] Ср.: Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. – М.: Факториал, 2006.

Итак, $\lambda_0 \neq 0$, и без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$. Тогда уравнение Эйлера принимает вид:

$$\dot{p} = \bar{p}(u(t) - 1 + \beta)e^{-it} - \alpha u(t)p(t) = u(t)\left(\bar{p}e^{-it} - \alpha p(t)\right) + \bar{p}(\beta - 1)e^{-it}.$$

Условие оптимальности по u будет выглядеть так:

$$\min_{0 \leqslant u \leqslant 1-\beta} u(t)q(t)\left(\bar{p}e^{-it} - \alpha p(t)\right).$$

Из данного условия вытекает, что $u = 1 - \beta$ при $\bar{p}e^{-it} - \alpha p(t) < 0$ и $u = 0$ при $\bar{p}e^{-it} - \alpha p(t) > 0$, следовательно, оптимальной является стратегия либо инвестирования всей прибыли, либо ее «фиксации» при полном отказе от инвестиций. Найдем точку переключения между данными стратегиями $t = \tau$, когда:

$$\bar{p}e^{-it} - \alpha p(t) = 0. \tag{4.52}$$

До момента переключения нужно инвестировать всю прибыль, а после него – ее фиксировать; ведь при обратном порядке стратегий было бы выгодно не инвестировать вовсе, поскольку инвестиции, аннулирующие прибыль, никогда не смогут окупиться.

Существуют две возможности: $\tau = 0$ либо $\tau > 0$. Рассмотрим наиболее интересный второй случай. В точке переключения (4.52) уравнение Эйлера принимает вид: $\frac{dp}{d\tau} = \bar{p}(\beta - 1)e^{-i\tau}$. Решаем его, разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение: $p(\tau) = \int dp = \int \bar{p}(\beta - 1)e^{-i\tau}d\tau + c_1 = \frac{\bar{p}(1-\beta)}{i}\int de^{-i\tau} + c_1 = \frac{\bar{p}(1-\beta)}{i}e^{-i\tau} + c_1$. Используя здесь условие трансверсальности $p(T) = \frac{\bar{p}(1-\beta)}{i}e^{-iT} + c_1 = 0$, находим значение константы $c_1 = \frac{\bar{p}(\beta-1)}{i}e^{-iT}$. Таким образом, $p(\tau) = \frac{\bar{p}(1-\beta)}{i}e^{-i\tau}(1 - e^{i(\tau-T)})$, откуда с учетом условия (4.52), т.е. при $p(\tau) = \frac{\bar{p}}{\alpha}e^{-i\tau}$ находим сам момент переключения:

$$\tau = T + \frac{1}{i}\ln\frac{\alpha(1-\beta) - i}{\alpha(1-\beta)}.$$

Данный момент переключения $\tau > 0$ существует при $1 - \frac{i}{\alpha(1-\beta)} > e^{-iT}$. В таком случае до этого момента следует реинвестировать всю прибыль, а потом – всю прибыль потреблять. В противоположном же случае, при $1 - \frac{i}{\alpha(1-\beta)} > e^{-iT}$, когда $T < -\frac{1}{i}\ln\left[1 - \frac{i}{\alpha(1-\beta)}\right]$, сразу нужно потреблять всю получаемую прибыль.