4.3. Максимизация прибыли и предложение продукции конкурентной фирмой

В современной экономической теории часто принимается предпосылка о том, что целью деятельности фирмы является максимизация прибыли, задаваемой как разность между общим доходом ($TR = pq$, где p – цена готовой продукции) и общими издержками: $PR = TR - TC$. В дальнейшем, анализируя предприятие в долгосрочном аспекте, будем исходить из того, что прибыль является неотрицательной величиной: $PR \geqslant 0$, ведь в противном случае фирма всегда сможет выйти из бизнеса, избежав тем самым убытков. Задача максимизации прибыли может решаться с применением процедур как одношаговой (рис. 4.5):

$$\max_{K,L} PR = \max_{K,L}\{pq - p_K K - p_L L\}, \qquad (\text{III}.1)$$

где K, L и $q = f(K, L)$ – соответственно затраты факторов и объем выпускаемой продукции как значение производственной функции, характеризующей технологические процессы на предприятии; – так и двухшаговой оптимизации.

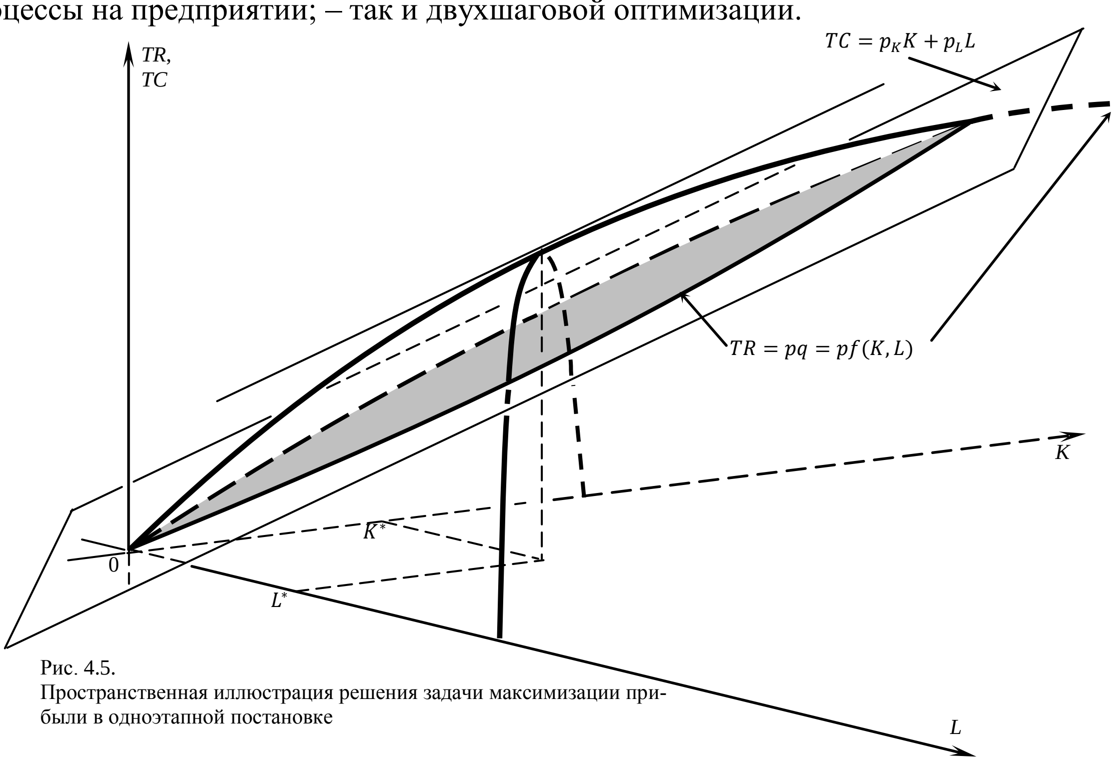


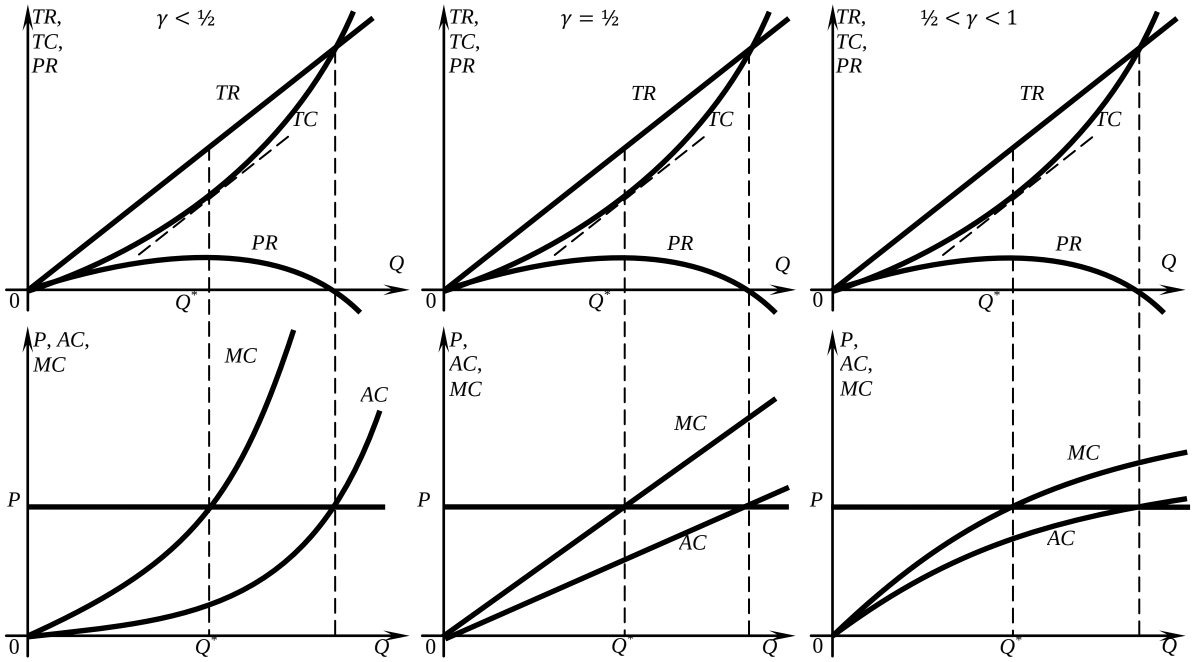
Рис. 4.5.
Пространственная иллюстрация решения задачи максимизации прибыли в одноэтапной постановке

При двухэтапной оптимизационной схеме первый шаг оптимизационной процедуры заключается в решении задачи минимизации расходов предприятия при ограничении по мощностям (II.2) и расчете для данной технологии издержек TC как функции объема выпускаемой продукции Q (4.10). Второй шаг состоит собственно в безусловной максимизации прибыли (в положительном ортанте затрат факторов производства) как функции от объема выпускаемой продукции. Итак, с помощью двухэтапной оптимизационной схемы задачу максимизации прибыли можно представить в следующем виде (рис. 4.6, 4.10):

$$\max_{q} PR = \max_{q}\{pq - TC(q, p_K, p_L)\}:$$

$$\begin{cases} TC(q, p_K, p_L) = \min\limits_{K,L}\{p_K K + p_L L\}: \\ Q(K, L) \geqslant q;\ K \geqslant 0, L \geqslant 0. \end{cases} \qquad (\text{III}.2)$$

Рис. 4.6. Максимизация прибыли в двухэтапной трактовке при убывающей отдаче от масштаба производства($\gamma < 1$)



Задача максимизации прибыли (второй этап) состоит в выборе такой точки на траектории развития предприятия (рис. 4.10), в которой разница между выручкой и издержками будет наибольшей. Необходимое условие максимума функции прибыли – равенство нулю ее производной:

$$\frac{dPR}{dq} = p - MC(q) = 0.$$

Другими словами, при дифференцируемой функции затрат точка максимума прибыли в условиях совершенной конкуренции должна удовлетворять условию равенства предельных издержек рыночной цене на продукцию предприятия:

$$p = MC. \tag{4.17}$$

В случае двухэтапной оптимизационной схемы видно, что, поскольку процедура определения наибольшей разницы между выручкой и издержками включает в себя в качестве необходимого условия механизм минимизации денежных затрат, задача максимизации прибыли является продолжением, развитием рассмотренных выше задач условной оптимизации (I.2) и (II.2).

Достаточным условием максимизации прибыли по двухэтапной схеме будет неположительность ее второй производной, а значит, при совершенной конкуренции – неотрицательность производной предельных издержек:

$$\frac{d^2PR}{dq^2} = \frac{d}{dq}\big(p - MC(q)\big) = -\frac{dMC}{dq} \leqslant 0, \text{т. е.} \frac{dMC}{dq} \geqslant 0.$$

Другими словами, оптимальный объем производства Q^* с точки зрения максимизации прибыли для совершенно конкурентной фирмы будет соответствовать неубывающему участку предельных издержек, а значит, невозрастающей отдаче от масштаба производства (4.16) (ср. рис. 4.6 и 4.8 – 4.9).

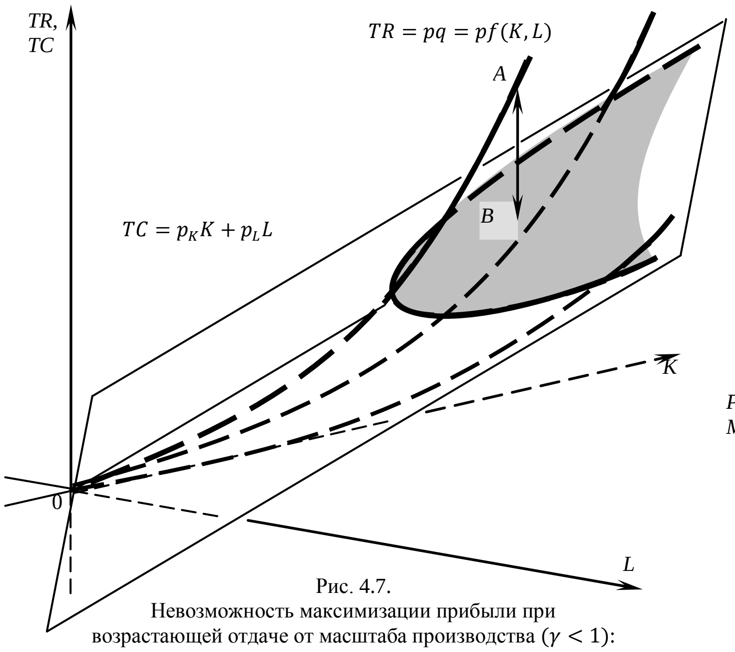


Рис. 4.7.
Невозможность максимизации прибыли при возрастающей отдаче от масштаба производства ($\gamma < 1$): одноэтапная трактовка

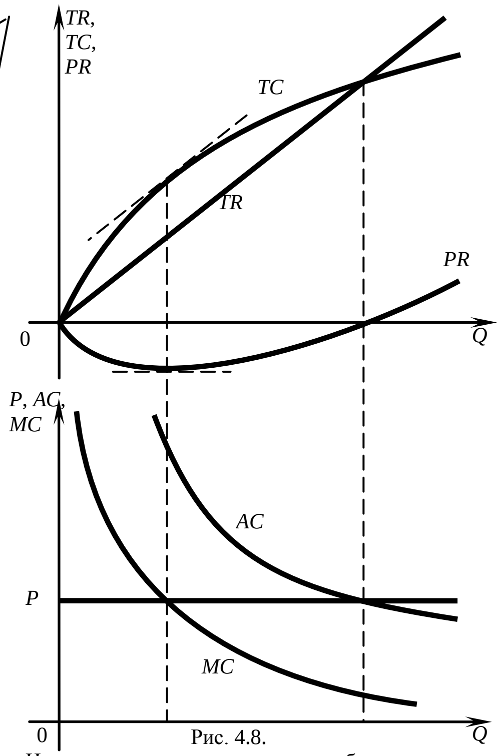
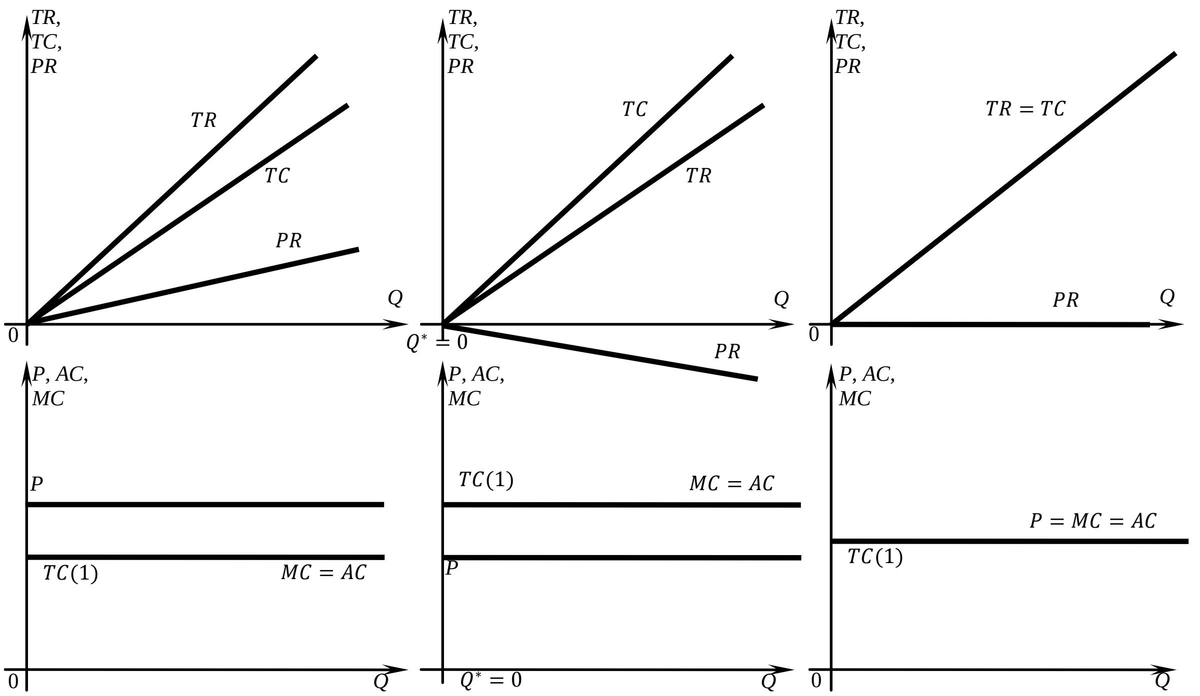


Рис. 4.8.
Невозможность максимизации прибыли при возрастающей отдаче от масштаба производства ($\gamma < 1$): двухэтапная трактовка

В условиях совершенной конкуренции задача максимизации прибыли оказывается неразрешимой при возрастающей (рис. 4.7 – 4.8) и даже, в общем случае, при постоянной отдаче от масштаба производства (рис. 4.9).

Рис. 4.9. Проблемы максимизации прибыли при постоянной отдаче от масштаба производства (двухэтапная трактовка)



Итак, убывающая отдача от масштаба производства, а значит, строгая вогнутость производственной функции (1.14) является достаточным условием максимизации прибыли в одноэтапной постановке[1].

Если производственная функция является не только непрерывной, но и строго вогнутой, то оптимальная комбинация факторов производства $\hat{x}$ является единственной.

Докажем единственность оптимальной комбинации факторов производства в задаче максимизации прибыли от противного. Пусть найдется другой, не равный полученной нами производственной комбинации $\hat{x}$ набор благ $\check{x}$, который также является решением задачи максимизации прибыли. Допустимое множество S задачи максимизации прибыли – весь неотрицательный ортант действительных чисел – является выпуклым. Поэтому весь отрезок, соединяющий точки $\hat{x}$, $\check{x}$ и состоящий из точек вида $x = \alpha\hat{x} + (1-\alpha)\check{x}$, $\alpha \in (0,1)$, содержится в S.

Поскольку производственная функция является строго вогнутой, постольку:

$$\begin{aligned} PR(x) = TR(x) - TC(x) - pQ(\alpha\hat{x} + (1-\alpha)\check{x}) - TC(\alpha\hat{x} + (1-\alpha)\check{x}) \\ = pQ(\alpha\hat{x} + (1-\alpha)\check{x}) - \alpha TC(\hat{x}) + (1-\alpha)TC(\check{x}) \\ > \alpha pQ(\hat{x}) + (1-\alpha)pQ(\check{x}) - \alpha TC(\hat{x}) + (1-\alpha)TC(\check{x}) \\ = \alpha PR(\hat{x}) + (1-\alpha)PR(\check{x}) = PR(\hat{x}) = PR(\check{x}). \end{aligned}$$

Но данное неравенство противоречит условию, гласящему, что $\hat{x}$ и $\check{x}$ – решения задачи максимизации прибыли, т.е. оптимальные производственные наборы. Полученное противоречие показывает, что гипотеза о неединственности оптимального производственного набора является ложной. Следовательно, оптимальный производственный набор $\hat{x}$ является единственным решением задачи максимизации прибыли.

Таким образом, доказав единственность оптимального производственного набора во-первых, мы показали, что локальный максимум в задаче максимизации прибыли совпадает с глобальным. Во-вторых, мы обосновали существование функции предложения продукции предприятием как зависимости между оптимальным объемом производства и ценами – на продукт и на факторы хозяйственной деятельности:

$$q^s = q^*(p, p_K, p_L). \tag{4.18}$$

Особенностью функции предложения является ее однородность нулевой степени:

$$q^*(\alpha p, \alpha p_K, \alpha p_L) = q^*(p, p_K, p_L) = q^s. \tag{4.19}$$

Действительно, увеличение всех цен в α раз означает умножение на α функции прибыли. При этом максимум видоизмененной функции прибыли будет соответствовать той же комбинации факторов производства, что и максимум исходной функции прибыли. Тем самым, решение задачи максимизации прибыли (III.1), а значит, и значение функции предложения (4.18) останется без изменения.

Пример 4.5. Функция предложения продукции при технологии Кобба–Дугласа

Используя функцию предельных издержек (П4.3.3) в необходимом условии максимизации прибыли при двухэтапной схеме (4.17), получаем функцию предложения продукции предприятием, работающим в рамках технологии Кобба–Дугласа $Q = K^\alpha L^\beta$:

$$p = \left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_L}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}. \tag{П4.5.1}$$

Данная функция будет работать при любом неотрицательном объеме производства, поскольку минимум средних издержек (П4.3.2), представляющий собой минимальный уровень цены для существования фирмы в долгосрочной перспективе, достигается в нуле.

[1] Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч.1.

Соответственно, для производственной функции $Q = K^{1/4}L^{1/2}$ предложение продукции будет следующим образом связано с уровнем рыночной цены:

$$p = \sqrt[3]{16p_K p_L^2 Q}. \tag{П4.5.2}$$

В задаче максимизации прибыли (III.a) – (III.b) наряду с эффектом замещения ([L_1L_3] на рис. 4.10), имеющим место в задаче условной минимизации издержек (II.2), присутствует еще и эффект выпуска. Он состоит в том, что при изменении, скажем, снижении цены одного из факторов производства, например, труда, тот же объем продукта, что и ранее, может быть выпущен с меньшими издержками, или, что то же самое, при прежних затратах в денежном выражении возможно изготовить больше продукции ($\bar{Q}_2$ на рис. 4.10) по сравнению с ее величиной, выступающей в качестве ограничения в задаче ($\bar{Q}_1$ на рис. 4.10). Ведь, если изокванты выпуклы к началу координат, то (минимальные) издержки производства, как значение целевой функции в задаче (II.2), являются возрастающей функцией параметра данной задачи – запланированного объема производства Q. Следовательно, в силу того, что L – нормальный ресурс, объем трудозатрат будет расти (от L_3 до L' на рис. 4.10). Таким образом, в результате снижения цены фактора производства происходит смещение вниз графика издержек (от TC_1 до TC_2 на рис. 4.10).

Опираясь на лемму Шепарда (4.11), предполагая непрерывность соответствующих вторых производных, можно увидеть, что для нормального ресурса

$$\frac{\partial MC}{\partial p_L} = \frac{\partial}{\partial p_L}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q}\right) = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{\partial TC}{\partial p_L}\right) = \frac{\partial x_L(p_L, p_K, Q)}{\partial Q} > 0.$$

Действительно, для нормального ресурса переход на более высокую изокванту за счет параллельного сдвига изокосты, при фиксированных ценах на факторы производства будет означать увеличение объема его использования. Итак, данное неравенство показывает, что при снижении ставки заработной платы величина предельных издержек сократится при каждом заданном объеме производства Q, т.е. график $MC(Q)$ сместится вниз (рис. 4.10).

Возникающее в результате, скажем, снижения цены одного из факторов производства – труда – смещение графика совокупных издержек производства означает одновременно сдвиг вниз и линии предельных издержек, что будет иметь следствием увеличение оптимального объема продукции, а значит, в свою очередь, и спроса на рабочую силу. Действительно, пусть $MC_1(Q_1^*) = P = MC_2(Q_2^*)$, где изменение функции предельных издержек от $MC_1(Q)$ к $MC_2(Q)$ происходит за счет эффекта выпуска при бесконечно малом снижении, скажем, ставки заработной платы $dw < 0$, а значит, $dMC < 0$, т.е. $MC_2(Q_1^*) < MC_1(Q_1^*)$. Пусть $MC_2(Q_1^*) = P'$. Имеем: $MC_2(Q_1^*) = P' < P = MC_1(Q_1^*)$. При переходе к более высокой цене (от $P' = MC_2(Q_1^*)$ к $P = MC_2(Q_2^*)$) происходит перемещение вдоль кривой предельных издержек: $dMC_2 > 0$. Следовательно, оптимальный объем производства в соответствии с кривой предельных издержек MC_2 возрастет, ведь, по достаточному условию, в точке максимума прибыли $\frac{dMC}{dQ} > 0$, а значит, $dQ < 0$, т.е. $Q_2^* > Q_1^*$. С увеличением оптимального объема производства растут и выручка, и издержки, и, если предположить, что L – нормальный ресурс, то рост Q, а значит, и расходов приведет к увеличению спроса на рабочую силу (от L_3 до L_2 на рис. 4.10). В отличие от прямых эффектов перекрестные эффекты замещения и выпуска для нормальных ресурсов противоположно направлены (соответственно [K_1K_3] и [K_3K_2] на рис. 4.10).

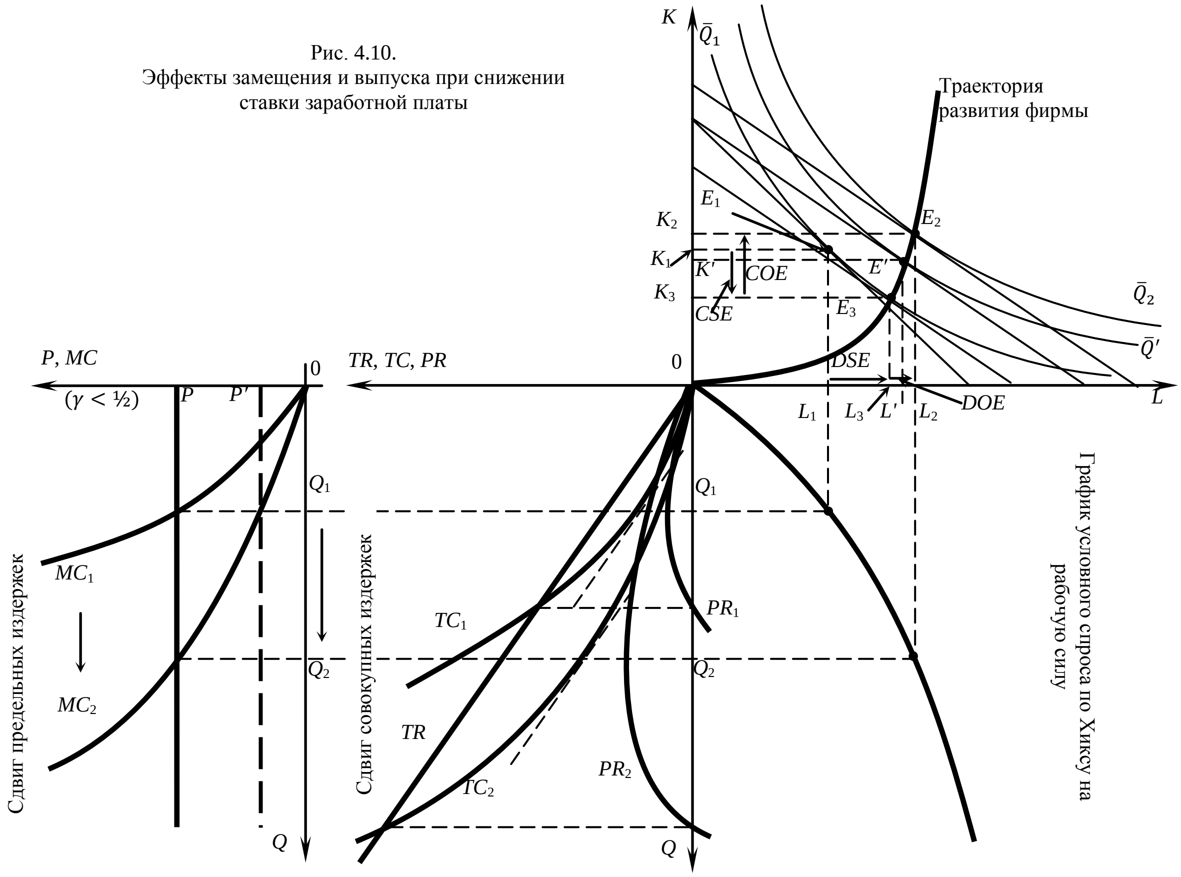


Рис. 4.10.
Эффекты замещения и выпуска при снижении ставки заработной платы

Пример 4.6. Эффекты замещения и выпуска при технологии Кобба–Дугласа

Пусть при производственной функции $Q = K^{1/4}L^{1/2}$ ставка заработной платы сокращается от $p_L^1 = 4$ до $p_L^2 = 2$, тогда как ставка арендной платы и цена готовой продукции неизменны и составляют соответственно $p_K = 1$ и $p = 5$. Тогда, в соответствии с (П4.3.5), исходная функция предельных издержек $MC_1 = \sqrt[3]{256Q}$ в результате снижения ставки заработной платы изменяется и принимает вид: $MC_2 = 4\sqrt[3]{Q}$. Используя функцию предложения (П4.5.2), получаем, что при этом максимизирующий прибыль объем производства увеличивается от $Q_1 = 16$ до $Q_2 = 64$. Функция условного спроса на труд по Хиксу (П4.1.3) показывает, что объем занятости возрастает от $L_1 = 32$ до $L_2 = 256$. Если же подставить в данную функцию исходный объем производства $Q_1 = 16$ и измененную ставку заработной платы $p_L^2 = 2$, то можно рассчитать вспомогательное количество человекочасов труда $L_3 = 32 \cdot \sqrt[3]{2} \approx 40{,}3$ (рис. 4.10), который позволяет рассчитать прямой эффект замещения, приблизительно равный 8,3. Соответственно, прямой эффект выпуска составит 215,7.

При множественности видов выпускаемой предприятием продукции его функция прибыли принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{l} p_j\left(q_j - x_j\right) = \sum_{j=1}^{l} p_j y_j, \qquad (4.20)$$

где x_j – объем используемого -го ресурса, q_j – объем производства j-го товара, $y_j = q_j - x_j^p$ – чистый выпуск j-го товара.