2.1. Максимизация полезности при ограничении по доходу потребителя

Допустим, что каждый из l товаров покупается данным потребителем по цене p_h. На протяжении большей части нашего анализа будем полагать, что цена h-го товара едина для всех потребителей, т.е. не будем принимать во внимание, если обратное не оговорено специально, возможность ценовой дискриминации, когда разным покупателям, располагающим различным уровнем дохода, продается одинаковые блага по разным ценам, что не связано с различиями в качестве товаров и затратами на их производство. Для нас здесь существенно, что разные цены устанавливаются именно на качественно различные блага.

Пока абстрагируемся от свободных благ и будем рассматривать только экономические товары и услуги. Итак, будем считать, что ни одна из товарных цен не равна нулю, и следовательно, все координаты любого возможного вектора цен $p = \{p_h\}_{h=1}^{l}$ положительны ($p_h > 0, h = 1, \dots, l$). Другими словами, множество P векторов цен p является подмножеством $\mathbb{R}_l^+ \backslash \{0\}$: $P = \left\{p = \{p_h\}_{h=1}^{l} \middle| p_h > 0\right\}$. Будем использовать даже еще более сильное предположение о том, что у множества ценовых векторов P существует положительная нижняя граница – так называемая «цена спичек» $\underline{p}$. Все компоненты любого вектора из множества цен P должны быть по крайней мере не меньше $\underline{p}$:

$$\exists \underline{p} \in \mathbb{R}_+ : \forall \{p_h\}_{h=1}^{l}, p_h > 0, p_h \geqslant \underline{p}, h = 1, \dots, l. \qquad (2.1)$$

Итак, ценовое множество P – это произвольное множество из $\mathbb{R}_l^+$, отделенное от нуля ($\bar{P} \subset int\mathbb{R}_l^+$, где $P = \{p \in \mathbb{R}_l^+\}$).

Кроме физических ограничений, на множество потребительских корзин X накладывается экономическое, или бюджетное, ограничение. Оно заключается в том, что потребитель не может израсходовать на покупки количество денег, превышающее его доход $M \in \mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что доход предоставляется потребителю изначально и бесплатно, например, в качестве наследства. Итак, стоимость покупаемых товаров должна быть не больше дохода потребителя, т.е. должно выполняться нестрогое неравенство:

$$\sum_{j=1}^{l} p_j x_j \leqslant M. \qquad (2.2)$$

Обозначим через E выражение расходов покупателя:

$$E \equiv \sum_{j=1}^{l} p_j x_j. \qquad (2.3)$$

Граница финансового условия (2.2), на которой расходы покупателя совпадают с его доходом:

$$\sum_{j=1}^{l} p_j x_j = M, \qquad (2.4)$$

в трехмерном пространстве, т.е. в случае двухпродуктовых корзин товаров ($l = 2$), представляет собой вертикальную плоскость (рис. 2.1).

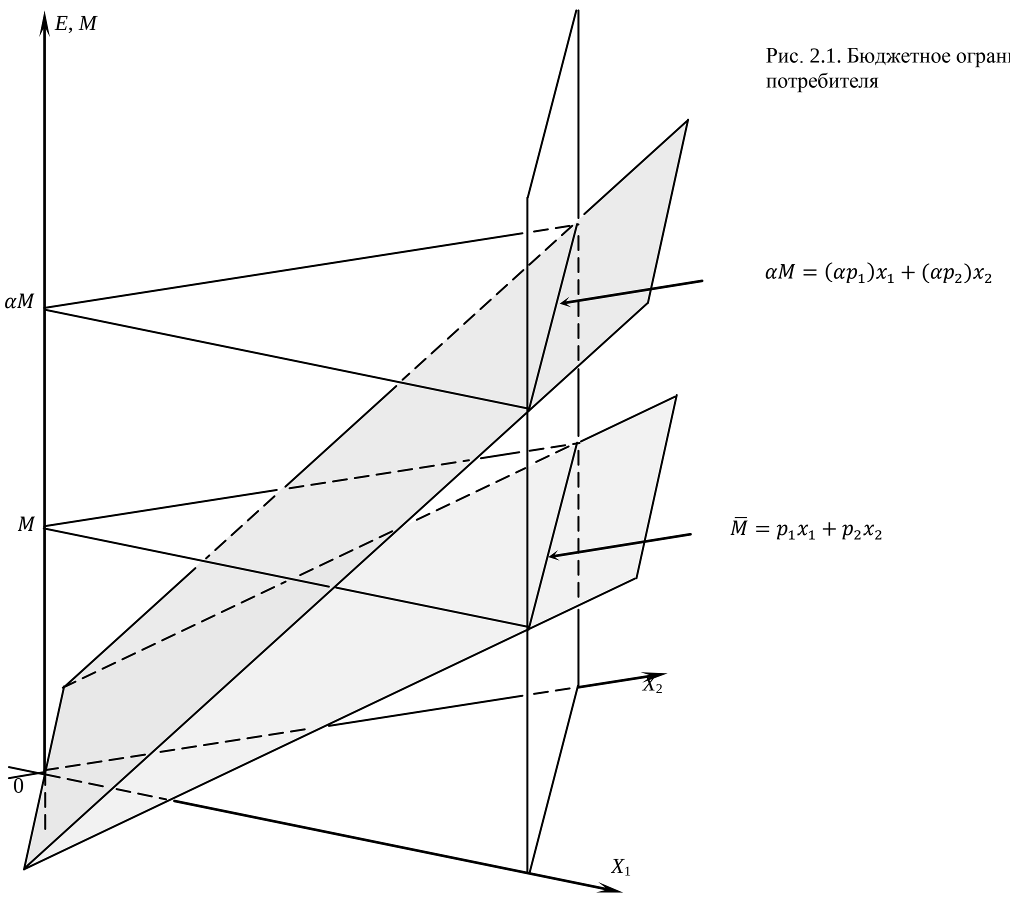

Рис. 2.1. Бюджетное ограничение потребителя

Действительно, выражение (2.4) в трехмерном пространстве означает пересечение плоскости расходов (2.3) и горизонтальной плоскости фиксированного дохода $E = M$. Расходы покупателя (2.3) являются однородными первой степени (1.13) по ценам потребляемых продуктов. При увеличении цен в α раз плоскость расходов поворачивается вверх вокруг прямой, проходящей через начало координат. При этом для каждой данной комбинации потребляемых благ в α раз возрастает величина расходов по отношению к их первоначальной величине, равной доходу M:

$$\sum_{j=1}^{l=2} (\alpha p_j)x_j = \alpha \sum_{j=1}^{l=2} p_j x_j = \alpha E(p_1, p_2) = \alpha M. \tag{2.5}$$

Это значит, что теперь граница финансового условия (2.4) будет соответствовать пересечению новой плоскости расходов с горизонтальной плоскостью, проведенной на уровне αM. Очевидно, что прямая, по которой пересекутся эти плоскости, будет соответствовать тому же множеству товарных наборов, что и предыдущая линия пересечения плоскости расходов (2.3) и горизонтальной плоскости фиксированного дохода M. Обе эти прямые проецируются на одну и ту же линию на горизонтальной координатной плоскости $X_1 0 X_2$, т.е. лежат в одной и той же вертикальной плоскости. Варьируя масштабирующий множитель $\alpha \in \mathbb{R}_+$ в соотношении (2.5), получим бесконечное множество линий пересечения плоскостей расходов с произвольным наклоном и горизонтальных плоскостей дохода αM, которое образует вертикальную плоскость – границу бюджетного ограничения (2.2) в трехмерном пространстве (рис. 2.1).

Покажем, что множество физически и экономически доступных для потребителя корзин товаров, которое мы обозначим через $S \equiv \{x | x \in \mathbb{R}_l^+, \sum_{j=1}^{l} p_j x_j \leqslant M\}$, является замкнутым и ограниченным, следовательно, компактным. Потребительское множество

X представляет собой неотрицательный ортант $\mathbb{R}_l^+$. Следовательно, оно замкнуто. Ограничение по доходу (2.2) представляет собой полупространство, включающее границу – гиперплоскость (2.4). Поэтому оно является замкнутым множеством. Поскольку S является пересечением замкнутого множества физически доступных для потребителя корзин товаров X и замкнутого экономического, или бюджетного, ограничения (2.2), постольку допустимое потребительское множество S само является замкнутым.

Покажем ограниченность множества S. Каждый вектор x из S должен удовлетворять бюджетному ограничению (2.2). Выделим из всей потребительской корзины товар под номером h. Тогда неравенство (2.2) переписывается в следующем виде: $p_h x_h \leqslant M - \sum_{k=1,k\neq h}^{l} p_k x_k$. Его можно ослабить: поскольку $x_k \geqslant 0$, постольку можно заменить все x_k нулями: $p_h x_h \leqslant M$, или $x_h \leqslant \frac{M}{p_h}$. Деление здесь на p_h было возможным, и при этом сохранился знак неравенства, поскольку мы исключаем из рассмотрения свободные блага (2.1).

Ценовое множество P, по предположению, является ограниченным снизу (2.1). Заменим в последнем неравенстве p_h на его нижнюю границу $\underline{p}$: $x_h \leqslant \frac{M}{\underline{p}}$.

Число $M/\underline{p}$ является верхней границей множества X для данного потребителя, поскольку любой его элемент по крайней мере не больше, чем $M/\underline{p}$. Кроме того, $x_h \geqslant 0$. В итоге получаем двойное неравенство $0 \leqslant x_h \leqslant \frac{M}{\underline{p}}$, в котором M и $\underline{p}$ – это абсолютные, не зависящие от h константы. Выбор элемента x_h был произвольным, и полученное неравенство справедливо для любого h. Итак, множество S ограничено: для него существуют нижняя и верхняя границы.

Таким образом, допустимое потребительское множество S замкнуто и ограничено, а значит, компактно.

Кроме того, допустимое для потребителя множество S является выпуклым. Некоторое множество называется выпуклым, если любой вектор x, лежащий на отрезке, соединяющем произвольные векторы x_1 и x_2 из этого множества, $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\alpha \in [0,1]$, также принадлежит данному множеству. Потребительское множество X является выпуклым как неотрицательный ортант действительных чисел.

Действительно, если взять два товарных набора $\hat{x} \geqslant 0$, $\check{x} \geqslant 0$, т.е. векторы с неотрицательными координатами $\hat{x}_h \geqslant 0$, $\check{x}_h \geqslant 0$, $h = 1, \dots, l$, то любая корзина товаров, расположенная на соединяющем их отрезке, также будет иметь неотрицательные координаты: $x_h = \lambda\hat{x}_h + (1-\lambda)\check{x}_h \geqslant 0$, $h = 1, \dots, l$, ведь $\lambda \geqslant 0$ и $1 - \lambda \geqslant 0$.

Бюджетное ограничение (2.2) является полупространством, ограниченным гиперплоскостью $\sum_{h=1}^{l} p_h x_h = M$, а значит, оно также выпуклое множество. Действительно, если взять два товарных набора $\check{x}$ и $\hat{x}$, удовлетворяющих бюджетному ограничению: $\sum_{h=1}^{l} p_h \check{x}_h \leqslant M$, $\sum_{h=1}^{l} p_h \hat{x}_h \leqslant M$, то любая корзина товаров, расположенная на соединяющем их отрезке: $x = \lambda\check{x} + (1-\lambda)\hat{x}$, что подразумевает выполнение покоординатных равенств $x_h = \lambda\check{x}_h + (1-\lambda)\hat{x}_h$, $h = 1, \dots, l$, будет принадлежать бюджетному полупространству

$$\sum_{h=1}^{l} p_h x_h = \sum_{h=1}^{l} p_h(\lambda\check{x}_h + (1-\lambda)\hat{x}_h) = \lambda\sum_{h=1}^{l} p_h\check{x}_h + (1-\lambda)\sum_{h=1}^{l} p_h\hat{x}_h \leqslant \lambda M + (1-\lambda)M = M.$$

Таким образом, множество S как пересечение выпуклых множеств – бюджетного ограничения (2.2) и потребительского множества X – само является выпуклым.

Потребительский выбор представляет собой максимизацию полезности в условиях ограниченных денежных ресурсов:

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2):$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant M, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$$

Докажем, что в силу непрерывности функции полезности и компактности допустимого по физическим и экономическим соображениям для потребителя множества S решение данной задачи связанной максимизации полезности – оптимальный потребительский набор x – существует. По доказанному, допустимое множество S в данной задаче потребительского выбора – компакт. Поэтому по теореме Вейерштрасса[1] непрерывная (по предположению) функция полезности $U: x \mapsto U(x)$, $x \in S$ достигает максимума на допустимом множестве S. Таким образом, задача связанной максимизации полезности имеет решение, т.е. оптимальный потребительский набор x существует.

Рис. 2.2 и 2.3 иллюстрируют соответственно в пространстве и на плоскости решение задачи потребительского выбора (I.1). E – это точка в трехмерном пространстве, соответствующая максимальному уровню полезности при выполнении бюджетного ограничения, который достигается при выборе оптимальной корзины товаров (x_1^*, x_2^*). E_x – это проекция точки E на плоскость $X_1 0 X_2$.

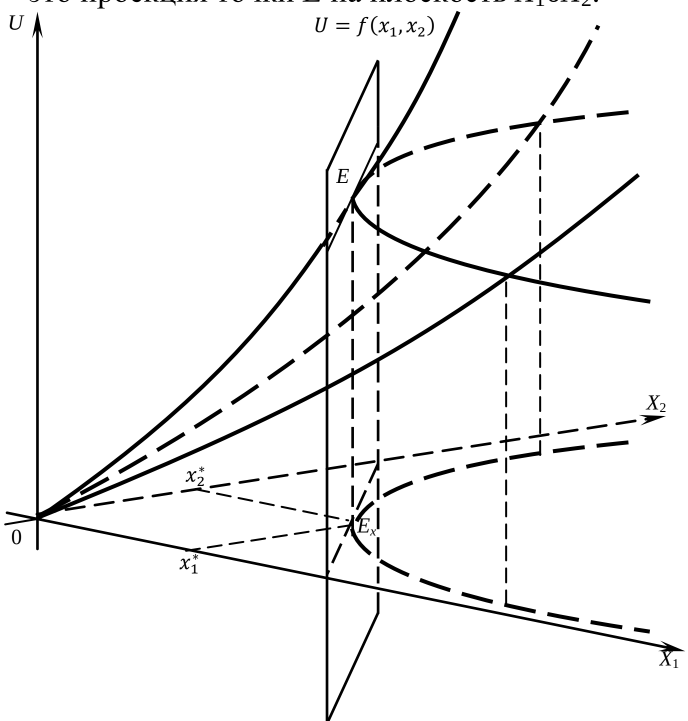

Рис. 2.2. Пространственная иллюстрация решения задачи максимизации полезности

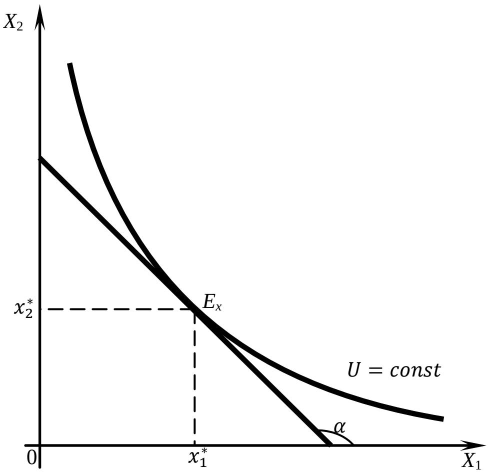

Рис. 2.3. Оптимальная корзина товаров на плоскости

Если предположить строгую квазивогнутость функции полезности, то решение задачи условной максимизации полезности, т.е. оптимальный потребительский набор x, является единственным. Будем доказывать единственность оптимального потребительского набора от противного. Пусть найдется другой, не равный полученной нами потребительской корзине x набор благ x', который также является решением данной задачи. По доказанному, допустимое множество S является выпуклым. Поэтому весь интервал, соединяющий точки x и x' и состоящий из точек вида $\alpha x + (1 - \alpha)x'$, $\alpha \in (0, 1)$, содержится в S. Поскольку функция полезности является строго квазивогну-

[1] Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч.1.

той, постольку $U(\alpha x + (1-\alpha)x') > U(x) = U(x')$. Но данное неравенство противоречит условию, гласящему, что x и x' – решения задачи связанной максимизации полезности, т.е. оптимальные потребительские наборы. Полученное противоречие показывает, что гипотеза о неединственности оптимального потребительского набора является ложной. Следовательно, оптимальный потребительский набор x является единственным решением данной задачи.

Итак, доказав единственность оптимального потребительского набора, мы показали, что локальный максимум в задаче связанной максимизации полезности совпадает с глобальным.

Если функция полезности не является строго квазивогнутой, то возможна неединственность оптимального потребительского набора. На линии уровня нестрого квазивогнутой функции полезности могут существовать прямые участки. Касание бюджетного ограничения с таким участком будет давать множественность оптимального потребительского набора товаров (рис. 2.4).

Решение задачи потребительского выбора может быть неединственным также в случае невыпуклости бюджетного ограничения, в частности, в случае снижения цены при достижении определенного, порогового уровня продаж (рис. 2.5).

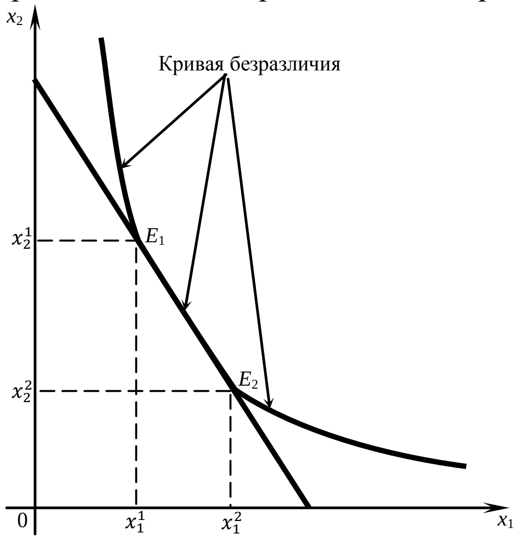

Рис. 2.4. Неединственность оптимальной потребительской корзины товаров при нестрогой выпуклости кривых безразличия

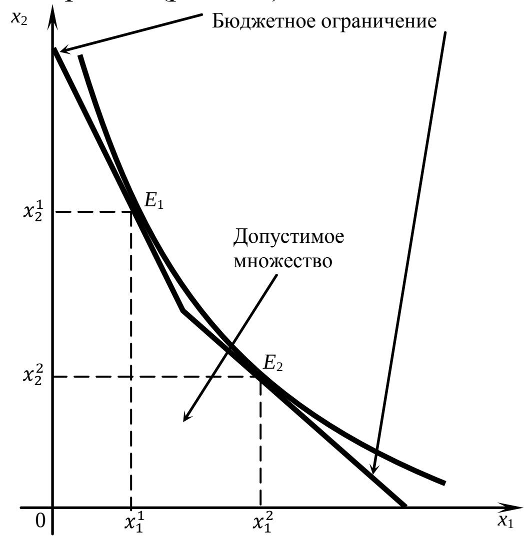

Рис. 2.5. Неединственность оптимальной потребительской корзины товаров при невыпуклости допустимого множества

Решение задачи связанной максимизации полезности – оптимальный потребительский набор x^* – обладает таким свойством, что бюджетное ограничение на нем выполняется в виде равенства (2.4): $\sum_{h=1}^{l} p_h x_h^* = M$.

Покажем это, пользуясь методом доказательства от противного. Предположим, что данное утверждение неверно: $\sum_{h=1}^{l} p_h x_h^* < M$. Поскольку вся совокупность потребительских корзин совпадает с множеством неотрицательных действительных чисел, она не ограничена снизу, т.е. для каждого индивидуума потенциально физически доступны произвольно большие объемы потребительских товаров; в этом случае найдется потребительский вектор x_1, такой, что $x_1 > x^*$ и $\sum_{h=1}^{l} p_h x_h^1 \leqslant M$, поскольку линейная функция, в данном случае $(p_1 x_1^* + p_2 x_2^*)$, является непрерывной[2]. В теории традиционно предполагается, что потребление индивидуума обладает свойством ненасыщаемости. Другими словами, вектор x_1, содержащий больше товаров, чем набор x^*, должен

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. – М.: Наука, 1989.

быть более предпочтителен для потребителя, т.е. из того, что $x_1 > x^*$, следует $U(x_1) > U(x^*)$. Значит, потребительский набор x^*, лежащий во внутренности бюджетного ограничения, не является оптимальным. Полученное противоречие показывает, что выдвинутая гипотеза неверна, и бюджетное ограничение при решении задачи связанной максимизации полезности выполняется как равенство (2.4).

Продифференцируем бюджетное ограничение (2.4) для двухпродуктовой корзины товаров по величине дохода M:

$$\frac{dM}{dM} = p_1 \frac{dx_1}{dM} + p_2 \frac{dx_2}{dM} = 1. \tag{2.6}$$

Поделим и домножим каждое слагаемое в середине равенства (2.6) на объем потребления соответствующего товара, а также на величину дохода индивидуума: $\frac{p_1 x_1}{M} \frac{M dx_1}{x_1 dM} + \frac{p_2 x_2}{M} \frac{M dx_2}{x_2 dM} = 1$. Таким образом, исходя из жесткого бюджетного ограничения (2.4), можно сформулировать закон Энгеля, который утверждает, что произведения долей расходов (ρ_i), соответствующих каждому из товаров $(i = 1, 2)$, на эластичность спроса на него по доходу (ε_i^M) дают в сумме по всем товарам единицу[3]:

$$\rho_1 \varepsilon_1^M + \rho_2 \varepsilon_2^M = 1. \tag{2.7}$$

С учетом жесткого бюджетного ограничения (2.4), предполагая, что оптимум является внутренним, т.е. потребляются положительные количества каждого из товаров $(x_1 > 0, x_2 > 0)$, задачу связанной максимизации полезности можно поставить в более простом виде:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2): \\ &p_1 x_1 + p_2 x_2 = M. \end{aligned} \tag{I.1a}$$

В случае дифференцируемости функции полезности для решения задачи (I.1a) следует составить функцию Лагранжа:

$$\mathfrak{L} = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M), \tag{2.8}$$

где λ – множитель Лагранжа[4]. Необходимым условием экстремума является равенство нулю ее дифференциала: $d\mathfrak{L} = dU(x_1, x_2) - \lambda(p_1 dx_1 + p_2 dx_2 - M) - (p_1 x_1 + p_2 x_2 - M) d\lambda = 0$. Здесь мы предполагаем доход потребителя M и рыночные цены p_1, p_2 постоянными величинами. Если сгруппировать в данном равенстве члены с одинаковыми дифференциалами товаров, расписав при этом дифференциал функции полезности (1.10), то из необходимого условия экстремума вытекает система[5]:

---

[3] Очевидно, что данный закон легко распространяется на случай произвольного количества товаров:

$$\sum_{h=1}^{l} \rho_h \varepsilon_h^M = 1.$$

[4] В задачах потребительского выбора (в частности, в задаче связанной максимизации полезности (I.1a)) градиенты целевой функции (полезности – вектор предельных полезностей) и ограничения (в данном случае – бюджетного – вектор цен) являются линейно зависимыми. Множитель Лагранжа λ при этом выступает коэффициентом проррциональности.

[5] С формальной точки зрения здесь следовало бы ввести дополнительно множитель Лагранжа λ_0 при целевой функции полезности, чтобы учесть возможность ее незначимости, а значит, отсутствия решения задачи (I.1a), когда λ_0 оказывается нулевым. Однако, из необходимых условий максимизации полезности, которые в более общем виде будут выглядеть так: $\lambda_0 MU_j = \lambda p_j$, $j = \{1, 2\}$, в силу того, что предметом анализа выступают экономические блага $(p_j > 0)$, при $\lambda_0 = 0$ оказывается и $\lambda = 0$, чего не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$, и без ограничения общности его можно положить равным единице,

$$(2.9)\qquad \begin{cases} MU_1 = \lambda p_1, & (2.9.1)\\ MU_2 = \lambda p_2, & (2.9.2)\\ p_1x_1 + p_2x_2 = M. & (2.9.3)\end{cases}$$

Поделив равенство (2.9.1) на (2.9.2), получаем, что потребитель оптимизирует свое поведение, когда отношение предельных полезностей товаров равняется отношению цен. По-другому условие (2.9) можно оформить в виде так называемого второго закона Госсена, который утверждает, что прирост полезности от последней денежной единицы, израсходованной на каждый из товаров, должен быть одинаков[6]:

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2} = \lambda.$$

Таким образом, с учетом выражения для предельной нормы замещения товаров (1.11) можно выписать обобщающее условие оптимального потребительского выбора[7]:

$$MRS_{12} \equiv -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=const} = \frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.10)$$

Итак, в точке оптимума потребителя бюджетная линия является касательной к кривой безразличия (рис. 2.3).

или, что эквивалентно, поделить на него функцию (2.8), пронормировав тем самым вектор множителей Лагранжа.

[6] Обобщением задачи (I.1a) является задача условной оптимизации следующего вида:

$$\min_x f(x,\alpha):\quad g_i(x(\alpha),\alpha) = 0, i = 1,\dots,n; \qquad \text{(ii)}$$

где $x = \{x_l\}_{l=1}^{h}$ – векторный аргумент, $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$ – некоторый вектор параметров. Решая ее, составляем функцию Лагранжа: $\mathfrak{L} = f(x,\alpha) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x(\alpha),\alpha)$. (iii)

Здесь множитель Лагранжа λ_0 при целевой функции полагается равным единице. Равенство нулю ее частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_l} = 0$ (iv)

будет представлять собой необходимое условие экстремума в задаче (ii). В задаче типа (I.1a) ищется максимум целевой функции полезности $f(x) = U(x)$, т.е. минимизируется данная функция с обратным знаком; ограничением является равенство расходов фиксированному доходу потребителя $g(x(\alpha),\alpha) = \sum_{j=1}^{l} p_jx_j - M = 0$, соответственно вектор параметров состоит из цен и дохода $\alpha = \left(\{p_j\}_{j=1}^{l}, M\right)$. Поэтому необходимые условия максимума (iv) принимают вид: $MU_j = \lambda p_j$, откуда получаем второй закон Госсена, обобщенный на случай произвольного количества товаров ($j = 1,\dots,l$): $\frac{MU_j}{p_j} = \lambda$.

[7] Наряду с проблемами, связанными с измеримостью категории полезности, аргументом в пользу перехода от кардиналистской к ординалисткой концепции полезности является инвариантность решения задачи потребительского выбора относительно возрастающей трансформации функции полезности.