4.2. Минимизация издержек производства в зависимости от объема выпускаемой продукции

Симметричной, или взаимной, по отношению к задаче максимизации объема производства при ограничении по издержкам (I.2) является деятельность предприятия, ориентирующегося на минимизацию расходов при условии выхода на запланированные мощности:

$$\begin{aligned}&\min_{K,L}(p_K K + p_L L):\\ &Q(K,L) = \bar{Q}.\end{aligned} \quad (\text{II}.2)$$

Здесь, как и ранее, предполагается, что оптимум будет являться внутренним: $K > 0$, $L > 0$.

Соотношения взаимности между данными типами задач при условии равенства соответствующих технологий производства и цен на ресурсы состоит в следующем. Если рассчитать, используя решение (K^*, L^*), оптимальный объем производства Q в задаче (I.2) и рассматривать его в качестве ограничения $\bar{Q}$, то решение задачи (II.2) (K^*, L^*) совпадет с ответом в (I.2). Другими словами, если $\min_{K,L} Q(K^*, L^*) = \bar{Q}$ при условии $p_K K + p_L L \leqslant \overline{TC}$, $K \geqslant 0$, $L \geqslant 0$, то $\min_{K,L}(p_K K^* + p_L L^*) = \overline{TC}$ при выполнении ограничения: $Q(K,L) \geqslant \bar{Q}$, $K \geqslant 0$, $L \geqslant 0$. Симметричной является и двумерная иллюстрация решения задачи связанной минимизации издержек (рис. 4.4), соответствующая пространственному графику, приведенному на рис. 4.3. Кроме того, симметрия между задачами (II.1) и (II.2) отражается соотношением между соответствующими множителями Лагранжа, о чем еще пойдет речь ниже.

При достаточной гладкости технологии производства, в частности, принадлежности ее классу C^2 дважды непрерывно дифференцируемых функций, аналогично теории потребительского выбора, решение задачи условной оптимизации (II.2) можно свести к исследованию на безусловный экстремум функции Лагранжа:

$$\mathfrak{L} = p_K K + p_L L - \lambda(Q(K,L) - \bar{Q}). \quad (4.5)$$

Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее дифференциала:

$$\begin{aligned}d\mathfrak{L} &= dTC - d\big(\lambda(Q(K,L) - \bar{Q})\big) = dTC - (Q(K,L) - \bar{Q})d\lambda - \lambda dQ(K,L)\\ &= p_K dK + p_L dL - (Q(K,L) - \bar{Q})d\lambda - \lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial K}dK + \frac{\partial Q}{\partial L}dL\right)\\ &= \left(p_K - \lambda\frac{\partial Q}{\partial K}\right)dK + \left(p_L - \lambda\frac{\partial Q}{\partial L}\right)dL - (Q(K,L) - \bar{Q})d\lambda\\ &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K}dK + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial L}dL + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda}d\lambda = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Отсюда получается следующая система необходимых условий экстремума для задачи (II.2):

$$(4.7) \quad \begin{cases} p_K = \lambda\dfrac{\partial Q}{\partial K}, & (4.7.1)\\ p_L = \lambda\dfrac{\partial Q}{\partial L}, & (4.7.2)\\ Q(K,L) = \bar{Q}; & (4.7.3)\end{cases}$$

из которой, аналогично задаче условной максимизации валового выпуска (I.2), вытекает эквимаржинальный принцип (4.3), а также соотношение:

$$\frac{MP_K}{p_K} = \frac{MP_L}{p_L} = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.8)$$

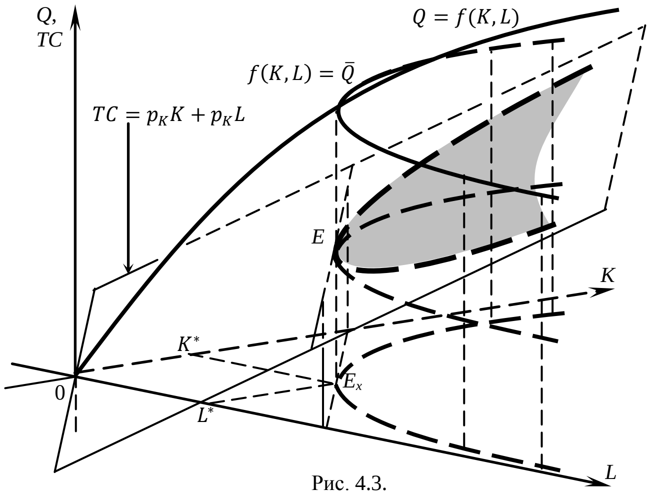


Рис. 4.3.
Пространственная иллюстрация решения задачи минимизации издержек производства при выпуске запланированного объема продукции

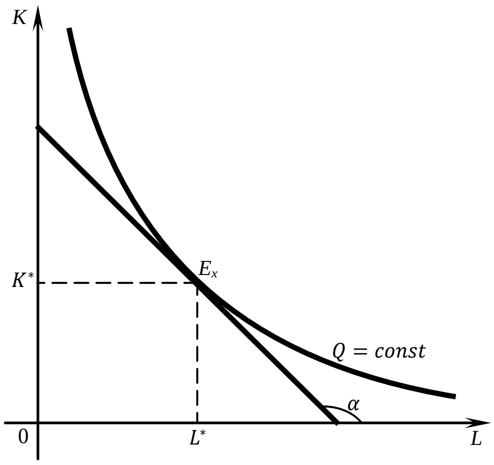


Рис. 4.4.
Оптимальный набор ресурсов на плоскости

Решая задачу (II.2), можно получить зависимости между оптимальными количествами используемых ресурсов и ценами данных ресурсов, а также объемом выпускаемой продукции $\bar{Q}$, выступающим в качестве ограничения:

$$K^h = K(p_K, p_L, \bar{Q}), L^h = L(p_K, p_L, \bar{Q}); \tag{4.9}$$

которые называются функциями условного спроса на соответствующие факторы производства по Хиксу. Графически функции условного спроса по Хиксу выводятся исходя из траектории развития предприятия, которая представляет собой вариацию решения задачи связанной минимизации издержек по запланированному объему производства (рис. 4.10).

Пример 4.1. Траектория развития фирмы и функции условного спроса по Хиксу для технологии Кобба–Дугласа

Допустим, что производственная функция имеет вид $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$. Тогда эквимаржинальный принцип (4.3) задает траекторию развития предприятия (рис. П4.1):

$$K = \frac{\alpha p_L}{\beta p_K} L. \tag{П4.1.1}$$

В частности, если $Q = K^{1/4}L^{1/2}$, то траектория развития имеет вид:

$$K = \frac{p_L}{2p_K} L.$$

Подставляя траекторию развития фирмы (П4.1.1) в производственную функцию, получаем условный спрос на хозяйственные факторы (рис. П4.1):

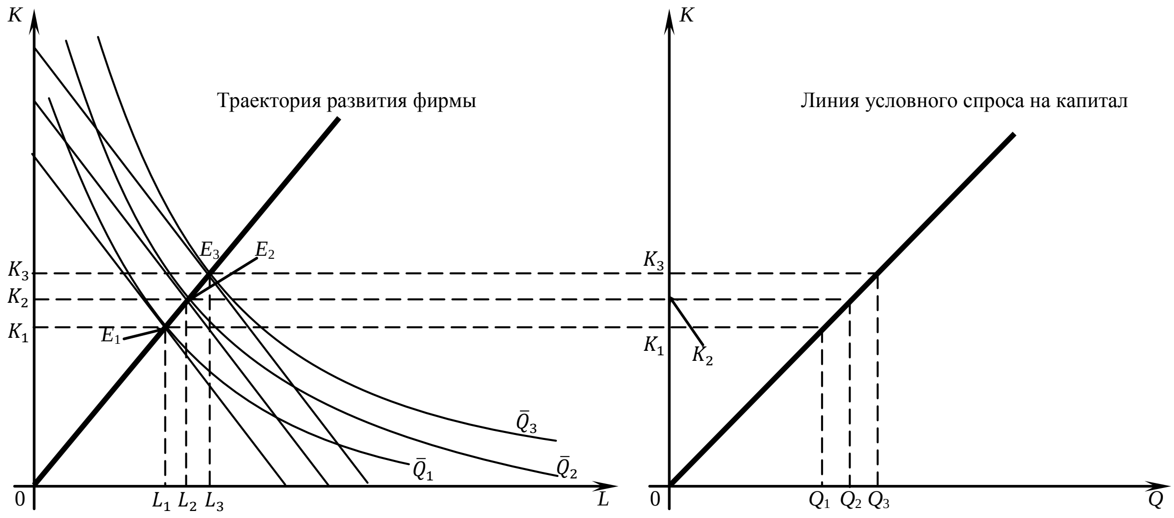
$$L = \left(\frac{\beta p_K}{\alpha p_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, K = \left(\frac{\alpha p_L}{\beta p_K}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \tag{П4.1.2}$$

В частности, если $Q = K^{1/4}L^{1/2}$, то функции условного спроса на факторы производства таковы[1]:

$$L = \sqrt[3]{\frac{2p_K}{p_L} Q^4}, K = \sqrt[3]{\left(\frac{p_L}{2p_K}\right)^2 Q^4}. \tag{П4.1.3}$$

[1] Например, при $Q = K^{1/4}L^{1/2}$, если $p_K = 4$, $p_L = 1$, $\bar{Q} = 8$, то $K = 4$, $L = 32$. При этом $TC_{min} = 48$.

Рис. П4.1. Траектория развития фирмы и условный спрос на факторы производства при технологии Кобба–Дугласа



Пример 4.2. Траектория развития фирмы и функции условного спроса по Хиксу для леонтьевской технологии

Аналогично примеру П2.2, при леонтьевской технологии (П1.6) комбинации ресурсов, минимизирующие издержки при заданном объеме выпуска (II.2), будут находиться в вершинах углов, являющихся изоквантами данной производственной функции, т.е. справедливо равенство:

$$Q = \frac{K}{\alpha} = \frac{L}{\beta}.$$

Следовательно, траектория развития фирмы имеет вид (ср. рис. П2.2.2):

$$K = \frac{\beta}{\alpha} L, \tag{П4.2.1}$$

а функции условного спроса на факторы производства таковы:

$$K = \alpha Q, L = \beta Q. \tag{П4.2.2}$$

Подставляя функции условного спроса на факторы производства по Хиксу (4.9) в выражение себестоимости продукции, можно получить функцию издержек:

$$TC(p_K, p_L, \bar{Q}) = p_K K(p_K, p_L, \bar{Q}) + p_L L(p_K, p_L, \bar{Q}). \tag{4.10}$$

Поскольку в условиях оптимума ограничение в задаче (II.2) выполняется как равенство $(Q = \bar{Q})$, черту сверху у запланированного объема производства, когда он рассматривается в качестве переменной величины, можно не писать – ведь запланированный объем производства совпадает с фактическим.

Функции условного спроса по Хиксу в случае достаточной гладкости производственной функции могут быть получены с использованием леммы Шепарда:

$$\frac{dTC}{dp_K} = K^h(p_K, p_L, \bar{Q}) = \frac{\partial TC}{\partial p_K}; \ \frac{dTC}{dp_L} = L^h(p_K, p_L, \bar{Q}) = \frac{\partial TC}{\partial p_L}. \tag{4.11}$$

которая в теории оптимизации производства доказывается так же, как и в теории потребительского поведения, с использованием теоремы об огибающей в отношении задачи связанной минимизации издержек (II.2) и соответствующей функции Лагранжа (4.5), если в качестве параметров рассматривать цены на факторы производства.

В задаче минимизации издержек (II.2) множитель Лагранжа λ по экономическому смыслу представляет собой предельные издержки производства:

$$\lambda = \frac{dTC}{dQ} \equiv MC, \tag{4.12}$$

что так же следует из теоремы об огибающей, когда параметром задачи (II.2) выступает заданный объем производства.

Исходя из экономического смысла множителя Лагранжа, необходимые условия связанной минимизации денежных затрат (4.8) можно дополнить:

$$\frac{MP_K}{p_K} = \frac{MP_L}{p_L} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{MC}. \quad (4.13)$$

Экономический смысл множителей Лагранжа отражает симметрию между задачами связанной максимизации объема производства (II.1a) и минимизации его издержек (II.2). Множители Лагранжа в этих задачах представляют собой взаимно обратные величины (4.4) и (4.12).

В силу однородности первой степени издержек как функции затрат факторов производства можно записать следующую цепочку равенств:

$$TC\big(f(\alpha K, \alpha L)\big) = TC(\alpha K, \alpha L) = \alpha TC(K, L) = \alpha TC\big(f(K, L)\big). \quad (4.14)$$

Если изокванты выпуклы к началу координат, то издержки производства представляют собой возрастающую функцию его объема. Поэтому, если технология производства характеризуется положительной отдачей от масштаба, то справедливо неравенство: $TC\big(\alpha f(K,L)\big) < TC\big(f(\alpha K, \alpha L)\big)$, а значит, $\alpha TC\big(f(K,L)\big) > TC\big(\alpha f(K,L)\big)$. Таким образом, положительная отдача от масштаба при строгой квазивогнутости технологии для функционирующего в долгосрочном аспекте предприятия ($Q > 0$) эквивалентна убыванию средних издержек:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} > \frac{TC(\alpha Q)}{\alpha Q} = AC(\alpha Q).$$

Выведем функцию издержек для важного класса однородных производственных функций (1.13), к которым применима теорема Эйлера (i). Домножим левую и правую части равенства (i) на множитель Лагранжа λ:

$$\lambda \frac{\partial f(K,L)}{\partial K} K + \lambda \frac{\partial f(K,L)}{\partial L} L = \gamma \lambda f(K,L).$$

Используем в данном соотношении условия минимизации издержек (4.7):

$$p_K K + p_L L = \gamma \lambda f(K,L).$$

В левой части здесь записано выражение издержек производства (TC). При минимизации затрат производится заданный объем продукции $f(K,L) = Q$. Кроме того, по доказанному выше, множитель Лагранжа λ в задаче минимизации издержек представляет собой их предельную величину, т.е. производную общих издержек по объему производства (4.12). Поэтому последнее равенство можно переписать в виде дифференциального уравнения:

$$TC(Q) = \gamma \frac{dTC}{dQ} Q.$$

Итак, для однородных производственных функций (1.13) средние издержки будут пропорциональны предельным при любом объеме производства:

$$AC(Q) = \gamma MC(Q).$$

Решаем полученное линейное однородное дифференциальное уравнение, разделяя переменные: $\frac{1}{\gamma}\int \frac{dQ}{Q} = \int \frac{dTC}{TC} + \ln c$. Интегрируя, приходим к соотношению $\ln|Q|^{1/\gamma} = \ln|TC| + \ln c$, потенцируя которое получаем искомую функцию издержек производства $TC(Q) = cQ^{1/\gamma}$. Константу можно определить, рассчитав издержки производства единичного объема продукции: $c = TC(1)$.

Таким образом, для однородной степени γ производственной функции (1.13) функция издержек имеет степенной вид:

$$TC(Q) = TC(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}. \qquad (4.15)$$

Справедливо и обратное утверждение. Пусть функция издержек производства имеет степенной вид (4.15). В силу линейной однородности функции издержек относительно затрат факторов можно выписать следующую цепочку равенств:

$$TC(\alpha K, \alpha L) = TC(1)f(\alpha K, \alpha L)^{\frac{1}{\gamma}} = \alpha TC(K, L) = \alpha TC(1)f(K, L)^{\frac{1}{\gamma}},$$

а значит,

$$f(\alpha K, \alpha L) = \alpha^{\gamma} f(K, L).$$

Таким образом, при степенной функции издержек (4.15) производственная функция является однородной соответствующей степени γ (1.13).

Итак, функция издержек имеет степенной вид (4.15) тогда и только тогда, когда производственная функция является однородной соответствующей степени γ (1.13)[2]. Отметим, что при этом функции предельных и средних издержек производства соответственно имеют вид:

$$MC(Q) = \frac{TC(1)}{\gamma} Q^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}, AC(Q) = TC(1)Q^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \qquad (4.16)$$

Характерные графики функций общих, средних и предельных издержек производства при различном характере от его масштаба показаны на рис. 4.6, 4.8, 4.9.

Если издержки производства имеют степенной вид (4.15), то аналогично будут выглядеть и функции условного спроса на его факторы (4.9).

Пусть

$$K = K(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}, L = L(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Тогда:

$$TC(Q) = p_L L(Q) + p_K K(Q) = p_L L(1)Q^{\frac{1}{\gamma}} + p_K K(1)Q^{\frac{1}{\gamma}} = Q^{\frac{1}{\gamma}}\big(p_L L(1) + p_K K(1)\big)$$
$$= TC(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Проведем рассуждения в обратную сторону: предположим, что $TC = TC(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}$. Поскольку $TC(1) = p_L L(1) + p_K K(1)$, постольку

$$TC = \big(p_L L(1) + p_K K(1)\big)Q^{\frac{1}{\gamma}} = p_L L(1)Q^{\frac{1}{\gamma}} + p_K K(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Из линейности издержек производства как зависимости от затрат факторов и эквивалентности между функцией издержек и себестоимостью продукции

$$TC(K, L) = p_L L + p_K K = Q^{\frac{1}{\gamma}}\big(p_L L(1) + p_K K(1)\big) = Q^{\frac{1}{\gamma}} TC(1),$$

где $TC(1) = p_L L(1) + p_K K(1) = const$ – величина, не зависящая от Q, вытекает, что $K(Q) = C_1 Q^{\frac{1}{\gamma}}$, $L(Q) = C_2 Q^{\frac{1}{\gamma}}$, где C_1 и C_2 – так же константы, не зависящие от количества производимой продукции. Их легко определить по спросу на труд и капитал при единичном объеме выпуска $K(1) = C_1$, $L(1) = C_2$, т.е., действительно,

$$K = K(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}, L = L(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}.$$

---

[2] Лазарев И.А. Технология с постоянной отдачей от масштаба производства в экономико-математических моделях // Материалы конференции «Ломоносов–2003». – М.: ТЕИС, 2004.

Пример 4.3. Функции издержек для технологии Кобба–Дугласа

Подставляя функции условного спроса (П4.1.2) в выражение себестоимости продукции (4.10), получаем функцию издержек производства для технологии Кобба–Дугласа $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$:

$$TC = (\alpha + \beta)\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{p_L}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \qquad (П4.3.1)$$

Соответственно, средние и предельные издержки производства будут описываться следующими функциональными зависимостями:

$$AC = \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}p_K^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}p_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}, \qquad (П4.3.2)$$

$$MC = \left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{p_L}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}. \qquad (П4.3.3)$$

В частности, для производственной функции $Q = K^{1/4}L^{1/2}$ функции общих, предельных и средних издержек соответственно имеют вид:

$$TC = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{p_K p_L^2 Q^4}, \qquad (П4.3.4)$$

$$MC = \sqrt[3]{16 p_K p_L^2 Q}, \qquad (П4.3.5)$$

$$AC = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{p_K p_L^2 Q}. \qquad (П4.3.6)$$

Пример 4.4. Функция издержек для леонтьевской технологии

Рассматривая в выражении себестоимости продукции (4.10) затраты факторов производства как функции условного спроса (П4.2.2), получаем, что для производственной функции леонтьевского типа функция издержек предприятия как зависимость между денежными расходами и выпускаемым объемом продукции будет линейной:

$$TC = Q\left(\frac{p_K}{\alpha} + \frac{p_L}{\beta}\right). \qquad (П4.4.1)$$

При этом предельные и средние издержки предприятия не зависят от объема производства, а лишь от цен на ресурсы:

$$MC = AC = \frac{p_K}{\alpha} + \frac{p_L}{\beta}. \qquad (П4.4.2)$$