4.6. Инвестиции и модель акселератора

Инвестиции в реальном выражении как категория потока материальных ресурсов длительного пользования представляют собой приращение запаса капитала за единицу времени:

$$I(t) = \frac{dK(t)}{dt}. \tag{4.32}$$

Базовая модель акселерации инвестициями выпуска предполагает пропорциональность между запасом капитала и объемом производства:

$$K = BY, \tag{4.33}$$

где $B = const$ – коэффициент фондоемкости.

Очевидно, что при этом средний и предельный продукт капитала, или средняя и предельная фондоотдача, так же являются постоянными величинами:

$$\frac{Y}{K} = \frac{dY}{dK} = \frac{1}{B}.$$

Объединяя соотношения (4.32) и (4.33), получаем, что инвестиции так же оказываются пропорциональными выпуску продукции:

$$I(t) = \frac{dK(Y(t))}{dt} = \frac{dK}{dY}\frac{dY}{dt} = B\frac{dY}{dt}. \tag{4.34}$$

В данной инвестиционной функции заложен эффект акселератора, поскольку изменение объема инвестиций в положительную или отрицательную сторону означает ускорение соответственно роста или падения ВВП:

$$\dot{I} = B\ddot{Y}.$$

Очевидной предпосылкой в моделях инвестиций служит наличие некоторого первоначального запаса капитала:

$$K(0) = K_0. \tag{4.35}$$

Модель гибкого акселератора Койка в непрерывном времени описывается линейным дифференциальным уравнением (рис. 4.15):

$$I(t) = \frac{dK(t)}{dt} = \lambda(K^* - K). \tag{4.36}$$

Это так называемая система с запаздыванием. В ней скорость изменения переменной зависит от ее отставания по отношению к своему оптимальному значению[1]. Здесь λ – это коэффициент ускорения, или акселерации:

$$\dot{I} = \frac{d^2K}{dt^2} = -\lambda.$$

Традиционно в силу очевидных экономических соображений полагается $0 < \lambda \leqslant 1$.

Разделяем переменные в (4.36): $\frac{dK}{K^*-K} = \lambda dt$

и интегрируем: $\ln|K^* - K| = -\lambda t + \ln c$.

Потенцируем полученное выражение и снимаем модуль адекватным подбором константы (допуская отрицательные и нулевые значения): $K(t) = K^* - ce^{-\lambda t}$.

Константу интегрирования определяем по запасу капитала в начальный момент времени: $c = K^* - K(0)$.

В итоге траектория динамики запаса капитала такова (рис. 4.16):

$$K(t) = (K(0) - K^*)e^{-\lambda t} + K^*. \tag{4.37}$$

---

[1] Кобринский Н.Е., Майминас Е.З., Смирнов А.Д. Введение в экономическую кибернетику. – М.: Экономика, 1975.

Подставляя полученное выражение текущего запаса капитала (4.37) в модель гибкого акселератора (4.36), можно получить траекторию динамики инвестиций во времени:

$$I(t) = \lambda(K^* - K(0))e^{-\lambda t}. \tag{4.38}$$

Рис. 4.15. Динамика инвестиций в зависимости от запаса капитала

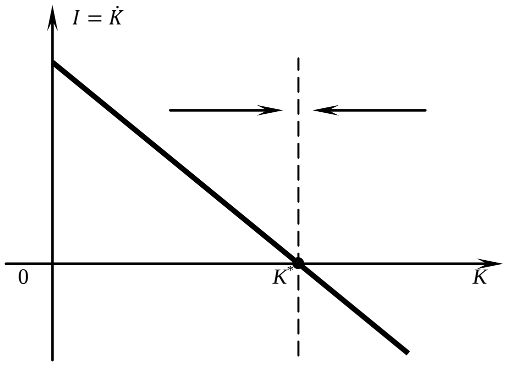
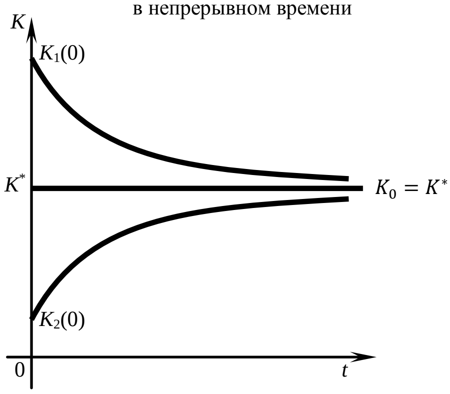


Рис. 4.16. Траектории динамики запаса капитала в непрерывном времени



В дискретном времени запас капитала в каждый последующий период равен его величине в предыдущей момент, увеличенной на чистые инвестиции текущего периода:

$$K_{t+1} = K_t + I_t.$$

Соответственно, чистые инвестиции текущего периода представляют собой разность будущего и текущего запасов капитала:

$$I_t = K_{t+1} - K_t. \tag{4.39}$$

При этом модель гибкого акселератора описывается конечно-разностным уравнением:

$$K_{t+1} - K_t = \lambda(K^* - K_t), \tag{4.40}$$

или:

$$K_{t+1} - (1-\lambda)K_t = \lambda K^*. \tag{4.41}$$

Как и в теории дифференциальных уравнений, общее решение неоднородного линейного разностного уравнения первого порядка представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Поэтому вначале решим соответствующее однородное уравнение:

$$K_{t+1} - (1-\lambda)K_t = 0. \tag{4.42}$$

Распишем это соотношение между запасами капитала соседних моментов времени для всех периодов, начиная с нулевого и кончая моментом t:

$$K_1 = (1-\lambda)K_0,\ K_2 = (1-\lambda)K_1,\ \dots,\ K_{t+1} = (1-\lambda)K_t.$$

Перемножая почленно данные равенства, после сокращения на произведение $K_0 K_1 \cdots K_{t-1}$ получим искомое решение однородного уравнения: $K_t = K_0(1-\lambda)^t$.

Аналогично решению линейных неоднородных дифференциальных уравнений будем воспользуемся методом вариации постоянной:

$$K_t = c_t(1-\lambda)^t. \tag{4.43}$$

Подставляем это соотношение в исходное неоднородное уравнение (4.41):

$$c_{t+1} - c_t = \frac{\lambda K^*}{(1-\lambda)^{t+1}}.$$

Суммируя $(c_{\tau+1} - c_\tau)$ в пределах от $\tau = 0$ до $\tau = t - 1$, получаем:

$$c_t = \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{\lambda K^*}{(1-\lambda)^\tau} + c_0 = K^*\left(\frac{1}{(1-\lambda)^t} + \lambda - 1\right) + c_0.$$

Подставляя полученную таким образом неизвестную величину c_t в общее решение (4.43) однородного уравнения (4.42), получаем общее решение неоднородного уравнения (4.41): $K_t = K^*(1-(1-\lambda)^{t+1}) + c_0(1-\lambda)^t$. Определим константу по начальному условию (4.35): $c_0 = K_0 - \lambda K^*$. Итак, зависимость объема основных фондов в произвольный момент t от исходного запаса капитала и его оптимального значения имеет вид:

$$K_t = K^* + (K_0 - K^*)(1-\lambda)^t. \quad (4.44)$$

Таким образом, траектория динамики инвестиций в дискретном времени будет следующей:

$$I_t = (K_0 - K^*)(1-\lambda)^{t-1}\lambda.$$