1.3. Характеристики технологии производства в статике

В экономике существуют l ресурсов, используемых предприятиями. Индекс, соответствующий каждому из ресурсов, обозначим через h, $h = 1, \dots, l$. Каждый набор из l ресурсов, покупаемый данным производителем, обозначим через x. Все производственные комбинации x – это произвольные векторы из $\mathbb{R}^l_+$. Множество потребляемых ресурсов, или производственное множество X, – это совокупность всех x. Оно представляет собой неотрицательный ортант $\mathbb{R}^l_+$. Производственная функция показывает максимально доступные объемы выпуска продукции предприятием при различных комбинациях используемых факторов производства. Производственная функция действует и принимает значения в области неотрицательных действительных чисел ($Q: \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}_+$).

Производственная функция характеризуется постоянной отдачей от масштаба, если увеличение затрат факторов производства в какое-то число раз α, $\alpha > 1$, приведет к росту объема производства в такое же число раз α. Если при увеличении объемов затрачиваемых ресурсов в α, $\alpha > 1$, раз производство возрастет меньше, чем в α раз, то такая производственная функция отличается убывающей отдачей от масштаба. Если при росте количества используемых ресурсов в α, $\alpha > 1$, раз выпуск возрастет в большей пропорции, нежели в α раз, то для такой производственной функции характерна возрастающая отдача от масштаба:

$$Q(\alpha K, \alpha L) > \alpha Q(K, L), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1. \qquad (1.12)$$

Специализация производства приводит к росту объема производства Q при имеющемся количестве ресурсов, или росту объема производства в большей пропорции, чем увеличивается количество используемых ресурсов (1.12). По-другому этот тезис можно сформулировать следующим образом: специализация производства ведет к повышению производительности труда и капиталоотдачи.

Производительность труда в натуральном выражении – это средний продукт труда (L), т.е. объем выпуска в расчете на единицу затраченного труда (Q/L). Капиталоотдача в натуральном выражении – это средний продукт капитала (K), или объем выпуска в расчете на единицу основных фондов (Q/K). Если обозначить изменение затрат капитала через $\Delta K = \alpha K$, а затрат труда – через $\Delta L = \alpha L$ (предполагая их изменение в одной и той же пропорции), то увеличение значений капиталоотдачи и производительности труда под влиянием общественного разделения труда предполагает, что выполняется неравенство $\Delta Q = \alpha Q$, а значит, справедливо соотношение (1.12), определяющее положительный эффект масштаба.

Функция называется однородной степени γ, если для нее выполняется равенство:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^\gamma f(x_1, x_2), \qquad (1.13)$$

где λ, γ – положительные вещественные константы[1]. Для однородной функции (1.13) будет характерна возрастающая отдача от масштаба при $\gamma > 1$, убывающая отдача – при $\gamma < 1$ и постоянная – при $\gamma = 1$.

---

[1] Для однородных дифференцируемых функций справедлива формула Л. Эйлера:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_2 = \gamma f(x_1, x_2). \qquad \text{(i)}$$

Равенство (i) легко установить дифференцированием по λ левой и правой частей определения однородной степени γ функции (1.13), где роль аргумента играет переменная $\chi = (\chi_1, \chi_2)$:

$$\frac{df(\lambda\chi_1, \lambda\chi_2)}{d\lambda} = \frac{\partial f(\lambda\chi_1, \lambda\chi_2)}{\partial \lambda\chi_1}\frac{d\lambda\chi_1}{d\lambda} + \frac{\partial f(\lambda\chi_1, \lambda\chi_2)}{\partial \lambda\chi_2}\frac{d\lambda\chi_2}{d\lambda} = \frac{\partial f(\lambda\chi_1, \lambda\chi_2)}{\partial \lambda\chi_1}\chi_1 + \frac{\partial f(\lambda\chi_1, \lambda\chi_2)}{\partial \lambda\chi_2}\chi_2 = \gamma\lambda^{\gamma-1} f(\chi_1, \chi_2),$$

последующим домножением полученного равенства на λ, применением к его правой части формулы (1.13) и переходом к новой независимой переменной $x = (x_1, x_2) = (\lambda\chi_1, \lambda\chi_2) = \lambda\chi$.

Традиционно предполагается, что производственная функция $Q: \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+$ во многом аналогично функции полезности $U: \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+$ обладает рядом фундаментальных характеристик. Во-первых, стандартной предпосылкой является определенная гладкость производственной функции, как минимум ее принадлежность классу непрерывных функций ($Q \in C^0$).

От производственной функции может требоваться и бóльшая степень гладкости, зачастую дважды (непрерывная) дифференцируемость ($Q \in C^2$). При этом первые частные производные технологии по объему используемых средств производства и рабочей силы называются соответственно предельными продуктами труда $\left(MP_L \equiv \frac{\partial f(K,L)}{\partial L}\right)$ и капитала $\left(MP_K \equiv \frac{\partial f(K,L)}{\partial K}\right)$.

Пример 1.6. Недифференцируемость технологии производства

Примером недифференцируемой функции может служить леонтьевская технология, описывающая использование совершенно комплементарных ресурсов, которые не могут применяться порознь и дополняют друг друга в рамках данного производственного процесса:

$$Q = \min\left\{\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right\}, \qquad (\text{П}1.6)$$

где коэффициенты α и β – произвольные вещественные константы – характеризуют пропорции использования факторов производства в технологическом процессе. Подобная функция принадлежит лишь классу непрерывных функций ($Q \in C^0$). График двухфакторной леонтьевской производственной функции – это замкнутый выпуклый трехгранный конус в неотрицательном ортанте $\mathbb{R}_+^3$ с вершиной в начале координат, натянутый на координатные орты и некоторый вектор на прямой $\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta}$ (ср. рис. 1.3).

Следующим важным предположением относительно технологии является эффективность производства: производственная функция является «строго возрастающей» на X. Здесь имеется в виду, что если для некоторых производственных наборов $\hat{x}, \tilde{x} \in X \subset \mathbb{R}_+^l$ выполнено неравенство $\hat{x}_h \leqslant \tilde{x}_h,\ h = 1, \ldots, l$, причем для некоторого индекса $k \in \{1, \ldots, l\}$ неравенство является строгим ($\hat{x}_k < \tilde{x}_k$), то для соответствующих им объемов производства справедливо такое же неравенство $Q(\hat{x}) < Q(\tilde{x})$. Когда технология производства обладает достаточной степенью гладкости, осуществление экономического анализа в области эффективного производства предполагает, что предельные продукты факторов производства положительны: $MP_K > 0, MP_L > 0$.

Третьей фундаментальной предпосылкой служит так называемое отсутствие «рога изобилия»: если производитель не использует ресурсов ($x_h = 0, h = 1, \ldots, l$), то он не выпускает никакой продукции: $Q(x) = 0$.

Наконец, в отличие от функции полезности, которая обычно считается (строго) квазивогнутой, относительно технологических процессов выдвигается более сильное предположение о (строгой) вогнутости производственной функции $Q: \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+$. Другими словами, противоположная ей по знаку функция ($-Q: \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+$) предполагается (строго) выпуклой. Это означает выпуклость подграфика $\{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X | \alpha \leqslant Q(x)\}$ производственной функции $Q: X \to \mathbb{R}_+$. Если двухфакторную производственную функцию, обладающую свойством вогнутости, обозначить через $Q(K,L)$, взяв в качестве ее аргументов такие факторы производства, как труд и капитал, то для нее будет справедливо соотношение ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in [0,1]$):

$$Q(\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2, \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2) \geqslant \alpha Q(K_1, L_1) + (1-\alpha)Q(K_2, L_2). \qquad (1.14)$$

В случае, если производственная функция $f\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ дважды непрерывно дифференцируема ($Q \in C^2$), необходимое и достаточное условие ее строгой вогнутости будет заключаться в том, что при любых ξ_K, ξ_L и допустимых K, L соответствующая квадратичная форма отрицательна: $\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial K^2}\xi_K^2 + 2\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial L \partial K}\xi_L \xi_K + \frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial L^2}\xi_L^2 < 0$. Здесь использована принадлежность производственной функции классу гладкости C^2, т.е. непрерывность ее вторых частных производных, значение которых в силу теоремы Шварца не зависит от порядка дифференцирования – смешанные производные равны: $\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial L \partial K}$ (ср. (1.8).

По критерию Сильвестра квадратичная форма является отрицательной при любых значениях переменных ξ_K, ξ_L тогда и только тогда, когда $\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial K^2} < 0$ и $\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial K^2} - \left(\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial L \partial K}\right)^2 > 0$, т.е. если при возрастании порядка главный минор матрицы вторых частных производных – гессиана $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial L^2} \end{bmatrix}$ – меняет значение с отрицательного на положительное. В связи с этим для неоклассической технологии предполагается убывание предельной производительности факторов: $\frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 f(K,L)}{\partial L^2} < 0$.

Если положить в силу предпосылки об отсутствии «рога изобилия» $K_2 = L_2 = 0$ в (1.14), то получается: $Q(\alpha K_1, \alpha L_1) \geqslant \alpha Q(K_1, L_1), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in [0, 1]$. Это означает, что из вогнутости производственной функции следует невозрастающая отдача от масштаба: $Q(\beta K, \beta L) \leqslant \beta Q(K, L), \beta \in \mathbb{R}, \beta \geqslant 1$; т.е. увеличение затрат факторов производства в β раз не может давать увеличение объема производимой продукции больше, чем в β раз.

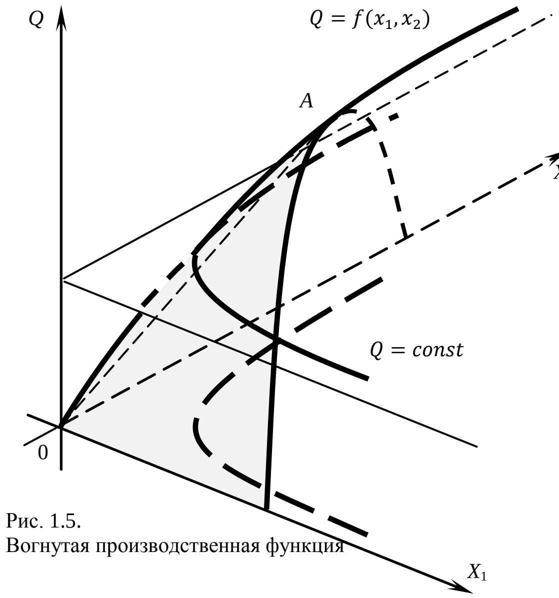

Рис. 1.5.
Вогнутая производственная функция

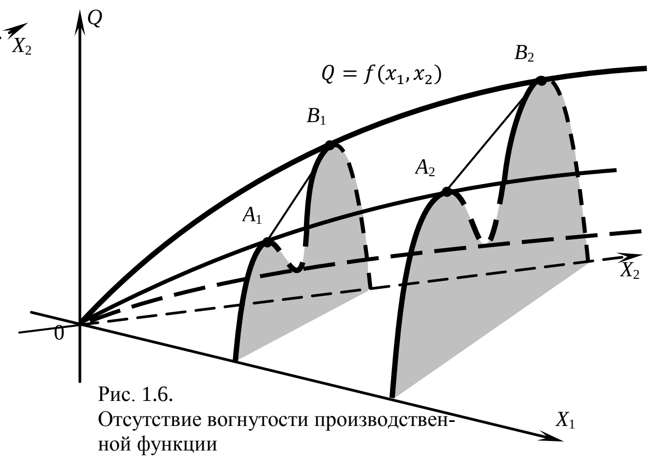

Рис. 1.6.
Отсутствие вогнутости производственной функции

На рис. 1.5 в качестве примера графика функции с убывающей отдачей от масштаба используется вогнутая производственная функция Кобба–Дугласа, например, это может быть $U = x_1^{1/2} x_2^{1/4}$. Ее график имеет вид «горки». На рис. 1.5 также представлена проекция линии уровня производственной функции на плоскость $X_1 0 X_2$ – ее изокванта, т.е. геометрическое место различных комбинаций ресурсов, использование которых обеспечивает одинаковый объем производства. На рис. 1.6 показан случай нарушения вогнутости: отрезки, соединяющие соответственно точки A_1 и B_1, A_2 и B_2, не принадлежат подграфику функции.

Важной характеристикой технологии является эластичность замещения факторов производства, которая показывает, насколько в процентном выражении изменяется фондовооруженность труда при изменении предельной нормы замещения труда капиталом на один процент:

$$\delta = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dMRTS_{KL}} \frac{MRTS_{KL}}{\left(\frac{K}{L}\right)}.$$

Пример 1.7. Функция с постоянной эластичностью замещения факторов производства (CES)

Постоянство эластичности замещения факторов производства задает дифференциальное уравнение[2]: $\frac{d(K/L)}{(K/L)} \frac{(dK/dL)}{d(dK/dL)} = \frac{d\ln|K/L|}{d\ln|dK/dL|} = \delta$, или $d\ln\left|\frac{K}{L}\right| = \delta d\ln\left|\frac{dK}{dL}\right|$. Интегрируя его: $\int d\ln\left|\frac{K}{L}\right| = \delta \int d\ln\left|\frac{dK}{dL}\right| + \delta\ln c$, или $\ln\left|\frac{K}{L}\right| = \delta\ln\left|\frac{dK}{dL}\right| + \delta\ln c$, получаем новое уравнение[3] $\left(\frac{K}{L}\right)^{1/\delta} = c\left(\frac{dK}{dL}\right)$. Разделяем в нем переменные: $\frac{dL}{dL^{1/\delta}} = c\left(\frac{dK}{K^{1/\delta}}\right)$, или $dL^{(\delta-1)/\delta} = c dK^{(\delta-1)/\delta}$. Интегрируя, получаем уравнение изокванты:

$$L^{\frac{\delta-1}{\delta}} = cK^{\frac{\delta-1}{\delta}} + c_1. \qquad (\text{П}1.7.1)$$

Полагая $c = -\frac{\beta}{\alpha}$, $c_1 = \frac{1}{\alpha a} Y^{-1/\nu}$, $\nu = \frac{\gamma}{\rho}$, $\rho = \frac{1-\delta}{\delta}$, получаем производственную функцию CES[4]:

$$Y(K,L) = a(\alpha L^{-\rho} + \beta K^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}}, \rho \geqslant -1, \rho \neq 0. \qquad (\text{П}1.7.2)$$

Здесь $\gamma > 0$ – это степень однородности функции.

Покажем, что производственная функция CES является обобщением функций Кобба–Дугласа и Леонтьева, которые представляют собой ее предельные случаи. Для этого прологарифмируем функцию CES:

$$\ln Y(K,L) = \ln a - \frac{\gamma}{\rho} \ln(\alpha L^{-\rho} + \beta K^{-\rho}). \qquad (\text{П}1.7.3)$$

Пусть $\beta = 1 - \alpha$. Устремив ρ к нулю, при раскрытии возникающей неопределенности вида $0/0$ применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{\rho \to 0} \ln Y(K,L) = \ln a + \lim_{\rho \to 0} \frac{\gamma(\alpha L^{-\rho} \ln L + (1-\alpha)K^{-\rho} \ln K)}{(\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)K^{-\rho})} = \ln a + \gamma(\alpha \ln L + (1-\alpha)\ln K).$$

Потенцируя полученное соотношение, получаем производственную функцию Кобба–Дугласа: $Y(K,L) = aL^{\gamma\alpha} L^{\gamma(1-\alpha)}$.

Допустим теперь, что $L = \min(K, L)$, и устремим ρ в выражении (П1.7.3) к $+\infty$. При раскрытии возникающей неопределенности вида $0/0$ вновь воспользуемся правилом Лопиталя:

---

[2] Черемных Ю.Н. Микроэкономика: продвинутый уровень. – М.: Инфра-М, 2008.

[3] Допуская нулевое и отрицательные значения константы c, избавляемся от модуля и возвращаем утерянное ранее при делении на K/L и dK/dL решение.

[4] Arrow K.J., Chenery H.B., Minhas B.S., Solow R.M. Capital-labor substitution and economic efficiency // Review of economics and statistics. 1961. Vol. 43. № 3.

$$\lim_{\rho\to+\infty}\ln Y(K,L)=\ln a+\lim_{\rho\to+\infty}\frac{\gamma(\alpha L^{-\rho}\ln L+\beta K^{-\rho}\ln K)}{(\alpha L^{-\rho}+\beta K^{-\rho})}$$
$$=\ln a+\lim_{\rho\to+\infty}\frac{\gamma\left(\alpha\ln L+\beta\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho}\ln K\right)}{\left(\alpha+\beta\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho}\right)}=\ln a+\gamma\ln L.$$

Потенцируя полученное выражение, получаем при $\gamma=1$ леонтьевскую технологию: $Y(K,L)=a\cdot\min(K,L)$.

Из уравнения изокванты (П1.7.1) видно, что, поскольку $L=\left(-\frac{\beta}{\alpha}K^{-\rho}+c_1\right)^{-1/\rho}$, $K=\left(-\frac{\beta}{\alpha}L^{-\rho}+\frac{\alpha}{\beta}c_1\right)^{-1/\rho}$, при $\rho>0$ изокванты имеют асимптоты: $\lim_{K\to+\infty}L=c_1^{-1/\rho}$, $\lim_{L\to+\infty}K=\left(\frac{\alpha}{\beta}c_1\right)^{-1/\rho}$ (рис. П1.7).

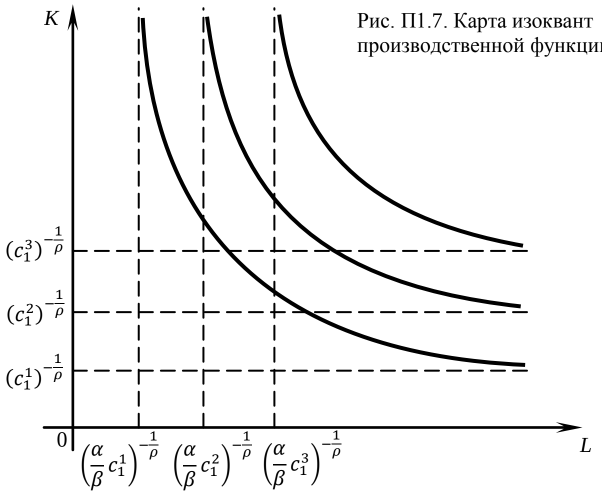

Рис. П1.7. Карта изоквант производственной функции CES