4.7. Динамическая максимизация прибыли и накопление капитала

Рассмотрим процедуру динамической максимизации прибыли[1] сначала в дискретном времени. При предположении, что каждый год изнашивается определенная доля (δ) существующих основных фондов, выражение валовых инвестиций как сумма чистых инвестиций (4.39), т.е. чистого прироста запаса капитала, и его амортизации будет таким:

$$I_t^g = K_{t+1} - K_t + \delta K_t, \tag{4.45}$$

Динамическая функция прибыли при дискретном ходе времени с учетом технологии производства $q_t = f(K_t, L_t)$ будет иметь вид:

$$PR_t(K_t, L_t) = p_t f(K_t, L_t) - p_{Lt}L_t - p_{Kt}(K_{t+1} - (1-\delta)K_t).$$

Целью деятельности фирмы является максимизация суммарных дисконтированных чистых доходов (*NPV*) – приведенного к начальному моменту времени потока прибыли. При предположении о том, что предприятие будет функционировать бесконечно долго, его оптимизационная задача будет выглядеть так[2]:

$$\max_{K_t, L_t} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{PR_t}{(1+i)^t} = \max_{K_t, L_t} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(p_t f(K_t, L_t) - p_{Lt}L_t - p_{Kt}(K_{t+1} - (1-\delta)K_t)\right)}{(1+i)^t}. \tag{III.$a.d$}$$

Необходимые условия максимума прибыли в дискретном времени будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{p_t \dfrac{\partial f(K_t, L_t)}{\partial K_t} + p_{Kt}(1-\delta)}{(1+i)^t} - \dfrac{p_{K,t-1}}{(1+i)^{t-1}} = 0, t = 1,2, \dots \\ p_t \dfrac{\partial f(K_t, L_t)}{\partial L_t} - p_{Lt} = 0, t = 0,1, \dots; \end{cases}$$

или:

$$(4.46) \qquad \begin{cases} p_t MP_{Kt} + p_{Kt}(1-\delta) = (1+i)p_{K,t-1}, t = 1, 2, \dots & (4.46.1) \\ p_t MP_{Lt} = p_{Lt}, t = 0,1, \dots & (4.46.2) \end{cases}$$

Равенство (4.46.1) утверждает, что вложения в финансовые и материальные активы должны обладать одинаковой доходностью. При этом доход от размещения денежной суммы на финансовом рынке выступает в качестве альтернативных издержек производственному применению данного капитала. Цена материальных активов через год прирастает на величину предельной доходности капитала $R_t \equiv p_t MP_{Kt}$, но уменьшается по мере износа основных фондов. Стоимость вложений в финансовые активы за год увеличивается за счет процентных начислений.

[1] Sandmo A. Investment and the rate of interest // Journal of political economy. 1971. Vol. 79. № 6.

[2] В данной постановке задачи предполагается, что номинальная ставка процента i на финансовом рынке постоянна на протяжении всего срока службы капитала.

В стационарном состоянии, когда $p_{Kt} = p_{K,t-1} = p_K$, $p_t = p = const$, необходимое условие максимизации прибыли (4.46.1) задаст выражение рентной цены капитала[3]:

$$p_K = \frac{p \cdot MP_t}{r + \delta}, \tag{4.47}$$

поскольку номинальная (i) и реальная (r) ставки процента будут совпадать.

Тогда необходимые условия максимизации прибыли фирмы (4.46.1) – (4.46.2) принимают вид:

$$(4.48) \quad \begin{cases} MP_K = \dfrac{p_K}{p}(r + \delta), & (4.48.1) \\ MP_L = \dfrac{p_L}{p}. & (4.48.2) \end{cases}$$

Данные соотношения можно рассматривать в качестве обобщения статичных условий максимизации прибыли на рынках факторов производства (4.24).

Перепишем неоклассическую формулу оптимального запаса капитала (4.48.1) в следующем виде: $\frac{p \cdot MP_K - p_K\delta}{p_K r} = 1$. Дж. Тобин предложил использовать в качестве индикатора инвестиционной привлекательности предприятия левую часть данного равенства:

$$q_T = \frac{p \cdot MP_K - p_K\delta}{p_K r}.$$

Коэффициент Тобина представляет собой оценку предельной прибыльности предприятия с точки зрения инвестирования в него средств.

Действительно, если $q_T > 1$, то $p \cdot MP_K - p_K\delta > p_K r$, и $\frac{PR}{\partial K} > 0$, а значит, при увеличении запаса капитала прибыль будет повышаться. Следовательно, имеющаяся величина основного капитала ниже оптимального $(K < K^*)$, и требуются инвестиции в развитие данной компании.

Если $q_T < 1$, то, наоборот, $p \cdot MP_K - p_K\delta < p_K r$, $\frac{\partial PR}{\partial K} < 0$, и при снижении запаса капитала прибыль будет расти. Следовательно, фактический запас капитала превышает оптимальный $(K > K^*)$. В данной ситуации индикатор свидетельствует о необходимости перехода к более низкому уровню капитала. Следует сократить инвестиции – в перспективе будет ожидаться суженное воспроизводство капитала предприятия.

В случае $q_T = 1$, $p \cdot MP_K - p_K\delta = p_K r$, т.е. $\frac{\partial PR}{\partial K} = 0$, и достигается оптимум $(K = K^*)$; другими словами, ситуация на предприятии не нуждается в корректировке.

Величина $(p \cdot MP_K - p_K\delta)/r$ с учетом формулы пожизненного аннуитета (vii.b) может рассматриваться как оценка капитализированной предельной прибыльности компании (до выплаты процентов), т.е. капитализированной доходности дополнительных денежных средств, инвестированных в предприятие[4].

---

[3] При $\delta = 0$ выражение для рентной цены капитала (4.47) дает стоимость пожизненного аннуитета, или перпетуитета, т.е. актива, пожизнено приносящего ежегодную ренту, величина которой составляет $R \equiv p \cdot MP_K$:

$$P_{\text{перп}} = \frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \dots + \frac{R}{(1+r)^t} + \dots = \frac{R}{r}. \tag{vii.b}$$

[4] Если предположить, что предельная прибыльность (до выплаты процентов) $\frac{\partial(PR + rK)}{\partial K} = p \cdot MP_K - p_K\delta$ совпадает с аналогичной средней величиной $(PR + rK)/K$, то, считая дисконтированную сумму по-

Перейдем к анализу накопления капитала в непрерывном времени. При этом функцию прибыли можно записать в следующем виде:

$$PR(t) = p(t)q(t) - p_L(t)L(t) - p_K(t)I_g(t),$$

где объем производства характеризуется производственной функцией $q(t) = f(K(t), L(t))$, а валовые инвестиции представляют собой чистый прирост запаса капитала (4.32) и возмещение его выбытия:

$$I_g(t) = \dot{K}(t) + \delta K(t). \qquad (4.49)$$

Максимизация дисконтированного потока прибыли, т.е. чистой приведенной стоимости предприятия как бизнес-проекта в непрерывном времени (*NPV*), при постоянной на всем временном интервале ставке процента, будет выглядеть так:

$$\max_{K(t),L(t)} \int_0^{\infty} PR\big(K(t), L(t)\big)e^{-it}dt =$$

$$= \max_{K(t),L(t)} \int_0^{\infty} \Big(p(t)f(K(t), L(t)) - p_L(t)L(t) - p_K(t)\big(\dot{K}(t) + \delta K(t)\big)\Big) e^{-it}dt. \qquad (\text{III}.a.c)$$

Уравнения Эйлера по затратам капитала $K(t)$ и труда $L(t)$ для данной задачи вариационного исчисления будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\big(p_K(t)e^{-it}\big) + p(t)MP_K(t)e^{-it} - p_K(t)\delta e^{-it} = 0, \\ p(t)MP_L(t)e^{-it} - p_L(t)e^{-it} = 0; \end{cases}$$

или:

$$(4.50) \qquad \begin{cases} p(t)MP_K(t) + \dot{p}_K(t) = p_K(t)(i + \delta), & (4.50.1) \\ p(t)MP_L(t) = p_L(t). & (4.50.2) \end{cases}$$

Если цена капитальных активов изменяется темпом равным уровню инфляции $\left(\frac{\dot{p}_K}{p_K} = \pi\right)$, то в силу уравнения Фишера $(r = i - \pi)$ условие оптимальности по капиталу (4.50.1) дает выражение рентной цены капитала (4.47) в непрерывном времени, а сама система (4.50) приобретает вид, аналогичный (4.48):

$$\begin{cases} MP_K(t) = \dfrac{p_K(t)}{p(t)}(r + \delta), \\ MP_L(t) = \dfrac{p_L(t)}{p(t)}. \end{cases}$$

В случае переменной ставки процента при максимизации дисконтированного потока чистых доходов предприятия необходимо использовать ее среднее значение (3.32):

$$\max_{K(t),L(t)} \int_0^{\infty} PR(K(t), L(t))e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}dt =$$

$$= \max_{K(t),L(t)} \int_0^{\infty} \Big(p(t)f(K(t), L(t)) - p_L(t)L(t) - p_K(t)\big(\dot{K}(t) + \delta K(t)\big)\Big) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}dt.$$

тока доходов реальных активов предприятия его капитализированным дивидендом, коэффициент Тобина можно трактовать как отношение рыночной стоимости компании, ($P_{\text{ф}}$), к восстановительной стоимости капитала предприятия ($p_K K$): $q_T = \frac{P_{\text{ф}}}{p_K K}$. Одновременно данный показатель может рассматриваться как курс акций компании на фондовом рынке, т.е. рыночная цена акции ($P_{\text{рын}}$), отнесенная к ее номиналу ($P_{\text{ном}}$): $q_T = \frac{P_{\text{рын}}}{P_{\text{ном}}}$.

Тогда уравнения Эйлера принимают вид:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(p_K(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}\right)+p(t)MP_K(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}-p_K(t)\delta e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}=0,\\ p(t)MP_L(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}-p_L(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}=0.\end{cases}$$

Распишем первое из них:

$$\dot{p}_K(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}-i(t)p_K(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}+p(t)MP_K(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}-p_K(t)\delta e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}=0.$$

Итак, при переменной ставке процента получаем ту же систему необходимых условий экстремума, что и при постоянной ставке (4.50), которая представляет собой очевидное обобщение статичных условий оптимизации (4.24).

Решение дифференциального уравнения (4.50.1) позволяет получить выражение стоимости капитального актива, являющееся обобщением формулы (3.33). Для того чтобы показать это, решим вначале соответствующее однородное уравнение: $\frac{dp_K(t)}{dt}-p_K(t)(i(t)+\delta)=0$. Разделяя переменные $\frac{dp_K}{p_K}=d\ln|p_K|=(i+\delta)dt$, интегрируя $\int d\ln|p_K|=\delta\int dt+\int i(t)dt+\ln c$ и потенцируя полученное равенство, получаем общее решение данного однородного уравнения: $p_K(t)=ce^{\left(\frac{\int_0^t i(\tau)d\tau}{t}+\delta\right)t}=ce^{(\bar{i}+\delta)t}$. Варьируя постоянную $p_K(t)=c(t)e^{\int_0^t i(\tau)d\tau+\delta t}$ и используя это равенство в неоднородном уравнении (4.50.1):

$$(i(t)+\delta)c(t)e^{\int_0^t i(\tau)d\tau+\delta t}-\frac{dc(t)}{dt}e^{\int_0^t i(\tau)d\tau+\delta t}-(i(t)+\delta)c(t)e^{\int_0^t i(\tau)d\tau+\delta t}=$$
$$=p(t)MP_K(t)\equiv R(t),$$

получаем дифференциальное уравнение относительно $c(t)$: $dc(t)=R(t)e^{-(\bar{i}+\delta)t}dt$. Интегрируя его и подставляя искомый множитель $c(t)=-\int_K^t R(\tau)e^{-(\bar{i}+)\tau}d\tau$ в общее решение однородного уравнения, получаем обобщение формулы стоимости актива (3.33) применительно к ситуации ненулевой нормы амортизации[5]:

$$p_K(t)=e^{(\bar{i}+\delta)t}\int_t^K R(\tau)e^{-(\bar{i}+\delta)\tau}d\tau=\int_t^K R(\tau)e^{-(\bar{i}+\delta)(\tau-t)}d\tau. \qquad (4.51)$$

---

[5] В качестве следствия условия оптимума по капиталу (4.50.1) может рассматриваться условие К. Викселя, определяющее оптимальное время реализации некоторого актива, не приносящего рентного дохода ($R(t)\equiv p(t)MP_K(t)=0$) и не подверженного износу ($\delta=0$). Дисконтированная стоимость актива будет зависеть от того, когда начнется его коммерческое применение. Дисконтированная стоимость актива на исходный момент принятия решения о его перспективах t_0 составит: $p_K(t_0)=p_K(t)e^{-i(t-t_0)}$. Будем искать такой момент t, при котором $p_K(t_0)$ будет максимальной. Для этого рассчитаем производную $p_K(t_0)$ по t и приравняем ее нулю: $e^{-i(t-t_0)}\left(\frac{dp_K(t)}{dt}-ip_K(t)\right)=0$. Отсюда получаем условие Викселя эффективных инвестиций в актив: $\frac{\dot{p}_K}{p_K}=i$. Реализация актива становится выгодной, когда темп прироста его стоимости, который Дж.Р. Хикс трактует как относительную предельную отдачу от (оправдавшихся) ожиданий [Хикс Дж.Р. Стоимость и капитал. – М.: Прогресс-Универс, 1993], оказывается равным рыночной ставке процента. По-другому это условие можно сформулировать так: предельные альтернативные издержки вложения средств в проект, которые представляют собой ставку процента, должны сравняться с предельной доходностью инвестирования в виде темпа прироста стоимости актива.