1.4. Производственные функции и технологический прогресс

Будем анализировать динамические двухфакторные производственные функции $Y = F(K, L, t)$, где t – индикатор времени, или изменений в технологии производства; полагая их дважды непрерывно дифференцируемыми ($Y \in C^2$). Будем предполагать, что производственная функция в каждый данный момент времени является однородной первой степени. Для такой стационарной во времени функции в определении (1.13) $\gamma = 1$:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L). \quad (1.15)$$

В динамике для такой функции, полагая $\lambda = \frac{1}{L}$ и обозначая коэффициент фондовооруженности труда K/L через k, а его производительности Y/L – через y, можно сделать преобразование

$$y(t) = \frac{Y}{L} = f\left(\frac{K}{L}, 1, t\right) = f(k, t). \quad (1.16)$$

Если определить также показатели фондоотдачи $z = \frac{Y}{K}$ и обратной фондовооруженности труда, или «трудообеспеченности капитала», $l = \frac{L}{K} = \frac{1}{k}$, то аналогично (1.16) в силу однородности первой степени относительно затрат факторов производственной функции (1.15), справедливо следующее представление показателя фондоотдачи:

$$z(t) = \frac{Y}{K} = g\left(\frac{L}{K}, 1, t\right) = g(l, t). \quad (1.17)$$

Поскольку в соответствии с (1.16) $Y = Lf\left(\frac{K}{L}\right)$, производная объема производства по трудозатратам будет выглядеть так:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = f\left(\frac{K}{L}\right) + L\frac{\partial f\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial L} = f\left(\frac{K}{L}\right) + L\frac{\partial f\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}\frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial L} = \frac{Y}{L} - \frac{\partial f\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}\frac{K}{L}. \quad (1.18)$$

Следовательно, $\frac{\partial f(K/L)}{\partial(K/L)} = \frac{Y}{K} - \frac{\partial Y}{\partial L}\left(\frac{L}{K}\right)$. В силу однородности первой степени производственной функции (1.15) по теореме Эйлера (i) имеем $Y = \frac{\partial Y}{\partial L}L + \frac{\partial Y}{\partial K}K$, следовательно, в силу предпоследнего равенства:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{Y}{K} - \frac{\partial Y}{\partial L}\left(\frac{L}{K}\right) = g(l, t) - \frac{\partial Y}{\partial L}l = \frac{\partial f(k, t)}{\partial k}. \quad (1.19)$$

Аналогично (1.18) – (1.19), в силу (1.17) $\frac{\partial Y}{\partial K} = g\left(\frac{L}{K}\right) + K\frac{\partial g(L/K)}{\partial K} = g\left(\frac{L}{K}\right) + K\frac{\partial g(L/K)}{\partial(L/K)}\frac{\partial(L/K)}{\partial K} = \frac{Y}{K} - \frac{\partial g(L/K)}{\partial(L/K)}\frac{L}{K}$; а значит,

$$\frac{\partial g(l, t)}{\partial l} = \frac{Y}{L} - \frac{\partial Y}{\partial K}\left(\frac{K}{L}\right) = f(k, t) - \frac{\partial Y}{\partial K}k = \frac{\partial Y}{\partial L}. \quad (1.20)$$

Нейтральные по Дж.Р. Хиксу технологические изменения могут быть представлены в виде факторизации производственной функции:

$$Y = A(t)F(K, L). \quad (1.21)$$

Данный вид технологических сдвигов имеет место в случае, если предельная норма замещения между трудом и капиталом как функция обратной фондовооруженности труда, является стационарной во времени[1]: $MRTS_{KL}(l, t) = \overline{MRTS}_{KL}(l)$, т.е. $\frac{\partial}{\partial t}\left(MRTS_{KL}(l, t)\right) = 0$. Нейтральность по Хиксу можно сформулировать и по-другому:

---

[1] Uzawa H. Neutral inventions and the stability of growth equilibrium // Review of economic studies. 1961. Vol. 28. № 2; Sato R., Beckmann M.J. Neutral inventions and production functions // Review of economic studies. 1968. Vol. 35. № 1.

она наблюдается, если предельная норма замещения не зависит от технологического прогресса $A(t)$.

Рассчитаем предельную норму замещения между факторами производства, используя соотношения (1.19) – (1.20): $MRTS_{KL}(l,t)=\frac{MP_K}{MP_L}=\frac{\partial Y/\partial K}{\partial Y/\partial L}=\frac{g-\frac{dg}{dl}l}{dg/dl}=\frac{g}{dg/dl}-l$. С учетом стационарности предельной нормы замещения между факторами производства получаем дифференциальное уравнение $\frac{g}{dg/dl}-l=\overline{MRTS}_{KL}(l)$, или $g=(\overline{MRTS}_{KL}(l)+l)\frac{dg}{dl}$. Решаем его, разделяя переменные: $\frac{dl}{\overline{MRTS}_{KL}(l)+l}=d\ln|g|$. Интегрируем: $\int d\ln|g(l,t)|=\ln|g(l,t)|=\int\frac{dl}{\overline{MRTS}_{KL}(l)+l}+\ln A(t)$ и далее потенцируем полученное выражение, снимая модуль и учитывая упущенное при разделении переменных решение $g=0$ соответствующим подбором константы A: $g(l,t)=A(t)e^{\int\frac{dl}{\overline{MRTS}_{KL}(l)+l}}$. Полагая $e^{\int\frac{dl}{\overline{MRTS}_{KL}(l)+l}}=g(l)$, получаем $z=g(l,t)=A(t)g(l)$, или $\frac{Y}{K}=A(t)g\left(\frac{L}{K}\right)$, откуда следует факторизация нейтральной по Хиксу производственной функции (1.21).

Следуя логике Р.М. Солоу на основе нейтральной по Хиксу производственной функции (1.21) проанализируем вклад различных факторов в повышение объема производства[2]. Для этого рассчитаем производную выпуска по времени: $\frac{dY}{dt}=f(K,L)\frac{dA}{dt}+A\frac{df(K,L)}{dt}=f(K,L)\frac{dA}{dt}+A\left(\frac{\partial f}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial f}{\partial L}\frac{dL}{dt}\right)=f(K,L)\frac{dA}{dt}+\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{dL}{dt}$. Учитывая (1.21), поделим левую часть данной производной на Y, а выражение в правой части – на $Af(K,L)$. Одновременно домножим и разделим в правой части второе слагаемое на K, а третье – на L:

$$\frac{dY/dt}{Y}=\frac{dA/dt}{A}+\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}\frac{dK/dt}{K}+\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}\frac{dL/dt}{L}. \qquad (1.22)$$

Заметим, что в правой части равенства (1.22) во втором и третьем слагаемых присутствуют показатели эластичности валового выпуска по капиталу $\left(\epsilon_K^Y=\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}\right)$ и труду $\left(\epsilon_L^Y=\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}\right)$ соответственно. Поэтому темп прироста выпуска[3] $\dot{Y}/Y$ можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{A}}{A}+\epsilon_K^Y\frac{\dot{K}}{K}+\epsilon_L^Y\frac{\dot{L}}{L}.$$

Первая составляющая $(A(t))$ нейтральной по Хиксу производственной функции (1.21) представляет собой функцию технологических сдвигов и генерирует «остаток Солоу» $\dot{A}/A$, который характеризует совокупный эффект изменения производительности факторов, не сводимый к экстенсивным источникам экономического развития – сумме темпов прироста объемов используемого капитала $\dot{K}/K$ и труда $\dot{L}/L$.

Наряду с нейтральным по Хиксу можно выделить ряд других видов нейтрального технического прогресса. Нейтральный по Солоу, трудоинтенсивный, или фондосберегающий, технический прогресс:

$$Y=F(L,E(t)K), \qquad (1.23)$$

[2] Solow R.M. Technical change and the aggregate production function // Review of economics and statistics. 1957. Vol. 39. № 3.

[3] Здесь и далее переменная с точкой вверху $\dot{x}$ обозначает соответствующую производную по времени.

где $E(t)$ – коэффициент, отражающий технический прогресс, который имеет результатом повышение эффективности, или производительности, капитала, возникает в случае постоянной во времени предельной производительности труда: $MP_L(f,t) = \overline{MP}_L(f)$. Другими словами, предельная производительность труда зависит только от средней.

Используя (1.19) – (1.20), можно записать: $\frac{\partial g(l,t)}{\partial l} = f(k,t) - \frac{\partial f(k,t)}{\partial k} k = \frac{\partial Y}{\partial L}$. Отсюда в силу стационарности предельного продукта труда получаем дифференциальное уравнение $f - \frac{df}{dk} k = \overline{MP}_L(f)$. Разделяем переменные $\frac{dk}{k} = \frac{df}{f - \overline{MP}_L(f)}$ и интегрируем, учитывая, что $\frac{dk}{k} = dln|k|$: $\int d\ln|k| + \ln E(t) = \ln|k| + \ln E(t) = \int \frac{df}{f - \overline{MP}_L(f)}$. Потенцируя полученное равенство, снимаем модуль с k и включаем упущенное при разделении переменных решение $k = 0$ соответствующим подбором константы E: $E(t)k = e^{\int \frac{df}{f - \overline{MP}_L(f)}}$. Полагая $e^{\int \frac{df}{f - \overline{MP}_L(f)}} = f^{-1}(y)$, получаем соотношение $E(t)k = f^{-1}(y)$, или $\frac{Y}{L} = f\left(E(t)\frac{K}{L}\right)$, откуда приходим к выражению производственной функции с нейтральным по Солоу техническим прогрессом (1.23).

Нейтральный по Харроду, капиталоинтенсивный, или трудосберегающий, технический прогресс может быть описан производственной функцией:

$$Y = F(K, E(t)L), \tag{1.24}$$

где $E(t)$ – коэффициент, отражающий технический прогресс, который имеет результатом повышение эффективности, или производительности, труда. Такой технический прогресс имеет место при стационарной предельной фондоотдаче: $MP_K(g,t) = \overline{MP}_K(g)$. Другими словами, предельная производительность капитала зависит только от средней.

Используя (1.19) – (1.20), можно записать: $\frac{\partial f(k,t)}{\partial k} = g(l,t) - \frac{\partial g(l,t)}{\partial l} l = \frac{\partial Y}{\partial K}$. Отсюда в силу стационарности предельной производительности капитала получаем дифференциальное уравнение $g - \frac{dg}{dl} l = \overline{MP}_K(g)$. Разделяем переменные $\frac{dl}{l} = \frac{dg}{g - \overline{MP}_K(g)}$ и интегрируем, учитывая, что $\frac{dl}{l} = dln|l|$: $\int d\ln|l| + \ln E(t) = \ln|l| + \ln E(t) = \int \frac{dg}{g - \overline{MP}_K(g)}$. Потенцируя полученное равенство, допускаем нулевое и отрицательные значения $E(t)$: $E(t)l = e^{\int \frac{dg}{g - \overline{MP}_K(g)}}$. Полагая $e^{\int \frac{dg}{g - \overline{MP}_K(g)}} = g^{-1}(z)$, получаем соотношение $E(t)l = g^{-1}(z)$, или $\frac{Y}{K} = g\left(E(t)\frac{L}{K}\right)$, откуда приходим к выражению производственной функции с нейтральным по Харроду техническим прогрессом (1.24).