4.1. Максимизация объема производства при ограничении по его издержкам

В качестве производителей могут выступать отдельные фирмы и их объединения, или предприятия. Допустим, что каждый из h ресурсов покупается производителем по цене $p_h \in \mathbb{R}_+$. Заметим, что цена h-го товара едина для всех производителей. Здесь не будет приниматься во внимание возможность ценовой дискриминации производителей. Трансформация ресурсов в готовую продукцию на предприятии описывается производственной функцией, ставящей в соответствие затратам факторов производства – труда (L) и капитала (K) – максимальный объем продукции $Q(K, L)$, который может быть выпущен с их помощью за данный промежуток времени.

Каждая фирма стремится к достижению определенных хозяйственных целей, принимая во внимание существующие ограничения как экономического, так и технологического характера. Максимизация прибыли является одной из первостепенных, но отнюдь не единственной, главенствующей целью в деятельности фирмы. Среди других важнейших типов хозяйственного целеполагания можно, например, отметить стремление к расширению рыночной доли, увеличению валовой выручки, оптимизации производственных затрат, совершенствованию производственных и сбытовых систем, внедрению новых продуктов, улучшению условий труда и общественного имиджа компании, росту активов и рыночной капитализации компании и т.д.

Итак, одной из важных целей деятельности фирмы является максимизация выручки от реализации продукции. В условиях совершенной конкуренции на продуктовом рынке, когда цены выступают для отдельных хозяйствующих субъектов в качестве экзогенных параметров, такое поведение предприятия сводится максимизации объема выпускаемой продукции при условии ограничения по финансовым средствам предприятия (TC):

$$\max_{K,L} Q(K, L):$$
$$p_K K + p_L L \leqslant TC, K \geqslant 0, L \geqslant 0.$$

Решение данной задачи (K^*, L^*), аналогично теории потребления, обладает таким свойством, что ограничение по издержкам для него выполняется в форме равенства, следовательно, эту задачу для случая внутреннего оптимума $(K > 0, L > 0)$ можно переписать в более простом виде:

$$\max_{K,L} Q(K, L): \quad p_K K + p_L L = TC. \tag{I.2}$$

Часто для облегчения экономического анализа и получения практически значимых результатов в добавление к перечисленным выше предпосылкам производственной функции, как и в теории потребления, требуют степень гладкости C^2. Тогда, решая задачу (I.2) на условный экстремум, можно воспользоваться его необходимым условием – равенством нулю дифференциала функции Лагранжа, которая имеет вид:

$$\mathfrak{L} = Q(K, L) - \lambda(p_K K + p_L L - TC). \tag{4.1}$$

Имеем:

$$d\mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K} dK + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial L} dL + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} d\lambda$$
$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial K} - \lambda p_K\right) dK + \left(\frac{\partial Q}{\partial L} - \lambda p_L\right) dL - (p_K K + p_L L - TC) d\lambda = 0.$$

Из необходимого условия экстремума вытекает система:

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial K} = \lambda p_K, & (4.2.1) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial L} = \lambda p_L, & (4.2.2) \\ p_K K + p_L L = TC. & (4.2.3) \end{cases}$$

Ее следствием аналогично задачам условной максимизации полезности (I.1a) и минимизации расходов (II.1a) является эквимаржинальный принцип[1]:

$$MRTS_{KL} \equiv -\frac{dK}{dL}\bigg|_{Q=const} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{p_L}{p_K}. \qquad (4.3)$$

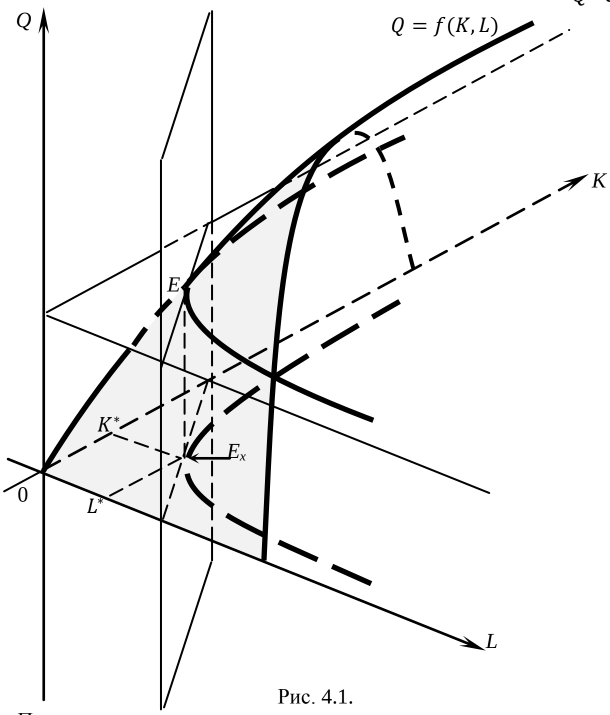

Рис. 4.1.
Пространственная иллюстрация решения задачи максимизации объема производства при ограничении по издержкам

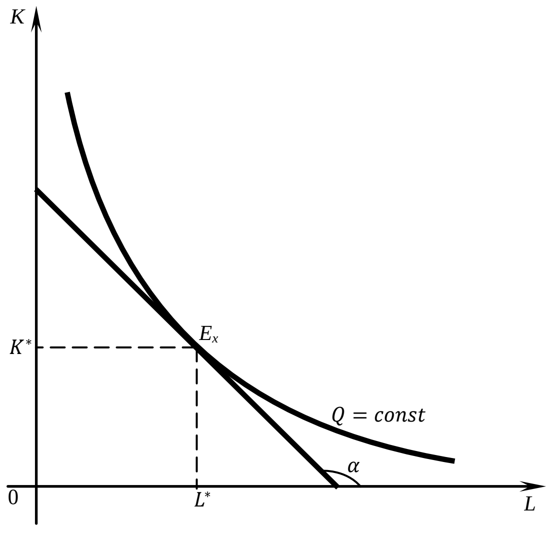

Рис. 4.2.
Оптимальная корзина товаров на плоскости

На рис. 4.1 E – точка в трехмерном технологическом пространстве, соответствующая максимальному объему выпуска при ограничении по издержкам производства, который достигается при выборе оптимального набора ресурсов (K^*, L^*). На рис. 4.2 E_x – это проекция точки E на плоскость $K0L$.

Экономический смысл множителя Лагранжа λ в задаче условной максимизации объема выпуска (I.2) можно установить аналогично тому, как это было сделано в теории потребительского выбора (2.18), применяя теорему об огибающей к задаче условной максимизации объема производства (I.2) и соответствующей функции Лагранжа (4.1). Множитель Лагранжа в задаче оптимизации производства (I.2) по экономическому смыслу представляет величину, обратную предельным издержкам предприятия:

$$\lambda = \frac{dQ}{dTC} = \frac{1}{MC}. \qquad (4.4)$$

Варьируя параметры p и TC в задаче (I.2), можно вывести зависимость оптимальной комбинации факторов производства (K^*, L^*) от их цен $p = (p_K, p_L)$ и издержек производства TC. Эта зависимость называется функцией условного спроса по Маршаллу

[1] Например, при $Q = K^{1/4}L^{1/2}$, если $p_K = 4$, $p_L = 1$, $\overline{TC} = 48$, то $K = 4$, $L = 32$. При этом $Q_{max} = 8$.

производителя на ресурсы $x^m = x^*(p, TC)$. Если производственная функция является дифференцируемой, то функции условного спроса фирмы на ресурсы по Маршаллу $(p_K, p_L, TC) \to (K^*, L^*)$ можно вывести из необходимого условия связанной максимизации объема выпуска (4.2).

В силу того, что для теории производства, аналогично теории потребления, справедливы соотношения[2]

$$\frac{dQ}{dp_K} = -\lambda K(p_K, p_L, TC), \frac{dQ}{dp_L} = -\lambda L(p_K, p_L, TC),$$

учитывая экономический смысл множителя Лагранжа (4.4), получаем, что для функций условного спроса по Маршаллу, как вариаций решения задачи оптимизации производства по ценам, справедливо векторное тождество Роя:

$$K(p_K, p_L, TC) = -\frac{\frac{dQ}{dp_K}}{\frac{dQ}{dTC}}, L(p_K, p_L, TC) = -\frac{\frac{dQ}{dp_L}}{\frac{dQ}{dTC}}.$$

[2] Которые следуют из теоремы об огибающей, если в качестве параметра задачи связанной максимизации выпуска взять цены факторов производства.