2.5. Лемма Шепарда и экономический смысл множителя Лагранжа в задаче условной минимизации расходов

Построим функцию расходов покупателя подстановкой функций компенсированного спроса (2.22) в выражение стоимости купленной продукции:

$$E(p_1, p_2, \overline{U}) = p_1 x_1(p_1, p_2, \overline{U}) + p_2 x_2(p_1, p_2, \overline{U}). \tag{2.23}$$

Функции компенсированного спроса в случае достаточной гладкости функции полезности могут быть получены с использованием леммы Шепарда, которая утверждает, что полная производная функции расходов по цене каждого из товаров совпадает с частной:

$$\frac{dE}{dp_i} = x_i^h(p_1, p_2, \overline{U}) = \frac{\partial E}{\partial p_i}, i = 1, 2. \tag{2.24}$$

Лемму Шепарда можно доказать, применив теорему об огибающей к задаче связанной минимизации расходов (II.1a) и соответствующей функции Лагранжа (2.20).

Пример 2.8. Лемма Шепарда для функции полезности Кобба–Дугласа

Для функции полезности (П2.1.4) построим функцию расходов потребителя:

$$E(p_1, p_2, \overline{U}) = 2\overline{U}\sqrt{p_1 p_2}.$$

Ее производная по цене, например, первого товара равна соответствующей функции условного спроса:

$$\frac{dE}{dp_1} = \overline{U}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = x_1^h,$$

что и утверждает лемма Шепарда.

Множитель Лагранжа λ в задаче минимизации расходов (II.1a) представляет собой предельную величину расходов покупателя, связанную с изменением его уровня полезности. Для того чтобы обосновать этот факт, вновь применим теорему об огибающей к задаче условной минимизации расходов (II.1a) и функции Лагранжа (2.20):

$$\frac{dE}{d\overline{U}} = \lambda.$$

Вернемся к вопросу о влиянии изменения цен, скажем, снижения цены первого товара от p_1^1 до p_1^2 (рис. 2.12), на благосостояние потребителя. Недостатком маршаллианского потребительского излишка как меры соответствующих выигрышей или потерь является чрезмерно ограничительное допущение о постоянстве предельной полезности денег λ. Рассмотрим альтернативные подходы к оценке изменения индивидуального благосостояния.

Компенсирующая вариация дохода (CV) показывает, на какую величину нужно изменить расходы потребителя, чтобы при новых ценах его благосостояние осталось бы на неизменном уровне. Эквивалентная вариация дохода (EV) показывает, на какую величину нужно скорректировать расходы (доход) потребителя, чтобы (при фиксированных на исходном уровне ценах) его благосостояние изменилось на ту же величину, что и при данной вариации цен.

Компенсирующую и эквивалентную вариации дохода можно подсчитать, опираясь на лемму Шепарда. Очевидно, что подставив в функцию расходов (2.23) косвенную функцию полезности (2.16), получаем их величину, тождественно совпадающую с доходом, обеспечивающим потребителю данный уровень полезности:

$$E\big(p_1, p_2, U(p_1, p_2, M)\big) \equiv M.$$

Выражение, стоящее в левой части данного тождества, носит название денежной функции полезности.

Обозначим через $U_0 = U(p_1^1, p_2, M_0)$ исходный уровень полезности, соответствующий первоначальной цене первого товара p_1^1 и доходу M_0, а через $U_1 = U(p_1^2, p_2, M_0)$ – новый уровень полезности, соответствующий изменившейся цене p_1^2 при той же величине дохода. Интегрируя функцию спроса по Хиксу на первый товар, соответствующую первоначальному уровню полезности, по отрезку от p_1^1 до p_1^2, получаем разность между величиной расходов, обеспечивающей исходную полезность при новой цене первого товара, и заданной величиной располагаемого дохода потребителя, т.е. компенсирующую вариацию дохода (CV):

$$\int_{p_1^1}^{p_1^2} x_1^h(p_1, p_2, U_0)dp_1 = \int_{p_1^1}^{p_1^2} \frac{dE(p_1, p_2, U_0)dp_1}{dp_1} =$$

$$E\big(p_1^2, p_2, U(p_1^1, p_2, M_0)\big) - E\big(p_1^1, p_2, U(p_1^1, p_2, M_0)\big) = E(p_1^2, p_2, U_0) - M_0 = CV.$$

Таким образом, компенсирующая вариация дохода представляет собой площадь под графиком функции спроса по Хиксу, соответствующей изначальному уровню полезности, от первого до второго значения цены товара ($CV = S_{p_1 p_2 A E_1}$ на рис. 2.12)[1].

Аналогично, интегрируя функцию спроса по Хиксу на первый товар, соответствующую конечному уровню полезности, по отрезку от p_1^1 до p_1^2, получаем разность между заданной величиной располагаемого дохода и величиной расходов потребителя, обеспечивающей новую полезность при исходной цене первого товара, т.е. эквивалентную вариацию дохода (EV):

$$\int_{p_1^1}^{p_1^2} x_1^h(p_1, p_2, U_1)dp_1 = \int_{p_1^1}^{p_1^2} \frac{dE(p_1, p_2, U_1)dp_1}{dp_1} =$$

$$= E\big(p_1^2, p_2, U(p_1^2, p_2, M_0)\big) - E\big(p_1^1, p_2, U(p_1^2, p_2, M_0)\big) = M_0 - E(p_1^1, p_2, U_1) = EV.$$

Таким образом, эквивалентная вариация дохода представляет собой площадь под графиком функции спроса по Хиксу, соответствующей конечному уровню полезности, от первого до второго значения цены товара ($EV = S_{p_1 p_2 E_1 B}$ на рис. 2.12).

Очевидно, что CV при снижении цены равна EV при ее повышении, и наоборот.

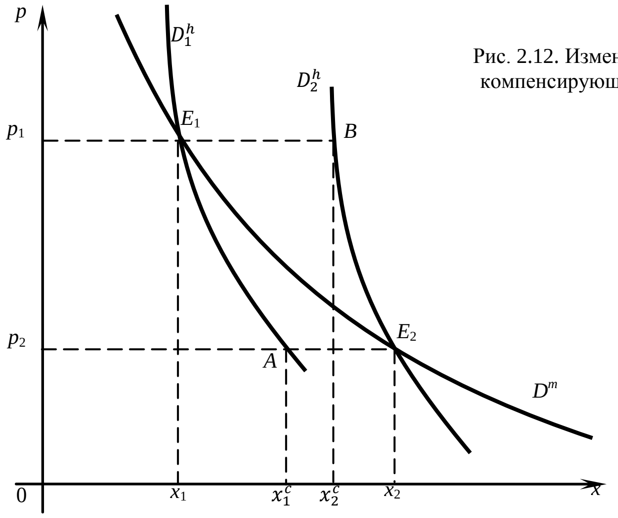

Рис. 2.12. Изменение потребительского излишка по Маршаллу, компенсирующая и эквивалентная вариации дохода по Хиксу

[1] В координатах «p,x» функция компенсированного спроса (по Хиксу) убывает быстрее (в случае нормальных товаров), чем маршаллианская функция спроса, так как первая учитывает только эффект замещения, а вторая – как эффект замещения, так и эффект дохода.