2.4. Связанная минимизация расходов потребителя и функции условного спроса по Хиксу

Симметричным по отношению к задаче максимизации полезности при ограничении по бюджету (I.1a) является поведение потребителя, ориентирующегося на минимизацию расходов при условии обеспечения заданного уровня полезности:

$$\min_{x_1,x_2}(p_1x_1 + p_2x_2):$$
$$U(x_1,x_2) \geqslant \bar{U}, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$$

Аналогично задаче связанной максимизации полезности (I.1a) оптимум потребителя в задаче минимизации расходов достигается на границе ограничения по заданному уровню полезности, что позволяет упростить постановку последней задачи:

$$\begin{gathered}\min_{x_1,x_2}(p_1x_1 + p_2x_2): \\ U(x_1,x_2) = \bar{U}.\end{gathered} \tag{II. 1a}$$

Здесь, как и ранее (I.1a), предполагается, что оптимум в задаче (II.1a) является внутренним: $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Симметрия между задачами связанной максимизации полезности (I.1a) и минимизации расходов (II.1a) потребителя при условии равенства соответствующих предпочтений и товарных цен состоит в следующем. Если рассчитать, используя решение (x_1^*, x_2^*), максимальный уровень полезности U^* в задаче (I.1a) и рассматривать его в качестве ограничения $\bar{U}$, то решение задачи (II.1a) (x_1^*, x_2^*) совпадет с ответом в (I.1a). При этом величина расходов потребителя в (II.1a) совпадет с его ограничением по доходу в (I.1a).

Другими словами, если $\max_{x_1,x_2} U(x_1^*, x_2^*) = \bar{U}$ при условии $p_1x_1 + p_2x_2 \leqslant \bar{M}$, $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$, то $\min_{x_1,x_2}(p_1x_1^* + p_2x_2^*) = \bar{M}$ при выполнении ограничения: $U(x_1,x_2) \geqslant \bar{U}, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$.

При достаточной гладкости технологии производства как разновидности функционала качества хозяйственной деятельности, в частности, принадлежности ее классу C^2 дважды непрерывно дифференцируемых функций, решение задачи минимизации затрат при условии достижения заданного уровня полезности (II.1a) аналогично задаче максимизации полезности при ограничении по расходам (I.1a) можно свести к исследованию на безусловный экстремум функции Лагранжа:

$$\mathfrak{L} = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda(U(x_1,x_2) - \bar{U}). \tag{2.20}$$

Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее дифференциала:

$$\begin{aligned}d\mathfrak{L} = dE - d\big(\lambda(U(x_1,x_2) - \bar{U})\big) &= dE - (U(x_1,x_2) - \bar{U})d\lambda - \lambda dU(x_1,x_2) \\ &= p_1dx_1 + p_2dx_2 - (U(x_1,x_2) - \bar{U})d\lambda - \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2\right) \\ &= \left(p_1 - \lambda\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(p_2 - \lambda\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)dx_2 - (U(x_1,x_2) - \bar{U})d\lambda \\ &= \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\lambda}d\lambda = 0.\end{aligned}$$

Дифференциал функции Лагранжа может быть нулевым при любых значениях дифференциалов независимых переменных, только если множители при данных дифференциалах являются нулевыми[1]:

[1] С формальной точки зрения здесь, как и в задаче (I.1a), следовало бы ввести дополнительно множитель Лагранжа λ_0 при целевой функции (расходов), чтобы учесть возможность ее незначимости, а

$$
(2.21) \quad \begin{cases} \lambda \dfrac{\partial U}{\partial x_1} = p_1, & (2.21.1) \\ \lambda \dfrac{\partial U}{\partial x_2} = p_2, & (2.21.2) \\ U(x_1, x_2) = \bar{U}; & (2.21.3) \end{cases}
$$

из чего аналогично задаче условной максимизации полезности (I.1a) вытекает эквимаржинальный принцип (2.10).

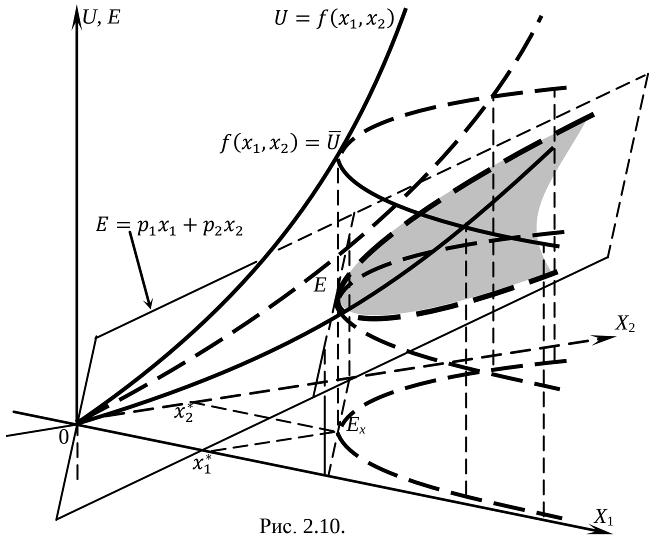

Рис. 2.10.
Пространственная иллюстрация решения задачи условной минимизации расходов

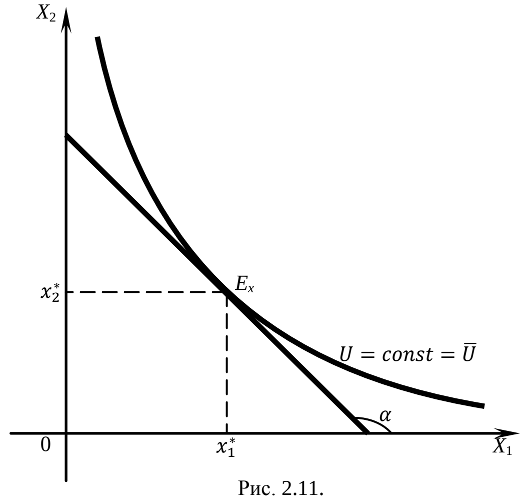

Рис. 2.11.
Оптимальная корзина товаров на плоскости

Решая задачу (II.1*a*), можно получить зависимости между оптимальными количествами потребляемых товаров и их ценами, а также уровнем полезности потребителя $\bar{U}$, выступающим в качестве ограничения:

$$x_i^h = x_i^*(p_1, p_2, \bar{U}), i = 1, 2; \qquad (2.22)$$

которые называются функциями условного спроса по Хиксу, или компенсированного спроса.

Пример 2.6. Функция спроса по Хиксу для предпочтений Кобба–Дугласа

Если функция полезности имеет вид $U = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, то $MRS_{12} \equiv \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2}$. Выражая из данного соотношения объем потребления одного товара – через объем другого и заменяя соответствующую переменную в функции полезности, приходим к функциям спроса по Хиксу:

$$x_1^h = U^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\beta}, x_2^h = U^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha}. \qquad (П2.6.1)$$

значит, отсутствия решения задачи (II.1*a*), когда λ_0 оказывается нулевым. Однако, из необходимых условий минимизации расходов, которые в более общем виде будут выглядеть так: $\lambda_0 p_j = \lambda MU_j$, $j = \{1, 2\}$, в силу ненасыщаемости полезности ($MU_j > 0$), при $\lambda_0 = 0$ оказывается и $\lambda = 0$, чего не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$, и без ограничения общности его можно положить равным единице, или, что эквивалентно, поделить на него функцию (2.20), пронормировав тем самым вектор множителей Лагранжа.

Например, для функции полезности (П2.1.4)[2]:

$$x_1^h = \bar{U}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, x_2^h = \bar{U}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}. \qquad (П2.6.2)$$

Пример 2.7. Функция компенсированного спроса для совершенных субститутов

В случае линейных предпочтений в задаче условной минимизации расходов потенциально существуют три оптимальные ситуации, рассмотренные в примере 2.3. При $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2}$, минимизируя расходы, потребители целиком отказываются от потребления второго товара (точка E_1 на рис. П2.3.1), а значит, уровень полезности будет пропорционален объему потребления первого: $\bar{U} = \alpha x_1$. При $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2}$, наоборот, все расходы уйдут на второе благо: $x_1 = 0$ (точка E_2 на рис. П2.3.1). В пограничной ситуации $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}$ оптимальной будет любая точка на отрезке $[E_1E_2]$ (рис. П2.3.1), следовательно, диапазон возможных объемов потребления первого товара будет ограничен значениями, полученными выше: 0 и $\bar{U}/\alpha$.

Таким образом, для линейной функции полезности (П1.5) поверхность условного спроса по Хиксу на первый товар состоит из двух горизонтальных и одного вертикального сегментов (рис. П2.7):

$$x_1^h = \begin{cases} \frac{\bar{U}}{\alpha}, \text{если } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2}; \\ 0, \text{если } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2}; \\ \left[0, \frac{\bar{U}}{\alpha}\right], \text{если } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}. \end{cases}$$

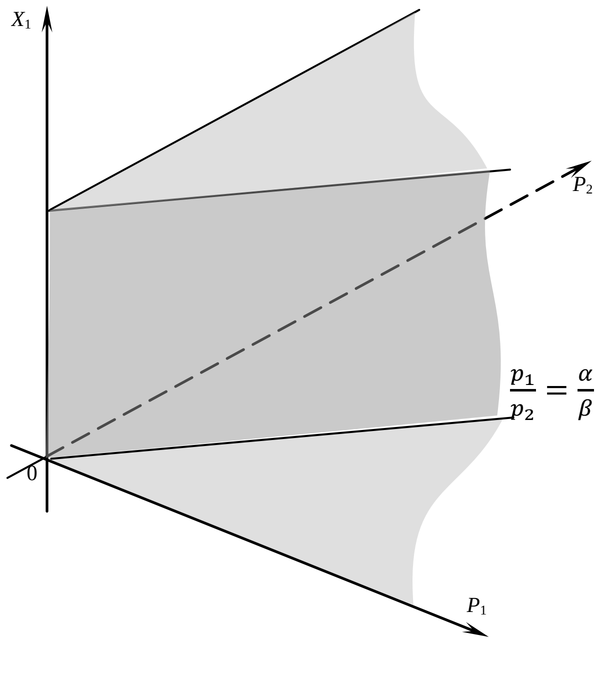

Рис. П2.7.
Поверхность условного спроса на один из товаров, являющихся совершенными субститутами

[2] В частности, если $p_1 = 5$, $p_2 = 10$, $\bar{U} = 5\sqrt{2}$, то аналогично задаче условной максимизации полезности (см. пример 2.1) $x_1 = 10$, $x_2 = 5$.