1.5. Индивидуальное восприятие риска

Для простоты вначале будем рассматривать игру с двумя возможными денежными выигрышами x_1 и x_2, наступающими соответственно с вероятностями p_1 и p_2, $p_1 + p_2 = 1$. При этом ожидаемый исход в игре составит: $Ex = p_1x_1 + (1 - p_1)x_2$. Пусть для индивидуума данные денежные выигрыши сопряжены с определенными величинами полезности[1] $U(x_1)$ и $U(x_2)$. Тогда ожидаемая полезность игры составит:

$$EU(x_1, x_2) = p_1U(x_1) + (1 - p_1)U(x_2). \tag{1.25}$$

При этом полезность ожидаемого исхода игры будет такова:

$$U(Ex) = U(p_1x_1 + (1 - p_1)x_2).$$

Для (определенно) склонного к риску индивидуума будет свойственно неравенство $EU(x_1, x_2) < U(Ex)$. Функция полезности такого индивидуума будет строго выпуклой (рис. 1.7). Для нее будет характерно строгое неравенство Йенсена:

$$U(p_1x_1 + (1 - p_1)x_2) < p_1U(x_1) + (1 - p_1)U(x_2). \tag{1.26}$$

Для индивидуума, нейтрального к риску, будет свойственно равенство: $EU(x_1, x_2) = U(Ex)$. Функция полезности такого индивидуума будет линейной – выпуклой и вогнутой одновременно (рис. 1.8). Для нее будет характерно равенство Йенсена:

$$U(p_1x_1 + (1 - p_1)x_2) = p_1U(x_1) + (1 - p_1)U(x_2). \tag{1.27}$$

Индивидуум не приемлет риск, если и только если его функция полезности является строго вогнутой (рис. 1.9) – удовлетворяющей строгому неравенству Йенсена, противоположному (1.26):

$$U(p_1x_1 + (1 - p_1)x_2) > p_1U(x_1) + (1 - p_1)U(x_2). \tag{1.28}$$

При дифференцируемости функции полезности индивидуум будет избегать риска тогда и только тогда, когда $U'' < 0$.

Рис. 1.7. Функция полезности индивидуума, предпочитающего риск

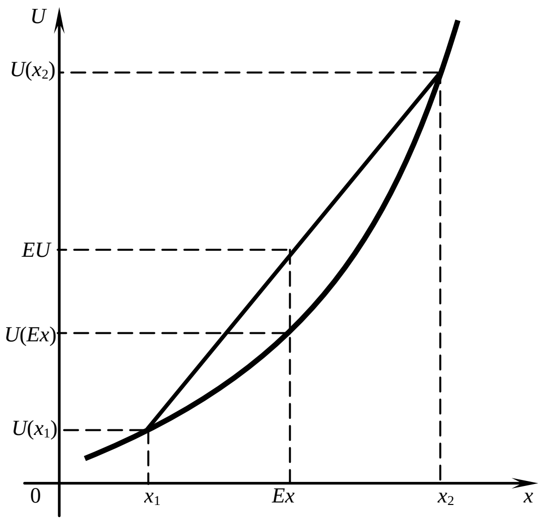
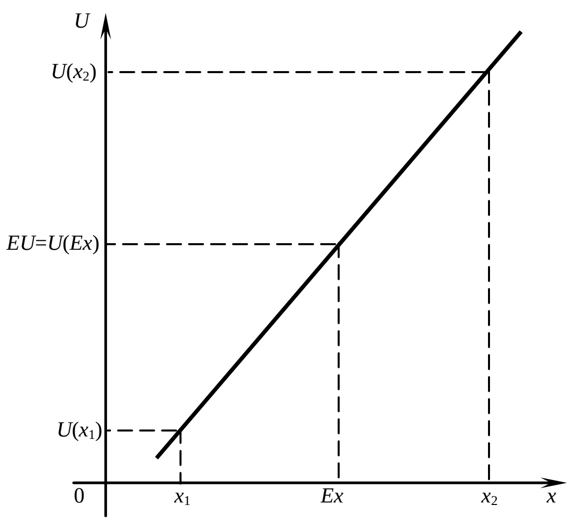


Рис. 1.8. Функция полезности индивидуума, безразличного к риску



Обозначим через c «гарантированный эквивалент» игры – сумму денег, без всякого риска обеспечивающую индивидууму величину полезности, равную ожидаемой, связанной с участием в игре: $U(c) = p_1U(x_1) + p_2U(x_2)$. Индивидууму безразлично, получить сумму денег c или согласиться на данную игру.

---

[1] Такую зависимость уровня удовлетворения индивидуума от величины денежного выигрыша будем называть функцией полезности Бернулли.

Неравенство $c < Ex$ эквивалентно характеристике индивидуума как уклоняющегося от риска. Действительно, в силу того, что функция полезности $U(\cdot)$ является неубывающей, из данного неравенства следует, что $U(c) < U(Ex)$; откуда, по определению гарантированного эквивалента, получается неравенство Йенсена (1.28), которое характеризует экономического агента как «риско-ненавистника».

Разность $c - Ex$ представляет собой компенсацию за принятие риска, или так называемую «премию за риск». Ее готов заплатить данный экономический агент за то, чтобы гарантированно получить денежную сумму в размере Ex. Получателем этой премии станет тот, кто возьмет риск на себя и обеспечит данный гарантированный платеж страхующемуся индивидууму.

Итак, следующие понятия эквивалентны:
– субъект, принимающий решения, не склонен к риску;
– функция полезности Бернулли является строго вогнутой;
– гарантированный эквивалент меньше ожидаемого дохода от игры.

Из двух игр с одинаковым ожидаемым доходом для индивидуума, не склонного к риску, предпочтительнее та, для которой будет характерен меньший разброс возможных исходов, поскольку ей будет соответствовать бóльшая величина ожидаемой полезности и меньшая премия за риск – часть ожидаемого дохода, от которой готов отказаться человек ради получения гарантированного дохода (в размере c' на рис. 1.9).

Мерой неприятия риска может служить коэффициент Эрроу–Пратта:

$$r_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

Нейтральность к риску эквивалентна линейности $U(\cdot)$ (рис. 1.8), или равенству нулю ее второй производной: $U''(x) = 0$ для любой величины x. Логично измерять неприятие риска кривизной, степенью вогнутости $U(\cdot)$ (рис. 1.10).

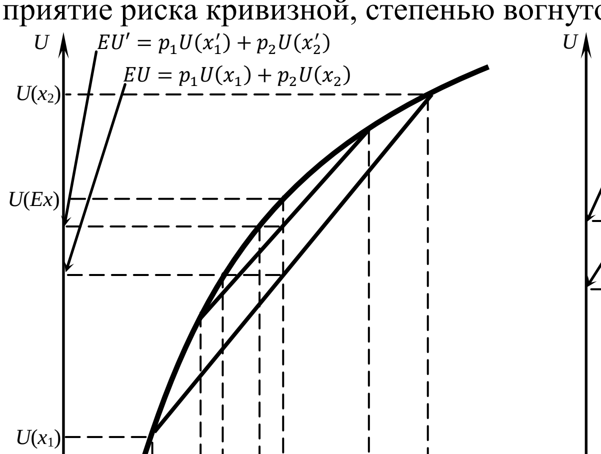


Рис. 1.9. Функция полезности индивидуума, не склонного к риску

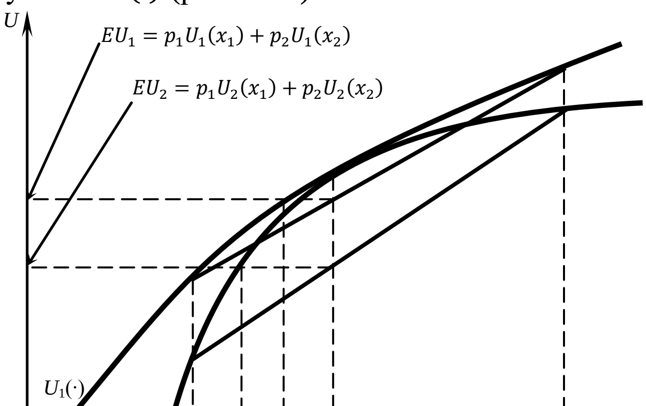


Рис. 1.10. Функции полезности индивидуумов с различной степенью неприятия риска

В качестве возможной меры кривизны $U(\cdot)$ могла бы рассматриваться просто величина второй производной[2] $U''(x)$. Но такой показатель являлся бы неадекватным:

[2] Физический смысл производной – это («мгновенная») скорость изменения данной величины. Геометрический смысл производной – тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке. Вторая производная – производная первой производной – показывает скорость изменения углового коэффициента касательной. Чем больше вторая производная, тем быстрее меняется тангенс угла на-

вторая производная не инвариантна по отношению к возрастающей линейной трансформации функции полезности. В частности, для нейтрального к риску индивидуума мера неприятия риска должна быть одной и той же при любом угле наклона функции полезности и при любом сдвиге ее на константу. Для того чтобы сделать меру инвариантной, можно поделить ее на $U'(x)$, что и реализуется в коэффициенте Эрроу-Пратта. Действительно, если $\psi(U) = aU(x) + b$, то $\psi'(U) = aU'(x)$ и $\psi''(U) = aU''(x)$, а значит, $\frac{\psi''}{\psi'} = \frac{U''}{U'}$.

Рассмотрим восприятие игры двумя индивидуумами, функция полезности Бернулли первого из которых является более вогнутой по сравнению с полезностью второго. Будем анализировать функции полезности с точностью до линейного преобразования, поэтому оказывается возможным предположить, что они соприкасаются в точке, соответствующей ожидаемому доходу от участия в игре. Гарантированный эквивалент c_2 превышает c_1 (рис. 1.10), таким образом, неприятие риска возрастает с увеличением кривизны, вогнутости $U(\cdot)$.

Коэффициент r_A – это темп прироста первой производной функции полезности, величина безразмерная. Знак «минус» в коэффициенте Эрроу–Пратта добавляется с целью получения положительного значения при возрастающей вогнутой функции $U(x)$, характеризующей поведение индивидуума, не приемлющего риск: $U'' < 0$.

Итак, индивидуум с функцией полезности U_2 в большей степени не приемлет риск, нежели индивидуум с U_1, если для произвольного уровня дохода x:

$$r_A(x, U_2) > r_A(x, U_1); \tag{1.29}$$

либо если существует возрастающая вогнутая функция $\psi(\cdot)$, такая, что при любой полученной индивидуумом денежной сумме x:

$$U_2(x) = \psi\big(U_1(x)\big), \tag{1.30}$$

т.е. $U_2(\cdot)$ – это вогнутая трансформация $U_1(\cdot)$. Другими словами, (1.30) означает, что $U_2(\cdot)$ «более вогнута», чем $U_1(\cdot)$.

Докажем эквивалентность подходов (1.29) и (1.30). Для этого продифференцируем дважды соотношение (1.30): $U_2'(x) = \psi'\big(U_1(x)\big) \cdot U_1'(x)$, $U_2''(x) = \psi'\big(U_1(x)\big) \cdot U_1''(x) + \psi''\big(U_1(x)\big) \cdot \big(U_1(x)\big)^2$. Разделим обе части второй производной на $U_2'(x) > 0$ и применим выражение для первой производной:

$$\frac{U_2''(x)}{U_2'(x)} = \frac{\psi'\big(U_1(x)\big) \cdot U_1''(x)}{U_2'(x)} + \frac{\psi''\big(U_1(x)\big) \cdot \big(U_1(x)\big)^2}{U_2'(x)} = \frac{U_1''(x)}{U_1'(x)} + \frac{\psi''\big(U_1(x)\big)}{\psi'\big(U_1(x)\big)} U_1(x).$$

Используя обозначения для коэффициентов Эрроу–Пратта, получаем

$$r_A(x, U_2) = r_A(x, U_1) + \frac{\psi''\big(U_1(x)\big)}{\psi'\big(U_1(x)\big)} U_1(x).$$

Таким образом, неравенство (1.29) справедливо для любого значения x, если и только если $\psi''(U_1) < 0$ при произвольной функции полезности U_1.

Коэффициент Эрроу–Пратта представляет собой скорость изменения гарантированного эквивалента по отношению к малому увеличению риска в условиях, близких к определенности. Покажем это, предположив, что исходами в игре являются величины дохода, представляющие собой отклонения в положительную и отрицательную стороны на произвольную величину ε от некоторой денежной суммы x. Используя определение гарантированного эквивалента (1.42), можно записать:

клона касательной к графику функции, – тем больше кривизна, степень вогнутости данной линии (рис. 1.10).

$$U\big(c(\varepsilon)\big) = p_1 U(x+\varepsilon) + (1-p_1)U(x-\varepsilon).$$

Дифференцируя это равенство дважды по ε

$$U'(c)\cdot c''(\varepsilon) = p_1 U''(x+\varepsilon) + (1-p_1)U''(x-\varepsilon)$$

и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} U'\big(c(\varepsilon)\big)\cdot \lim_{\varepsilon\to 0} c''(\varepsilon) = p_1 \lim_{\varepsilon\to 0} U''(x+\varepsilon) + (1-p_1)\lim_{\varepsilon\to 0} U''(x-\varepsilon).$$

Поскольку $c(\varepsilon) \to x$ при $\varepsilon \to 0$, отсюда вытекает равенство: $U'(x)\cdot c''(0) = U''(x)$. Следовательно,

$$c''(0) = \frac{U''(x)}{U'(x)} = -r_A(x).$$

Пример 1.8.
Функция полезности с постоянным абсолютным неприятием риска (CARA)[3]

Функция полезности, для которой коэффициент Эрроу–Пратта остается постоянным независимо от величины дохода индивидуума (CARA), определяется следующим дифференциальным уравнением[4]:

$$-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \rho = const.$$

Понизим его степень, вводя вспомогательную функцию $U'(x) = y(x)$: $-\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \rho$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -\rho dx$, интегрируем полученное уравнение: $\int d\ln|y| = -\rho\int dx + \ln c_1$, т.е. $\ln|y| = -\rho x + \ln c_1$, где $\ln c_1$ – константа интегрирования; а затем потенцируем полученное решение: $y = c_1 e^{-\rho x}$. Возвращаясь к исходной функции полезности $\frac{dU}{dx} = c_1 e^{-\rho x}$, решаем соответствующее дифференциальное уравнение: $dU = -\frac{c_1}{\rho} de^{-\rho x}$. Интегрируя его, получаем общий вид функции CARA:

$$U(x) = -\frac{c_1}{\rho} e^{-\rho x} + c_2.$$

Применяя предпосылку об отсутствии «рога изобилия» к функции полезности, получаем соотношение между константами: $\frac{c_1}{\rho} = c_2$. Без ограничения общности можно положить $c_2 = 1$, тогда функция CARA принимает вид:

$$U(x) = 1 - e^{-\rho x}.$$

[3] В теории также используется функция полезности с постоянным относительным неприятием риска (CRRA), которая характеризуется постоянством относительного коэффициента Эрроу–Пратта

$$r_r(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}x,$$

являющегося мерой неприятия риска с точки зрения пропорционального изменения богатства индивидуума по сравнению с исходным состоянием.

Такая функция имеет вид (3.39), если в качестве независимой переменной рассматривать не потребительские расходы c, а доход x.

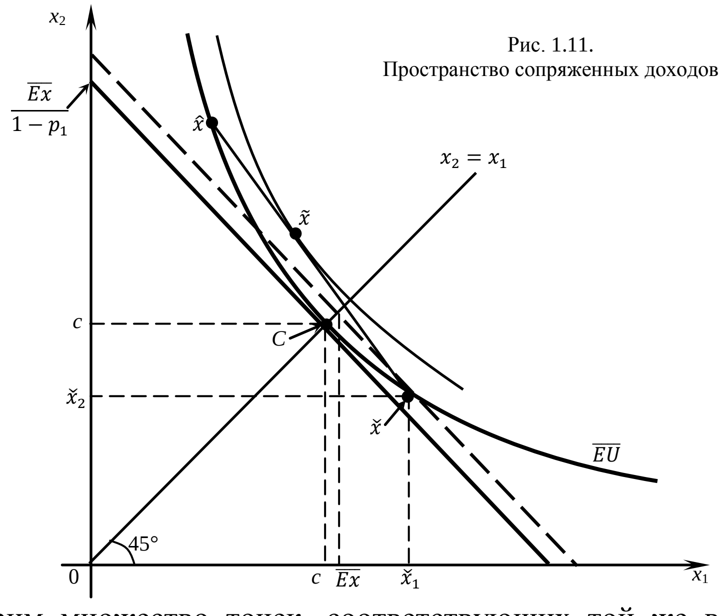
[4] Черемных Ю.Н. Микроэкономика: продвинутый уровень. – М.: Инфра-М, 2008.

Индивидуальное восприятие риска может быть проиллюстрировано в пространстве доходов, сопряженных с определенным состоянием внешней среды, или просто сопряженных доходов[5]. На рис. 1.11 первая координата точки $\check{x} = (\check{x}_1, \check{x}_2)$ отражает благоприятное, а вторая – неблагоприятное состояние внешней среды, поскольку $\check{x}_2 < \check{x}_1$. Биссектриса неотрицательного ортанта действительных чисел представляет собой множество доходов в условиях определенности экономической среды, когда $x_2 = x_1$. Кривая безразличия $\overline{EU}$ показывает множество комбинаций величин доходов, доставляющих индивидууму такую же полезность, что и $\check{x}$. В частности, в точке C данная величина полезности будет достигнута в условиях полной определенности экономической среды.

Выпишем полный дифференциал выражения ожидаемой полезности (1.25): $dEU = p_1U'(x_1)dx_1 + (1 - p_1)U'(x_2)dx_2$. Вдоль линии безразличия, когда $EU = \overline{EU} = const$, имеет место соотношение:

$$-\frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{dEU=0} = \frac{p_1U'(x_1)}{(1 - p_1)U'(x_2)}. \quad (1.31)$$

Данная величина представляет собой угловой коэффициент касательной к линии безразличия. В точке ее пересечения с биссектрисой неотрицательного ортанта координатной плоскости – точки которой удовлетворяют равенству $x_2 = x_1$, а значит, $U(x_1) = U(x_2)$ и $U'(x_1) = U'(x_2)$ – угловой коэффициент касательной по абсолютной величине равен $\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1}{1-p_1}$.



Рассмотрим множество точек, соответствующих той же величине ожидаемого дохода, что и точка $\check{x}$: $\overline{Ex} = p_1x_1 + (1 - p_1)x_2 = p_1\check{x}_1 + (1 - p_1)\check{x}_2$, или $x_2 = \frac{\overline{Ex}}{1-p_1} - \frac{p_1}{1-p_1}x_1$. Ее угловой коэффициент равен $p_1/(1 - p_1)$, т.е. она будет касательной к некоторой кривой безразличия на линии гарантированных доходов. Потребитель будет готов заплатить сумму в размере $(c - \overline{Ex})$ для того, чтобы, имея гарантированный доход c, остаться на исходном уровне полезности $\overline{EU}$. Таким образом, c – это гарантированный эквивалент игры $\check{x}$, а $(c - \overline{Ex})$ – это «премия за риск».

[5] Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – N.Y.; Oxford: Oxford univ. press, 1995.

Покажем, что кривые безразличия индивидуума, не приемлющего риск, будут строго выпуклы к началу координат. Будем рассматривать ожидаемую полезность по фон Нейману–Моргенштерну как функцию векторного аргумента $x = (x_1, x_2)$. Покажем, что для не склонного рисковать индивидуума она будет строго вогнутой. Для этого рассмотрим две пары возможных исходов $\check{x} = (\check{x}_1, \check{x}_2)$ и $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. В силу отрицания индивидуумом риска при каждом из них должно выполняться строгое неравенство Йенсена (1.28):

$$U(p_1\check{x}_1 + (1-p_1)\check{x}_2) > p_1 U(\check{x}_1) + (1-p_1)U(\check{x}_2),$$
$$U(p_1\hat{x}_1 + (1-p_1)\hat{x}_2) > p_1 U(\hat{x}_1) + (1-p_1)U(\hat{x}_2).$$

Рассмотрим теперь третью, смешанную пару исходов, представляющую собой линейную комбинацию первых двух: $\tilde{x} = p_1\check{x} + (1-p_1)\hat{x}$. В качестве весов здесь будем использовать те же вероятности, которые соответствуют возможным исходам в первых двух парах. Выпишем выражение ожидаемой полезности для $\tilde{x}$, учитывая строгие неравенства Йенсена для $\check{x}$ и $\hat{x}$:

$$\begin{aligned} EU(\tilde{x}) &= EU(p_1\check{x} + (1-p_1)\hat{x}) = EU(p_1\check{x}_1 + (1-p_1)\hat{x}_1, p_1\check{x}_2 + (1-p_1)\hat{x}_2) \\ &= p_1 U(p_1\check{x}_1 + (1-p_1)\hat{x}_1) + (1-p_1)U(p_1\check{x}_2 + (1-p_1)\hat{x}_2) \\ &> p_1\big(p_1 U(\check{x}_1) + (1-p_1)U(\hat{x}_1)\big) + (1-p_1)\big(p_1 U(\check{x}_2) + (1-p_1)U(\hat{x}_2)\big) \\ &= p_1\big(p_1 U(\check{x}_1) + (1-p_1)U(\check{x}_2)\big) + (1-p_1)\big(p_1 U(\hat{x}_1) + (1-p_1)U(\hat{x}_2)\big) \\ &= p_1 EU(\check{x}) + (1-p_1)EU(\hat{x}). \end{aligned}$$

Поскольку величины вероятности p_1, $(1-p_1)$, фигурирующие в качестве весов, могут быть произвольными, приходим к выводу, что функция ожидаемой полезности фон Неймана–Моргенштерна удовлетворяет строгому неравенству Йенсена, следовательно, является строго вогнутой, а значит, и строго квазивогнутой, т.е. ее кривые безразличия строго выпуклы к началу координат.

К данному выводу можно прийти также, продифференцировав зависимость между величинами доходов, отраженную кривой безразличия с учетом предельной нормы замещения между ними (1.31):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)\bigg|_{EU=const} &= \frac{d}{dx_1}\left(\frac{p_1 U'(x_1)}{(1-p_1)U'(x_1)}\right)\bigg|_{EU=const} \\ &= -\frac{p_1}{(1-p_1)}\cdot\frac{U''(x_1)U'(x_2) - U''(x_2)\dfrac{dx_2}{dx_1}U'(x_1)}{\big(U'(x_2)\big)^2} \\ &= -\frac{p_1}{(1-p_1)^2}\cdot\frac{(1-p_1)U''(x_1)\big(U'(x_2)\big)^2 - p_1 U''(x_2)\big(U'(x_1)\big)^2}{\big(U'(x_2)\big)^3} > 0. \end{aligned}$$

Положительность второй производной здесь следует из того, что для индивидуума, строго уклоняющегося от риска, $U''(\cdot) < 0$.

Из строгой вогнутости кривых безразличия к началу координат вытекают выгоды от диверсификации потока доходов. Если рассматривать комбинации доходов, соответствующие точкам $\check{x}$ и $\hat{x}$, лежащим на одной кривой безразличия $\overline{EU}$, как активы, получение отдачи от которых сопряжено с фактором риска, то составление комбинированного портфеля из них $\tilde{x} = \lambda\check{x} + (1-\lambda)\hat{x}$, $\lambda \in (0,1)$, принесет индивидууму, не склонному рисковать, бóльшую ожидаемую полезность, нежели каждый из активов $\check{x}$ и $\hat{x}$ в отдельности (рис. 1.11): $EU(\tilde{x}) = EU(\lambda\check{x} + (1-\lambda)\hat{x}) > EU(\check{x}) = EU(\hat{x})$.

Если денежная лотерея описывается дискретными исходами $(x_1, \dots, x_n)$ с вероятностями $(p_1, \dots, p_n)$, то поведение индивидуума, не склонного к риску, будет характеризоваться строгим неравенством Йенсена вида:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i) < U\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right), p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1;$$

субъекта, предпочитающего риск, – противоположным неравенством:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i) > U\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right), p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1;$$

а нейтрального к риску экономического агента – равенством:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i) = U\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right), p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Если в денежной лотерее выигрыши представлены непрерывной переменной x, то данную игру можно описать функцией распределения вероятности $P: \mathbb{R} \to [0, 1]$, где $P(x)$ – вероятность того, что фактический выигрыш будет меньше или равен x. Для любого значения x она связана с функцией плотности вероятности $p(\cdot)$ следующим образом: $P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\chi) d\chi$. Применение теоремы об ожидаемой функции полезности к исходам, описываемым непрерывной переменной, позволяет соотнести величины полезности $U(x)$ с неотрицательными количествами денег так, что любая $P(\cdot)$ может быть оценена функцией полезности $U(\cdot)$:

$$U(P) = \int_{x_0}^{x_1} U(x) dP(x) = \int_{x_0}^{x_1} U(x) p(x) dx.$$

Функция полезности индивидуума, склонного к риску, должна удовлетворять строгому интегральному неравенству Йенсена

$$\int_{x_0}^{x_1} U(x) dP(x) > U\left(\int_{x_0}^{x_1} x dP(x)\right) \qquad (1.32)$$

для любой функции распределения вероятности $P(\cdot)$. Величина $\int_{x_0}^{x_1} x dP(x)$ представляет собой ожидаемый доход индивидуума в денежной лотерее с функцией распределения вероятностей $P(\cdot)$.

Индивидуум является нейтральным к риску, если и только если для его функции полезности выполняется интегральное равенство Йенсена

$$\int_{x_0}^{x_1} U(x) dP(x) = U\left(\int_{x_0}^{x_1} x dP(x)\right) \qquad (1.33)$$

при любой функции распределения вероятностей $P(\cdot)$. Индивидуум не приемлет риск, если и только если его функция полезности удовлетворяет строгому интегральному неравенству Йенсена, противоположному (1.32)

$$\int_{x_0}^{x_1} U(x) dP(x) < U\left(\int_{x_0}^{x_1} x dP(x)\right) \qquad (1.34)$$

для любой функции распределения вероятности $P(\cdot)$.

Определение гарантированного эквивалента c игры с непрерывным распределением выигрышей принимает вид:

$$U(c) = \int_{x_0}^{x_1} U(x)dP(x).$$

Неравенство $c < \int_{x_0}^{x_1} xdP(x)$ эквивалентно характеристике индивидуума как уклоняющегося от риска. Действительно, в силу того, что функция полезности $U(\cdot)$ является неубывающей, из данного неравенства следует аналогичное соотношение между значениями функций полезности $U(c) < U\left(\int_{x_0}^{x_1} xdP(x)\right)$, откуда по определению гарантированного эквивалента получается неравенство Йенсена (1.34), которое характеризует экономического агента как «рискофоба». Разность $c - \int_{x_0}^{x_1} xdP(x)$ представляет собой премию за риск тому, кто гарантирует данному экономическому агенту получение денежной суммы в размере $\int_{x_0}^{x_1} xdP(x)$.

Таким образом, аналогично дискретному случаю, при непрерывной функции распределения вероятностей имеет место эквивалентность несклонности к риску, вогнутости функция полезности и превышения ожидаемого выигрыша над гарантированным эквивалентом игры.