2.3. Тождество Роя, выгода потребителя по Маршаллу и экономический смысл множителя Лагранжа в задаче условной максимизации полезности

Для функций спроса как вариаций решения задачи (I.1a) потребительского выбора по ценам справедливо тождество Роя:

$$x_i(p_1, p_2, M) = -\frac{\frac{dU}{dp_i}}{\frac{dU}{dM}}, i = 1,2. \tag{2.13}$$

В ходе доказательства этого тождества функции спроса подставляются в бюджетное ограничение:

$$E = p_1x_1 + p_2x_2 = p_1x_1(p_1, p_2, M) + p_2x_2(p_1, p_2, M) \equiv M. \tag{2.14}$$

Далее необходимо продифференцировать бюджетное тождество (2.14) по цене первого товара, полагая доход потребителя постоянной величиной:

$$\frac{dE}{dp_1} = x_1(p_1, p_2, M) + p_1\frac{dx_1}{dp_1} + p_2\frac{dx_2}{dp_1} \equiv 0, \text{или}$$

$$-x_1 \equiv p_1\frac{dx_1}{dp_1} + p_2\frac{dx_2}{dp_1}. \tag{2.15}$$

Построим теперь косвенную функцию полезности:

$$U(x_1, x_2) = U\big(x_1(p_1, p_2, M), x_2(p_1, p_2, M)\big). \tag{2.16}$$

Если продифференцировать ее по цене первого товара, учитывая условия оптимальности потребительской корзины (2.9) и тождество (2.15), то результатом будет следующее соотношение, которое является ключевым для получения тождества Роя[1]:

$$\frac{dU}{dp_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dp_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dp_1} = \lambda p_1\frac{dx_1}{dp_1} + \lambda p_2\frac{dx_2}{dp_1} = \lambda\left(p_1\frac{dx_1}{dp_1} + p_2\frac{dx_2}{dp_1}\right) = -\lambda x_1(p_1, p_2, M). \tag{2.17}$$

[1] По сути, здесь работает теорема «об огибающей» (ср.: Gravelle H., Rees R. Microeconomics. – 2nd ed. – L., N.Y.: Longman, 1992), которая утверждает, что в оптимальной точке (x^*, λ^*) полная производная целевой функции задачи условной оптимизации (ii) по параметру α_k равна частной производной соответствующей функции Лагранжа (iii):

$$\frac{df^*}{d\alpha_k} = \frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial f^*}{\partial \alpha_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k}. \tag{v}$$

Действительно, выпишем полную производную по параметру α_k целевой функции и ограничений задачи (ii):

$$\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha_k} = \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x_l}\frac{dx_l}{d\alpha_k}, \tag{vi}$$

$$\frac{dg_i(x,\alpha)}{d\alpha_k} = \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial x_l}\frac{dx_l}{d\alpha_k} = 0, i = 1, \dots, n.$$

Умножая последнее равенство при каждом i на λ_i^* и складывая их по всем $i = 1, \dots, n$, получаем нулевую сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial x_l}\frac{dx_l}{d\alpha_k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{l=1}^{h}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial x_l}\frac{dx_l}{d\alpha_k} = 0.$$

Прибавляя к правой части (vi) предыдущее равенство:

$$\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha_k} = \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{l=1}^{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_l}\right)\frac{dx_l}{d\alpha_k}$$

и учитывая, что в силу (iv) в точке оптимума (x^*, λ^*) выражение в скобках равно нулю, получаем теорему об огибающей (v).

Покажем экономический смысл множителя Лагранжа λ в задаче связанной максимизации полезности (I.1a). Продифференцировав по доходу косвенную функцию полезности (2.16) с учетом условий оптимальности (2.9) в задаче (I.1a), а также равенства единице производной бюджетного ограничения по доходу (2.6), получаем:

$$\frac{dU}{dM} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dM} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dM} = \lambda\left(p_1\frac{dx_1}{dM} + p_2\frac{dx_2}{dM}\right) = \lambda. \qquad (2.18)$$

Итак, по экономическому смыслу множитель Лагранжа в задаче оптимизации поведения потребителя (I.1a) представляет собой предельную полезность денег[2].

Объединяя соотношения (2.17) и (2.18), можно получить тождество Роя (2.13) для первого товара. Очевидно, что аналогичные рассуждения справедливы и для второго блага.

Пример 2.5. Тождество Роя для функции полезности Кобба–Дугласа

Если полезность потребителя описывается зависимостью Кобба–Дугласа (П2.1.4), то функции спроса имеют вид (П2.1.5). Поэтому косвенная функция полезности будет выглядеть так:

$$U = \frac{M}{2\sqrt{p_1 p_2}}.$$

Вычисление величины множителя Лагранжа

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}$$

подтверждает тождество Роя для первого товара:

$$\frac{\partial U}{\partial p_1} = -\frac{M}{4\sqrt{p_1^3 p_2}} = -x_1\frac{\partial U}{\partial M}.$$

В силу (2.17) изменение полезности потребителя при бесконечном изменении цены товара p_1 задается следующим соотношением: $dU = -\lambda x_1 dp_1$. Опираясь на данное равенство, можно рассчитать изменение полезности индивидуума при колебании рыночной цены покупаемого продукта:

$$\Delta U = -\int_{p_1^1}^{p_1^2} \lambda x_1(p_1, \bar{p}_2, \bar{M})dp_1 = \int_{p_1^2}^{p_1^1} \lambda x_1(p_1, \bar{p}_2, \bar{M})dp_1. \qquad (2.19)$$

Если допустить, что предельная полезность денег λ является величиной постоянной и не меняется при колебании цен товаров, то в выражении (2.19) его можно будет вынести за знак интеграла. Тогда изменение полезности потребителя можно будет измерить с точностью до константы λ площадью под графиком маршаллианского спроса, ограниченной сверху и снизу изменившимся уровнем цены на данный товар. Эта площадь ($S_{p_1 p_2 E_2 E_1}$ на рис. 2.12) называется выигрышем, премией или излишком потребителя по Маршаллу.

[2] Определяя экономический смысл множителя Лагранжа, мы также фактически опираемся на теорему об огибающей применительно к задаче связанной максимизации полезности (I.1a) и соответствующей функции Лагранжа (2.8).