2.6. Уравнение Слуцкого: эффекты дохода и замещения

Одним из важнейших следствий леммы Шепарда (2.24) является уравнение Слуцкого[1]:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial p_i} = \frac{dx_i^h}{dp_i} - x_i \frac{\partial x_i^m}{\partial M}, \tag{2.25}$$

где $\frac{dx_i^h}{dp_i}$ – эффект замещения, $-x_i \frac{\partial x_i^m}{\partial M}$ – эффект дохода, $\frac{\partial x_i^m}{\partial p_i}$ – общий эффект изменения цены, $i = 1, 2$.

Эффект замещения отражает рост спроса на относительно подешевевшие и уменьшение спроса на относительно подорожавшие товары. Эффект дохода заключается в том, что, в частности, при удешевлении какого–либо из товаров потребитель получает возможность купить больше данного товара, не сокращая объема потребления других[2].

Ключевую роль при получении уравнения Слуцкого играет следующее тождественное соотношение между функциями условного спроса по Хиксу и Маршаллу. В силу рассмотренной выше двойственности между задачами (I.1a) и (II.1a) потребительского выбора, если в функции спроса по Маршаллу в качестве аргумента дохода M взять такой уровень расходов покупателя, который соответствует заданному уровню полезности $\overline{U}$, выступающему в роли переменной в функции спроса по Хиксу, $E(p_1, p_2, \overline{U})$, то значениями функций спроса по Маршаллу и по Хиксу будет являться один и тот же объем потребления товара x_i:

$$x_i^h(p_1, p_2, \overline{U}) \equiv x_i^m\big(p_1, p_2, E(p_1, p_2, \overline{U})\big), i = 1, 2. \tag{2.26}$$

Уравнение Слуцкого (2.25) получается дифференцированием тождества (2.26) по цене i-го товара:

$$\frac{dx_i^h}{dp_i} = \frac{\partial x_i^m}{\partial p_i} + \frac{\partial x_i^m}{\partial E}\frac{dE}{dp_i} = \frac{\partial x_i^m}{\partial p_i} + \frac{\partial x_i^m}{\partial M}\frac{dM}{dp_i}, i = 1, 2, \tag{2.27}$$

с последующим применением леммы Шепарда (2.24). В соотношении (2.27) было использовано равенство расходов доходу (2.4), (2.14) в рамках решения задачи связанной максимизации полезности (I.1a).

Присутствие знака «минус» перед вторым слагаемым в уравнении Слуцкого (2.25) можно объяснить, вернувшись к лемме Шепарда (2.24) и учитывая, что $\frac{dE}{dp_i} > 0$. Например, при снижении цены i-го товара расходы E потребителя уменьшатся, что означает для нормального товара сокращение спроса на него. При этом знак «минус» обеспечивает положительность эффекта дохода, что предполагает случай нормального блага. Напротив, для худших товаров при снижении цены p_i, а значит, и расходов E спрос на данный, i-й товар возрастет. В данном случае знак «минус» позволяет добиться отрицательного значения эффекта дохода, свойственного инфериорным благам.

[1] Слуцкий Е.Е. К теории сбалансированного бюджета потребителя // Народнохозяйственные модели: теоретические вопросы потребления. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. См. также: Ланкастер К. Математическая экономика. – М.: Советское радио, 1972.

[2] Для некоторых функций полезности какой-то из этих эффектов может отсутствовать. Например, для совершенно комплементарных благ будет отсутствовать эффект замещения и остается лишь эффект дохода (рис. П2.2.2). Особое место в теории потребительского выбора занимает так называемый товар Гиффена – худший товар, для которого эффект дохода больше эффекта замещения. Такие товары характеризуются возрастающими функциями спроса.

Пример 2.9. Уравнение Слуцкого для функции полезности Кобба–Дугласа

В случае функции полезности (П2.1.4), когда функция спроса по Хиксу имеет вид (П2.6.2), а по Маршаллу – (П2.1.5), эффекты замещения и дохода будут соответственно равны:

$$\frac{dx_1^h}{dp_1} = -\frac{p_2^{1/2}}{2p_1^{3/2}}\sqrt{x_1x_2} = -\frac{p_2^{1/2}}{2p_1^{3/2}}\sqrt{\frac{M}{2p_1}\frac{M}{2p_2}} = -\frac{M}{4p_1^2},$$

$$-x_1\frac{\partial x_1^m}{\partial M} = -\frac{M}{2p_1}\frac{1}{2p_1} = -\frac{M}{4p_1^2}.$$

Таким образом, в полном соответствии с уравнением Слуцкого данные два эффекта в сумме будут равны общему эффекту цены:

$$\frac{dx_1^h}{dp_1} - x_1\frac{\partial x_1^m}{\partial M} = -\frac{M}{2p_1^2} = \frac{\partial x_1^m}{\partial p_1}.$$

Выведем уравнение Слуцкого для перекрестных эффектов изменения цены товара. Для этого продифференцируем тождество (2.26) для i-го блага по цене j-го, используя равенство расходов доходу (2.4), (2.14) в рамках решения задачи связанной максимизации полезности (I.1a):

$$\frac{dx_i^h}{dp_j} = \frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^m}{\partial E}\frac{dE}{dp_j} = \frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^m}{\partial M}\frac{dM}{dp_j}, i,j = \{1,2\}.$$

Применяя затем лемму Шепарда (2.24), получаем обобщенное уравнение Слуцкого:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j} = \frac{dx_i^h}{dp_j} - x_j\frac{\partial x_i^m}{\partial M}; i,j = \{1,2\}. \tag{2.28}$$

В соответствии с леммой Шепарда (2.24), для вторых частных производных функции расходов $\mathbb{R}_+^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ справедлива следующая запись:

$$\frac{\partial x_1^h}{\partial p_2} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_1 \partial p_2}, \frac{\partial x_2^h}{\partial p_1} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_2 \partial p_1}.$$

По теореме Шварца, в любой точке $\mathbb{R}_+^3\backslash\{0\}$, где данные вторые смешанные частные производные непрерывны, они будут равны между собой, следовательно, при достаточной гладкости спроса по Хиксу и функций расходов перекрестные эффекты замещения всегда симметричны[3]:

$$\frac{\partial x_1^h}{\partial p_2} = \frac{\partial x_2^h}{\partial p_1}.$$

[3] Перекрестный общий эффект цены будет симметричным лишь при равенстве долей обоих товаров в расходах покупателя при любых объемах потребления ($\rho_1 \equiv \rho_2$). Поскольку доли расходов на два товара равны, совпадают также и валовые расходы потребителя на оба товара: $p_1x_1(M) = p_2x_2(M)$. Продифференцируем равенство валовых расходов по доходу потребителя: $p_1\frac{\partial x_1}{\partial M} = p_2\frac{\partial x_2}{\partial M}$. Из данного равенства, учитывая, что совпадение валовых расходов на товары дает равенство $\frac{p_1}{x_2} = \frac{p_2}{x_1}$, можно получить соотношение: $x_2\frac{\partial x_1}{\partial M} = x_1\frac{\partial x_2}{\partial M}$. Используя уравнения Слуцкого с перекрестными эффектами (2.28) для обоих товаров и учитывая симметрию перекрестных эффектов замещения, получаем равенство перекрестных общих эффектов цены $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}$. Отметим, что в общем случае, при неравных долях расходов на товары ($\rho_1 \neq \rho_2$), перекрестный общий эффект изменения цены асимметричен: $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} \neq \frac{\partial x_2}{\partial p_1}$.

Домножив левую и правую части (2.28) на цену -го и разделив на объем потребления i-го товара, а также умножив и поделив последнее слагаемое на величину дохода:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i} = \frac{dx_i^h}{dp_j}\frac{p_j}{x_i} - \frac{x_j p_j}{M}\frac{\partial x_i^m}{\partial M}\frac{M}{x_i}; i, j = \{1, 2\};$$

можно переписать уравнение Слуцкого в коэффициентах эластичности:

$$\epsilon_{p_j}^{x_i} = \epsilon_{p_j}^{x_i^h} - \rho_j \epsilon_M^i, \quad (2.29)$$

где $\epsilon_{p_j}^{x_i} = \frac{\partial x_i^m}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}$ – перекрестная эластичность спроса на -й товар по цене товара j, $\epsilon_{p_j}^{x_i^h} = \frac{dx_i^h}{dp_j}\frac{p_j}{x_i}$ – перекрестная эластичность компенсированного спроса на товар i по цене товара j, $\rho_j = \frac{p_j x_j}{M}$ – доля расходов на j-й товар в доходе потребителя, $\epsilon_M^i = \frac{\partial x_i^m}{\partial M}\frac{M}{x_i}$ – эластичность спроса на товар i по доходу потребителя.

Возможны два альтернативных и локально эквивалентных определения стабильности благосостояния экономического агента: в трактовке Е.Е. Слуцкого и Дж.Р. Хикса (рис. 2.6). По Слуцкому, благосостояние потребителя не изменяется, если при вариациях цен товаров (например, снижении цены первого блага на рис. 2.6) он способен приобрести первоначальный набор товаров, выбранный им до ценовых сдвигов.

В концепции Хикса благосостояние отождествляется с полезностью товарного набора для потребителя[4]. По Хиксу, благосостояние потребителя неизменно, если после изменения продуктовых цен степень его удовлетворения от потребления остается на первоначальном уровне. Величины прямых и перекрестных эффектов дохода и замещения в трактовке Слуцкого и Хикса локально, при малых вариациях цен, будет совпадать, но при значительных изменениях цен они будут различаться (соответственно DIE_S, CIE_S, DSE_S, DSE_H, DIE_H, CIE_H, DSE_H, CSE_H на рис. 2.6).

Аналогично в данных двух различных трактовках неизменного благосостояния потребителя будут различаться величины CV_H, CV_S и EV_H, EV_S (рис. 2.6) при конечных, дискретных приращениях цен. При этом данные меры выгоды потребителя будут расходиться с изменением потребительского излишка по Маршаллу ΔCS.

Пример 2.10. Эффекты дохода и замещения, а также различные меры изменения благосостояния потребителя для предпочтений Кобба–Дугласа

Допустим, что предпочтения потребителя в простейшем, двухпродуктовом случае описываются функцией полезности Кобба–Дугласа (П1.3.2) со степенями $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{3}{4}$:

$$U = x_1^{1/2} x_2^{3/4}.$$

Пусть денежный доход потребителя составляет 100; цена первого товара первоначально равнялась 4, а затем снизилась до 2, тогда как цена второго – неизменна и составляет 3.

Рассчитаем эффекты дохода и замещения по Хиксу. Будем опираться на функции спроса по по Маршаллу (П2.1.3), которые при наших условиях принимают вид:

$$x_1^m = \frac{40}{p_1}, x_2^m = \frac{60}{p_2}.$$

[4] Хикс Дж.Р. Стоимость и капитал. – М.: Прогресс-Универс, 1993.

Первоначальные объемы потребления товаров (при $p_1^1 = 4,\ p_2 = 3$) составляли: $x_1 = 10,\ x_2 = 20$. При этом уровень полезности индивидуума $\overline{U}_0$ был приблизительно равен 29,9. При изменившейся цене первого товара ($p_1^2 = 2$) объем его потребления возрастет до 20 и сравняется с количеством второго товара, а уровень полезности индивидуума $\overline{U}_1$ составит примерно 42,29.

Рассчитаем вспомогательный оптимум, исходя из функций спроса по Хиксу (П2.6.1), которые по данным примера выглядят так:

$$x_1^h = U^{\frac{4}{5}}\left(\frac{2p_2}{3p_1}\right)^{3/4}, x_2^h = U^{\frac{4}{5}}\left(\frac{3p_1}{2p_2}\right)^{1/2}.$$

При $\overline{U}_0 = 29{,}9\ x_1 \approx 15{,}15,\ x_2 \approx 15{,}15$. Таким образом,

$$DSE_H \approx 5{,}15;\ DIE_H \approx 4{,}85. \qquad (П2.10.1)$$

При снижении p_1 данный товар становится относительно более дешевым, а второй – относительно более дорогим, поэтому за счет перекрестного эффекта замещения спрос на него снижается. Перекрестный эффект дохода уравновешивает перекрестный эффект замещения, и общий перекрестный эффект оказывается нулевым.

В трактовке Слуцкого, учитывая, что для приобретения исходной корзины товара по новым ценам потребуется доход в размере 80, вспомогательный оптимум, в соответствии с (П1.3.2), будет таким: $x_1 = x_2 = 16$. Значит, прямые эффекты дохода и замещения по Слуцкому таковы:

$$DSE_S = 6;\ DIE_S = 4. \qquad (П2.10.2)$$

Найдем эквивалентную и компенсирующую вариации дохода (по Хиксу):

$$CV_H = \int_4^2 \overline{U}_0^{\frac{4}{5}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{3}} dp_1 = 29{,}9^{\frac{4}{5}}\int_4^2 \left(\frac{3}{p_1}\right)^{\frac{2}{3}} dp_1 = 5^{\frac{5}{4}}3^{\frac{5}{3}}2^{\frac{11}{6}}\left(1 - \sqrt[3]{2}\right) \approx -24{,}3;$$

$$EV_H = -\int_4^2 \overline{U}_1^{\frac{4}{5}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{3}} dp_1 = -42{,}29^{\frac{4}{5}}\int_4^2 \left(\frac{3}{p_1}\right)^{\frac{2}{3}} dp_1 = 5^{\frac{5}{4}}3^{\frac{5}{3}}2^{\frac{37}{12}}(\sqrt[3]{2} - 1) \approx 32.$$

Определим изменение премии потребителя, опираясь на соответствующую функцию спроса по Маршаллу:

$$\Delta CS = \int_4^2 \frac{40}{p_1} dp_1 = 40\ln p_1|_4^2 = 40\ln 2 \approx 27{,}7.$$