3.5. Потребительский выбор с учетом отношения к риску

Теория индивидуального восприятия риска позволяет описать спрос на страховые услуги. Рассмотрим выбор страхователя в пространстве сопряженных доходов. Допустим, что индивидуум располагает первоначальным богатством w, однако для него существует риск потери D рублей с вероятностью p. При этом возможна покупка страховки, единица которой стоит q копеек, а выплаты по ней при наступлении страхового случая составят 1 рубль.

Если будут куплены α единиц страховки, то богатство индивидуума при отсутствии ущерба окажется равным

$$x_1 = w - \alpha q, \tag{3.41}$$

откуда:

$$\alpha = \frac{w - x_1}{q}. \tag{3.42}$$

Доход при неблагоприятном стечении обстоятельств (наступлении страхового случая) составит: $x_2 = w - D - \alpha q + \alpha = w - D + (1-q)\alpha$. Из данного выражения с учетом (3.42) получаем бюджетное ограничение страхователя:

$$x_2 = w - D + \frac{(1-q)}{q}(w - x_1),$$

или

$$(1-q)x_1 + qx_2 = (1-q)w + q(w - D).$$

По модулю угловой коэффициент бюджетной линии ($tg\gamma$ на рис. 3.8) равен:

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1-q}{q}.$$

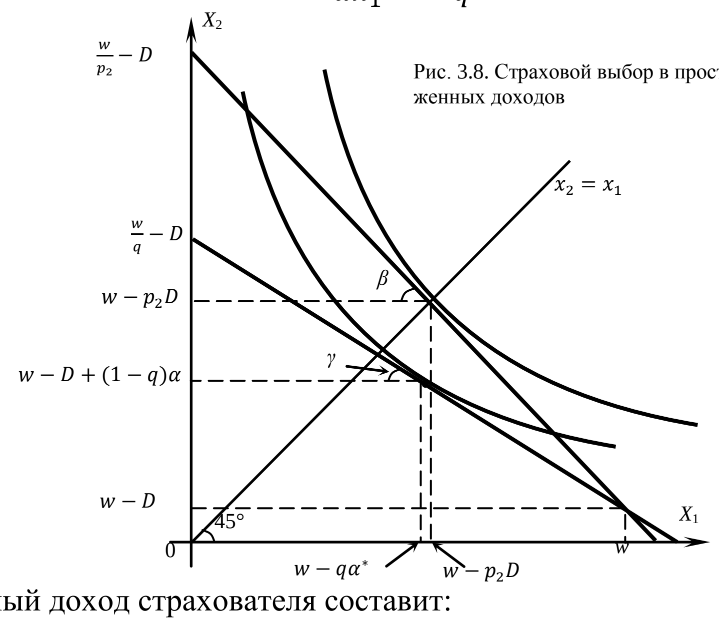

Рис. 3.8. Страховой выбор в пространстве сопряженных доходов

Ожидаемый доход страхователя составит:

$$p_1(w - \alpha q) + p_2(w - D + (1-q)\alpha) = w - p_2 D - \alpha(q - p_2). \tag{3.43}$$

Страхователь выбирает величину страхового покрытия α таким образом, чтобы его ожидаемая полезность:

$$EU = (1 - p_2)U(w - \alpha q) + p_2 U(w - D + (1-q)\alpha) \tag{3.44}$$

была максимальной.

В соответствии с необходимым условием экстремума производная (3.44) по α

$$\frac{dEU}{d\alpha} = (1-p_2)(-q)U'(w-\alpha q) + p_2(1-q)U'(w-D+(1-q)\alpha)$$
$$= -p_1 qU'(w-\alpha q) + (1-p_1)(1-q)U'(w-D+(1-q)\alpha)$$
должна равняться нулю. Следовательно, в точке оптимума бюджетное ограничение должно касаться кривой безразличия в пространстве сопряженных доходов (рис. 3.8):
$$\frac{(1-p_2)U'(w-\alpha q)}{p_2 U'(w-D+(1-q)\alpha)} = \frac{p_1 U'(x_1)}{(1-p_1)U'(x_2)} = \frac{1-q}{q}. \qquad (3.45)$$
Достаточное условие максимизации полезности
$$\frac{d^2EU}{d\alpha^2} = q^2(1-p_2)U''(w-\alpha^* q) + (1-q)^2 p_2 U''(w-D+(1-q)\alpha^*) < 0$$
при этом будет выполнено в силу вогнутости функции полезности ($U''(\cdot) < 0$).

Будем считать страховой контракт справедливым, если он сохраняет неизменным ожидаемый доход индивидуума (с учетом вероятных потерь):
$$p_1 w + p_2(w-D) = w - p_2 D.$$
В силу соотношения (3.43) очевидно, что стоимость справедливого полиса с единичной суммой денежных выплат при наступлении страхового случая должна быть равна вероятности последнего:
$$q = p_2. \qquad (3.46)$$
При этом бюджетное ограничение принимает вид:
$$x_2 = w - D + \frac{(1-p_2)}{p_2}(w - x_1),$$
или
$$(1-p_2)x_1 + p_2 x_2 = (1-p_2)w + p_2(w-D),$$
а его угловой коэффициент становится равным $(1-p_2)/p_2$. Очевидно, что касание такого бюджетного ограничения с кривой безразличия будет иметь место на диагонали, причем с учетом полученного выражения бюджетного ограничения будет справедливо двойное равенство: $x_1 = x_2 = w - p_2 D$. Учитывая в данном равенстве любое из выражений для доходов индивидуума (3.41), можно показать, что при справедливом страховании (3.46) страхователь, избегающий риска, будет выбирать полное покрытие ущерба:
$$\alpha^* = D. \qquad (3.47)$$
Этот результат также непосредственно вытекает из максимизации индивидуальной полезности при справедливом страховании, когда выражение (3.44) принимает вид:
$$EU = (1-p_2)U(w-\alpha p_2) + p_2 U(w-D+(1-p_2)\alpha).$$
В соответствии с необходимым условием экстремума соответствующая производная:
$$\frac{dEU}{d\alpha} = -p_2(1-p_2)U'(w-\alpha p_2) + p_2(1-p_2)U'(w-D+(1-p_2)\alpha) \qquad (3.48)$$
аннулируется, следовательно:
$$U'(w-\alpha p_2) = U'(w-D+(1-p_2)\alpha), \qquad (3.49)$$
а значит, в силу монотонности функции полезности $U(\cdot)$ будут равны и соответствующие аргументы:
$$w - \alpha p_2 = w - D + (1-p_2)\alpha, \qquad (3.50)$$
откуда вытекает полное страхование (3.47).

Соответственно, при неполном покрытии возможного ущерба, когда
$$\alpha < D, \qquad (3.51)$$

в условиях справедливого страхования (3.46) выражение в левой части (3.50) будет больше правой части, а для соответствующих значений производной функции полезности в силу ее строгой вогнутости по причине несклонности индивидуума к риску будет характерно противоположное неравенство: $U'(w-\alpha p_2) < U'(w-D+(1-p_2)\alpha)$, и производная ожидаемой полезности (3.48) будет положительной; таким образом, при увеличении страхового покрытия полезность страхователя будет возрастать.

Если же стоимость полиса с единичной компенсацией не будет эквивалентна вероятности наступления страхового случая, но будет превышать его на величину удельных расходов страховщика ($q > p_2$), то $\frac{1-p_2}{p_2} > \frac{1-q}{q}$, а значит, в силу строгой выпуклости кривых безразличия к началу координат $x_1^* = w - q\alpha^* > x_2^* = w - D + (1-q)\alpha^* = w - D + \alpha^* - q\alpha^*$. Следовательно, оптимальным для страхователя окажется полис с неполным покрытием (3.51).

Покажем теперь, как прийти к тем же выводам более формально, опираясь на аппарат условной оптимизации. Как и выше, будем рассматривать поведение индивидуума, строго не приемлющего риск, предпочтения которого удовлетворяют строгому неравенству Йенсена (1.28). По объективной логике бизнеса, денежные выплаты по каждой страховке с учетом вероятности наступления страхового случая не могут превышать собранной премии:

$$q \geqslant p. \tag{3.52}$$

В частности, страховку можно считать полностью справедливой, если ее цена будет равной сумме страховых выплат:

$$q = p. \tag{3.53}$$

Рациональный индивидуум будет стараться выбрать оптимальную величину α с таким расчетом, чтобы она максимизировала его ожидаемую полезность[1]:

$$\max_{\alpha}\big((1-p)U(w-\alpha q) + pU(w-\alpha q - D + \alpha)\big):$$
$$\alpha \geqslant 0, q \geqslant p.$$

Условия в данной задаче можно трактовать как бюджетное ограничение страховщика:

$$p(w-\alpha q - D + \alpha) + (1-p)(w-\alpha q) \leqslant p(w-D) + (1-p)w.$$

Действительно, после преобразований получаем неравенство $\alpha(q-p) \geqslant 0$, которое является следствием условий $\alpha \geqslant 0$, $q \geqslant p$ в задаче страхователя.

Будем решать эту задачу, используя метод неопределенных множителей Лагранжа. Выпишем лагранжиан:

$$\mathfrak{L} = \lambda_0\big((p-1)U(w-\alpha q) - pU(w-\alpha q - D + \alpha)\big) - \lambda_1\alpha + \lambda_2(p-q).$$

Необходимым условием (Куна–Таккера) экстремума в данной задаче является равенство нулю производной функции Лагранжа по α:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \lambda_0\big((1-p)qU'(w-\alpha q) - p(1-q)U'(w-\alpha q - D + \alpha)\big) - \lambda_1 = 0 \tag{3.54}$$

при выполнении условий дополняющей нежесткости:

$$\alpha \geqslant 0, \lambda_1 \geqslant 0, \tag{3.55}$$
$$\lambda_1\alpha = 0, \tag{3.56}$$
$$q \geqslant p, \lambda_2 \geqslant 0, \tag{3.57}$$
$$\lambda_2(q-p) = 0. \tag{3.58}$$

[1] Каноническая постановка данной задачи такова:

$$\min_{\alpha}\big((p-1)U(w-\alpha q) - pU(w-\alpha q - D + \alpha)\big):$$
$$-\alpha \leqslant 0, p - q \leqslant 0.$$

Будем рассматривать случай[2] $\lambda_0 \neq 0$. В частности, без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$. Из (3.54) – (3.55) вытекает соотношение:

$$(1-p)qU'(w-\alpha q) - p(1-q)U'(w-D+(1-q)\alpha) = \lambda_1 \geqslant 0. \qquad (3.59)$$

В силу условия дополняющей нежесткости (3.56) при $\alpha > 0$ $\lambda_1 = 0$, а значит, неравенство (3.59) перейдет в равенство (3.45). Строгое решение данной задачи оптимального поведения индивидуума возможно лишь для случая абсолютно справедливого страхования (3.53). При такой организации бизнеса (3.45) превращается в (3.49).

Для несклонного рисковать индивидуума, для которого $U'' < 0$, U' является строго монотонной. Поэтому равенство ее значений (3.49) эквивалентно совпадению аргументов (3.50), откуда вытекает полное страховое покрытие (3.47).

Чтобы показать, что индивидуум, уклоняющийся от риска, будет страховаться, т.е. им будет куплено положительное количество полисов, проанализируем оставшуюся возможность, предусмотренную условием дополняющей нежесткости (3.55) – (3.56), когда $\alpha = 0$, $\lambda_1 > 0$. В этом случае ожидаемая величина полезности будет равна $(1-p)U(w) + pU(w-D)$. В отличие от этого, при страховании $(\alpha^* = D > 0$ индивидуум получит гарантированную полезность:

$$(1-p)U(w-\alpha q) + pU(w-\alpha q - D + \alpha) = U(w-pD).$$

В силу строгой вогнутости U должно выполняться строгое неравенство Йенсена:

$$U(w-pD) = U(p(w-D)+(1-p)w) > (1-p)U(w) + pU(w-D). \qquad (3.60)$$

Следовательно, решение, связанное с отказом от страхования $(\alpha = 0)$, для индивидуума, не склонного рисковать, не является оптимальным. Таким образом, если страхование осуществляется честно, то такой индивидуум будет полностью страховаться (3.47), гарантированно обеспечивая себе конечное богатство $w - pD$ независимо от наступления страхового случая.

Конечное богатство $w - pD$ будет таковым для любого α при наступлении страхового случая. Оптимальная стратегия индивидуума, уклоняющегося от риска, при абсолютно справедливом страховании состоит в том, чтобы выбрать такой размер страховки α, чтобы гарантированно обеспечить себе данное богатство независимо от наступления страхового случая. Экономический агент за счет страхования ликвидирует стохастический характер потока доходов, превращая его в получение гарантированной суммы в размере $w - pD$.

Если ослабить требование абсолютно справедливого страхования (3.53) и допустить возможность превышения страховых премий над выплатами (3.52) при $\lambda_2 = 0$ в условии дополняющей нежесткости (3.58), то из (3.45) будет следовать неравенство:

$$U'(w-\alpha q) = \left(\frac{p-pq}{q-pq}\right)U'\big(w-D+\alpha(1-q)\big) \leqslant \left(\frac{p-pq}{p-pq}\right)U'\big(w-D+\alpha(1-q)\big)$$
$$= U'\big(w-D+\alpha(1-q)\big).$$

Для индивидуума, старающегося избегать риска в силу строгой вогнутости U, а значит, строго убывания U' из данного неравенства будет вытекать противоположное неравенство относительно аргументов производной функции полезности:

$$w - \alpha p \geqslant w - D + \alpha(1-p).$$

Следовательно, в данном случае (3.52) можно лишь утверждать, что для индивидуума, предпочитающего уклоняться от риска, оптимальная величина

---

[2] При $\lambda_0 = 0$ из (3.54) будет следовать $\lambda_1 = 0$, а значит, поскольку вектор множителей Лагранжа (λ_1, λ_2) не может быть нулевым, из условия дополняющей нежесткости (3.58) будет следовать справедливое страхование (3.53).

страхования, а значит, и выплат при наступлении страхового случая не может быть больше ущерба с учетом его вероятности: $\alpha^* \leqslant D$.

В отличие от абсолютно справедливого страхования (3.53) в данной, более общей ситуации (3.52) для неприемлющего риск человека возможен даже отказ от страховки, если вероятность наступления страхового случая будет достаточно низкой. В пределе при покупке страховки, когда $\alpha > 0$, ожидаемая полезность индивидуума будет:

$$\lim_{p\to 0}(1-p)U(w-\alpha q)+pU(w-\alpha q-D+\alpha)=U(w-\alpha q);$$

тогда как при отказе от страхования (3.66) – окажется равной:

$$\lim_{p\to 0}(1-p)U(w)+pU(w-D)=U(w)>U(w-\alpha).$$

А значит, по теореме о неравенстве пределов функций[3], найдется такая проколотая окрестность нуля, что для любой попадающей в нее величины вероятности p полезность при страховании будет ниже, чем без него.

Продемонстрируем еще один прикладной аспект концепции ожидаемой полезности, кассающийся спроса на рисковые активы. Пусть существуют два актива – безрисковый, гарантирующий полный возврат инвестированных денежных средств, и рисковый с ожидаемым, вероятным доходом, равным z рублей на каждый вложенный рубль. Ожидаемый доход z имеет распределение вероятностей $F(z)$. Предполагается, что:

$$\int_{z_0}^{z_1} z dP(z) > 1, \tag{3.61}$$

т.е. математическое ожидание дохода рискового актива превышает отдачу от безрискового.

Пусть индивидуум обладает первоначальным богатством w, инвестируемым в два данных актива: α и β – количества средств, направленных соответственно на рискованные и безрисковые вложения. Тогда отдача от инвестиций составит $\alpha z+\beta$. Очевидно, что должно выполняться соотношение $\alpha+\beta=w$.

Рациональный инвестор, максимизируя ожидаемую полезность, будет стремиться оптимальным образом выбрать α и β:

$$\max_{\alpha}\int_{z_0}^{z_1} U(w+\alpha(z-1))dP(z):$$
$$\alpha+\beta=w, \alpha\geqslant 0, \beta\geqslant 0;$$

или, что эквивалентно,

$$\min_{\alpha}\int_{z_1}^{z_0} U(w+\alpha(z-1))dP(z):$$
$$-\alpha\leqslant 0,\ \ \alpha-w\leqslant 0.$$

Выпишем лагранжиан:

$$\mathfrak{L}=\int_{z_1}^{z_0}\lambda_0 U(w+\alpha(z-1))dP(z)-\lambda_1\alpha+\lambda_2(\alpha-w),$$

где λ_i, $i=\{0,1,2\}$ – множители Лагранжа.

Необходимые условия максимума (Куна–Таккера) состоят в равенстве нулю производной функции Лагранжа:

[3] Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч. 1.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \int_{z_1}^{z_0} \lambda_0 U'\big(w + \alpha(z-1)\big)(z-1)dP(z) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \tag{3.62}$$

с учетом условий дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1 \alpha = 0 \text{ при } \alpha \geqslant 0,\ \lambda_1 \geqslant 0; \tag{3.63}$$

$$\lambda_2(\alpha - w) = 0 \text{ при } \lambda_2 \geqslant 0,\ \alpha \leqslant w. \tag{3.64}$$

В соответствии с (3.63) возможны два случая. Во-первых, если $\lambda_1 \geqslant 0$, то $\alpha = 0$. При этом в условии (3.64) первый случай, когда $\alpha = w$, $\lambda_2 \geqslant 0$, отпадает; поэтому возможна лишь альтернативная ситуация $\alpha < w$, $\lambda_2 = 0$. Следовательно, (3.62) принимает вид:

$$\int_{z_0}^{z_1} \lambda_0 U'\big(w + \alpha(z-1)\big)(z-1)dP(z) = -\lambda_1 \leqslant 0. \tag{3.65}$$

Если в условии (3.64) все–таки верна альтернатива, когда $\alpha = w$ и $\lambda_2 \geqslant 0$, то при этом обязательно будет $\alpha > 0$, значит, $\lambda_1 = 0$, т.е. должна реализоваться вторая возможность в условии (3.63). Тогда (3.62) будет выглядеть так:

$$\int_{z_0}^{z_1} \lambda_0 U'\big(w + \alpha(z-1)\big)(z-1)dP(z) = \lambda_2 \geqslant 0. \tag{3.66}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то в каждой из альтернатив (3.65),(3.66) получается, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, чего не может быть, поскольку вектор множителей Лагранжа должен быть ненулевым. Следовательно, $\lambda_0 > 0$, и без ограничения общности можно положить его равным единице, пронормировав относительно него остальные множители Лагранжа. Тогда условия (3.65) и (3.66) соответственно можно записать в более простом виде:

$$\int_{z_0}^{z_1} U'\big(w + \alpha(z-1)\big)(z-1)dP(z) = -\lambda_1 \leqslant 0, \tag{3.67}$$

$$\int_{z_0}^{z_1} U'\big(w + \alpha(z-1)\big)(z-1)dP(z) = \lambda_2 \geqslant 0. \tag{3.68}$$

Обозначим через $\varphi(\alpha^*)$ левые части в (3.67) и (3.68):

$$\varphi(\alpha^*) \equiv \int_{z_0}^{z_1} U'\big(w + \alpha^*(z-1)\big)(z-1)dP(z).$$

Отметим, что в силу предположения (3.61) и строго возрастания $U(\cdot)$:

$$\varphi(0) = \int_{z_0}^{z_1} U'(w)(z-1)dP(z) = U'(w)\int_{z_0}^{z_1}(z-1)dP(z)$$

$$= U'(w)\int_{z_0}^{z_1} z dP(z) - U'(w)\int_{z_0}^{z_1} z dP(z) = U'(w)\left(\int_{z_0}^{z_1} z dP(z) - 1\right) > 0.$$

Следовательно, (3.67) неверно, первый случай в условии (3.63) $(\alpha = 0)$ отпадает, а значит, возможна только ситуация $\alpha^* > 0$.

Таким образом, если рискованный актив имеет ожидаемую доходность, превышающую отдачу от безрискового актива, то рациональный инвестор обязательно будет вкладывать в него некоторую часть своих средств.