## 1.2. Характеристики функций полезности

Полезность – это мера удовлетворенности экономического агента потреблением хозяйственных благ. Принятие экономических решений не всегда предполагает количественную, числовую соизмеримость преимуществ и недостатков, выгод и издержек: зачастую возможно и достаточно порядковое, качественное сопоставление. Качественная характеристика товаров описывается порядковой функциональной зависимостью, которая ранжирует различные блага по уровню их качества, упорядочивает их с точки зрения качественной значимости для экономических агентов.

Одной из важнейших предпосылок в теории потребительского выбора является непрерывность предпочтений: для любой потребительской корзины $x \in X$, множества наборов, которые не хуже, чем $x$, т.е. верхние лебеговские множества $\{\hat{x} \in X | \hat{x} \succsim x\}$, и не лучше, чем $x$, т.е. нижние лебеговские множества $\{\hat{x} \in X | x \succsim \hat{x}\}$, предполагаются замкнутыми относительно $X$. Подмножества действительных чисел являются замкнутыми тогда и только тогда, когда они содержат свои границы.

В теории выбора традиционно вводится предпосылка о (строгой глобальной) ненасыщаемости потребления, согласно которой общая полезность «строго» возрастает при увеличении объемов потребляемых товаров. Здесь имеется в виду, что если для некоторых потребительских корзин $\hat{x}, \tilde{x} \in X \subset \mathbb{R}_+^l$ выполнено неравенство $\hat{x}_h \leqslant \tilde{x}_h$, $h = 1, \dots, l$, причем для некоторого индекса $k \in \{1, \dots, l\}$ неравенство является строгим $(\hat{x}_k < \tilde{x}_k)$, то для соответствующих им величин полезности справедливо такое же неравенство $U(\hat{x}) < U(\tilde{x})$.

В противоположность порядковому индикатору предпочтений экономического субъекта количественная функция полезности $U$ ставит в соответствие различным наборам из $l$ потребляемых товаров, или потребительским корзинам, содержащимся во множестве $X \subset \mathbb{R}_+^l$, числовую степень значимости этих наборов для потребителя, которая может принимать любые неотрицательные действительные значения $(U: \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+)$.

С формальной точки зрения взаимосвязь между порядковой, ординалистской и количественной, кардиналистской концепциями полезности зафиксирована в теореме Дебре. Теорема Дебре (в слабой форме) утверждает, что если множество $X$ качественно сравнимых наборов благ, которое должно быть замкнутым подмножеством пространства действительных чисел $\mathbb{R}^l$, представляет собой отношение полного предпорядка, т.е. удовлетворяет свойствам рациональности (1.1) – (1.2), и в добавление к этому данный индикатор потребительских предпочтений обладает свойствами непрерывности и строгой глобальной ненасыщаемости, то ему соответствует количественная, числовая функция полезности, которая при этом будет непрерывной[1] $(U \in C^0)$.

Докажем вначале существование числовой функции полезности, ставящей в соответствие произвольному набору неотрицательных действительных чисел $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$ определенное действительное число[2] $U(\tilde{x})$. Выделим в корзине товаров $\tilde{x}$ максимальный $(\overline{x})$ и минимальный $(\underline{x})$ элементы. В силу строгой глобальной ненасыщаемости и транзитивности (1.2) предпочтений векторы, каждая из $l$ координат которых равна $\overline{x}$ либо $\underline{x}$, являются соответственно не менее и не более предпочтительными для потребителя, по сравнению с корзиной $\tilde{x}$: $(\underbrace{\overline{x}, \dots, \overline{x}}_{l}) \succsim (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$; $(\underbrace{\underline{x}, \dots, \underline{x}}_{l}) \precsim (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$. Пока-

[1] Теорема Дебре в сильной форме снимает требование ненасыщаемости предпочтений (Debreu G. Theory of value. – N.Y.: Willey; L.: Chapman & Hall, 1959).

[2] Gravelle H., Rees R. Microeconomics. – 2nd ed. – L., N.Y.: Longman, 1992.

жем теперь, что на отрезке $[\overline{x}, \underline{x}]$ существует такое число $x^0$, что $l$–мерный вектор $(\underbrace{x^0, \dots, x^0}_{l})$ будет эквивалентен, с точки зрения потребителя, корзине $\tilde{x}$: $(x^0, \dots, x^0) \sim (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$. Если $\overline{x} = \underline{x}$, то отрезок $[\overline{x}, \underline{x}]$ вырождается в точку, которая представляет собой искомый товарный набор, эквивалентный $\tilde{x}$. Рассмотрим теперь более интересный случай, когда $\overline{x} \neq \underline{x}$. Каждому числу $x$ на отрезке $[\overline{x}, \underline{x}]$ поставим в соответствие $l$-мерный вектор, каждая компонента которого равна $x$: $(\underbrace{x, \dots, x}_{l})$. В силу полноты предпочтений (1.1), данный вектор будет либо не хуже, либо не лучше, чем $\tilde{x}$. Сформируем из таких векторов верхнее и нижнее лебеговские множества по отношению к корзине $\tilde{x}$. Эти множества будут непустыми, поскольку в них содержатся хотя бы корзины $(\underbrace{\overline{x}, \dots, \overline{x}}_{l})$ и $(\underbrace{\underline{x}, \dots, \underline{x}}_{l})$ соответственно. Поскольку, по предположению о непрерывности предпочтений, данные множества являются замкнутыми, они будут содержать свои границы, в частности, верхнее лебеговское множество – нижнюю границу, а нижнее лебеговское множество – верхнюю границу, которые будут совпадать и представлять собой искомую корзину $(\underbrace{x^0, \dots, x^0}_{l})$, эквивалентную, с точки зрения потребителя, корзине $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$.

Положим $U(\tilde{x}) = x^0$. В силу строгой глобальной ненасыщаемости предпочтений данное значение будет единственным. Покажем, что такое сопоставление функции полезности $U(x)$ ординалистским отношениям предпочтения потребителя является корректным, т.е. $U(\hat{x}) \geqslant U(\check{x})$ тогда и только тогда, когда $\hat{x} \gtrsim \check{x}$.

Действительно, в соответствии с построением функции полезности векторы $(\underbrace{U(\hat{x}), \dots, U(\hat{x})}_{l})$ и $\hat{x}$ эквивалентны с точки зрения потребителя. Соответственно, $(\underbrace{U(\check{x}), \dots, U(\check{x})}_{l}) \sim \check{x}$. Если $U(\hat{x}) \geqslant U(\check{x})$, то в силу ненасыщаемости предпочтений $\hat{x} \gtrsim \check{x}$. И наоборот, следуя нашей конструкции функции полезности, переходим от отношения предпочтения-безразличия между корзинами $\hat{x}$ и $\check{x}$ $(\hat{x} \gtrsim \check{x})$ к сопоставлению эквивалентных им корзин $(\underbrace{U(\hat{x}), \dots, U(\hat{x})}_{l})$ и $(\underbrace{U(\check{x}), \dots, U(\check{x})}_{l})$: $(\underbrace{U(\hat{x}), \dots, U(\hat{x})}_{l}) \gtrsim (\underbrace{U(\check{x}), \dots, U(\check{x})}_{l})$. В силу ненасыщаемости предпочтений, последнее отношение означает, что $U(\hat{x}) \geqslant U(\check{x})$. Таким образом, функция полезности построена корректно.

Наконец, замкнутости всех верхних и нижних лебеговских множеств необходимо и достаточно для того, чтобы действительная функция была непрерывна[3]. Итак, теорема Дебре (в слабой форме) доказана.

Ординалистский индикатор предпочтений предполагает возможность количественной оценки полезности с точностью до монотонного возрастающего преобразования. Для упрощения формальных выкладок на основе теоремы Дебре в нашем анализе, как правило, порядковая функция потребительских предпочтений будет сводиться к своему числовому представлению, т.е. непрерывной функции полезности.

В силу предпосылки о строгой глобальной ненасыщаемости потребления, если функция полезности является дифференцируемой, то предельная полезность как изменение общей полезности при увеличении объемов потребления одного из товаров на бесконечно малую величину должна быть положительной:

[3] Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948.

$$MU_1 \equiv \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0, MU_2 \equiv \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0. \qquad (1.6)$$

Обычно предполагается, что функция полезности $U: \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+$ является строго квазивогнутой. Функция $f: X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}^l$ является выпуклым множеством, называется квазивогнутой, если множество $\{x \in X | f(x) \geqslant t, t \in \mathbb{R}\}$, является выпуклым множеством. Другими словами, функция $f$ является квазивогнутой, если из того, что $f(x_1) \geqslant t$ и $f(x_2) \geqslant t$, следует, что $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant t$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, где $X$ – выпуклое подмножество $\mathbb{R}^l$, $\alpha \in [0, 1]$. Из этого определения[4] следует, что функция является квазивогнутой, если и только если $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \min\{f(x_1), f(x_2)\}$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in [0, 1]$. Функция $f: X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}^l$ является выпуклым множеством, называется строго квазивогнутой, если множество $\{x \in X | f(x) \geqslant t, t \in \mathbb{R}\}$ является выпуклым и его граница не содержит прямых сегментов. Другими словами, функция $f$ является строго квазивогнутой, если из того, что $f(x_1) \geqslant t$ и $f(x_2) \geqslant t$, следует, что $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > t$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in X$, где $X$ – выпуклое подмножество $\mathbb{R}^l$, $\alpha \in (0, 1)$. Функция $f$ является строго квазивогнутой, если и только если $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \min\{f(x_1), f(x_2)\}$ для любых $t \in \mathbb{R}$; $x_1, x_2 \in X, \alpha \in (0, 1)$.

В теории потребительского выбора часто предполагается даже бóльшая по отношению к непрерывности степень гладкости – непрерывная дифференцируемость – функции полезности, т.е. ее принадлежность классу дважды непрерывно дифференцируемых функций ($U \in C^2$). При выполнении этого условия наряду с предпосылкой (1.6) принимаются еще ряд предположений, касающихся вторых частных производных функции полезности. Для двухпродуктовых функций полезности $U: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ – это следующие условия:

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0, \frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0, \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} > 0. \qquad (1.8)$$

Равенство вторых смешанных частных производных в условии (1.8), по теореме Шварца[5], вытекает из их непрерывности ($U \in C^2$).

Первый из активно используемых в теории потребительского выбора законов Госсена утверждает, что потребление каждой дополнительной единицы блага (как в единичный момент потребления, так и при последовательных его актах) должно приносить все меньший прирост полезности для экономического агента. По-другому это утверждение называется законом убывающей предельной полезности (1.7). В основу принципа убывающей предельной полезности исходно был положен психофизиологический закон Вебера–Фехнера, который гласит, что «по мере увеличения силы действия раздражителя ее изменения должны нарастать при условии, что вызываемые ими приросты интенсивности реакции организма сохраняются на заданном уровне»[6]. Из данно-

---

[4] Другими словами, функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется квазивыпуклой, если все ее лебеговские множества $S(f, \lambda) \equiv \{x \in X | f(x) \leqslant \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ являются выпуклыми. Функция $f$ называется квазивогнутой, если противоположная по знаку к ней функция $-f$ является квазивыпуклой.

[5] Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч.1.

[6] Отметим, что по закону Вебера–Фехнера в сильной форме, «изменения интенсивности ответной реакции организма должны быть пропорциональны относительным приростам силы действия раздражителя», другими словами, $d\gamma = \frac{kd\beta}{\beta}$, где $\beta > 0$ – сила действия раздражителя, а $\gamma$ – сила ответной реакции организма. Решая данное дифференциальное уравнение, получаем, что $\gamma = k\ln\beta + c$, где константу

го закона следует, что при постоянной силе действия раздражителя его приросты будут приводить к снижению интенсивности ответной реакции организма. Это утверждение можно рассматривать в качестве психофизиологического основания закона убывающей предельной полезности потребления какого-либо блага.

**Пример 1.3. Неоклассическая функция полезности**

Неоклассическим предпосылкам (1.6) – (1.8) соответствует, например, функция потребительских предпочтений Стоуна–Джери[7]:

$$U(x) = \prod_{j=1}^{l} \left(x_j - a_j\right)^{\alpha_j}. \tag{П1.3.1}$$

Частным случаем предпочтений Стоуна–Джери являются функции полезности Кобба–Дугласа, когда все $a_j$ равны нулю[8]:

$$U(x) = \prod_{j=1}^{l} x_j^{\alpha_j}. \tag{П1.3.2}$$

На рис. 1.1 в трехмерном пространстве потребительского выбора изображена типичная поверхность полезности $U = f(x_1, x_2)$, на которой находятся линии ее фиксированного уровня ($U = \overline{U} = const$), удовлетворяющие условию

$$dU = 0. \tag{1.9}$$

Проекция линии уровня поверхности полезности на координатную плоскость $X_1 0 X_2$ – это кривая безразличия, т.е. геометрическое место точек, соответствующих различным комбинациям товаров, использование которых в потреблении дает одинаковый уровень полезности экономического агента (1.9).

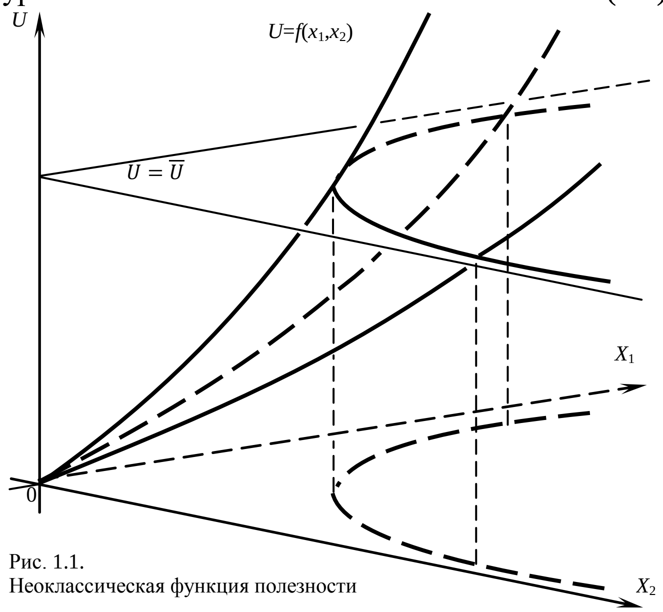


Рис. 1.1.
Неоклассическая функция полезности

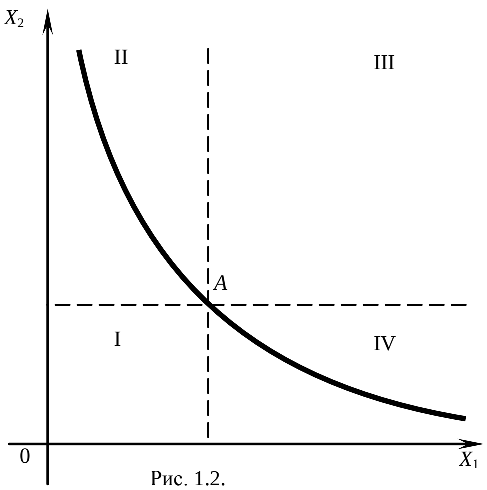


Рис. 1.2.
Кривая безразличия

---

$c = -k\ln\beta$ можно определить по начальному условию $\gamma(0) = 0$. Здесь $b$ – это такое действие раздражителя $\gamma$, которое не вызывает никакой ответной реакции организма. Таким образом, $\gamma = k(\ln\beta - \ln b)$, т.е. в соответствии с законом Вебера–Фехнера в сильной форме ответная реакция организма линейно зависит от логарифма силы действия раздражителя (Fechner G.Th. Elemente der Psychophysik. – Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1860).

[7] Geary R.C. A note on «a constant-utility index of the cost of living» // Review of economic studies. 1949-1950. Vol. 18. Part 1. № 45; Stone R. Linear expenditure systems and demand analysis // Economic journal. 1954. Vol. 64. № 255; Stone R. Quantity and price indexes in national accounts. – Paris: OEEC, 1956.

[8] Cobb C.W., Douglas P.H. A theory of production // American economic review. 1928. Vol. 18. № 3.

Вследствие предположения о ненасыщении кривая безразличия, расположенная дальше от нуля (в положительном ортанте), соответствует более высокому уровню потребительского удовлетворения. Поэтому на рис. 1.2 корзины, эквивалентные *A*, с точки зрения данного потребителя, располагаются либо во II, либо в IV квадрантах. Следовательно, кривая безразличия – это убывающая зависимость объемов потребления одного из товаров $x_2$ от количества потребляемого другого блага[9] $x_1$.

Свойства (1.6) – (1.8) гарантируют строгую квазивогнутость функции полезности. Подобными свойствами обладают так называемые функции полезности неоклассического типа (например, функция Кобба–Дугласа). Примером графика функции с такими свойствами может служить, в том числе, вогнутая функция полезности Кобба–Дугласа $U = x_1^{1/2} x_2^{1/4}$. Ее график имеет вид «горки» (ср. рис. 1.5).

По определению полный дифференциал полезности:

$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2, \tag{1.10}$$

рассчитанный вдоль кривой безразличия, равен нулю (1.9). Следовательно, предельная норма замещения ($MRS_{12}$), представляющая собой отношение изменения потребляемого количества одного товара к бесконечно малому изменению количества другого при постоянном уровне полезности, т.е. отношение дифференциалов объемов потребления товаров, рассчитанных вдоль кривой безразличия, взятое со знаком минус, равна обратному отношению предельных полезностей:

$$MRS_{12} \equiv -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=const} = \frac{MU_1}{MU_2}. \tag{1.11}$$

Она отрицательна, поскольку первые частные производные функции полезности в силу предположения (1.6) положительны. Поэтому линии уровня функции полезности убывают на $\mathbb{R}_+^2$. Кроме того, учитывая свойства (1.7) – (1.8) функции полезности, получаем выражение для второй производной объема потребления второго блага по количеству первого вдоль кривой безразличия:

$$\left.\frac{d}{dx_1}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)\right|_{U=const} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1}\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2}$$

$$= -\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}}{\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^3} > 0.$$

Данное соотношение вместе с убыванием кривых безразличия обеспечивает строгую квазивогнутость функции полезности.

---

[9] В силу предпосылок о транзитивности и ненасыщаемости предпочтений кривые безразличия не могут пересекаться. Действительно, предположим обратное, что две кривые безразличия пересекаются в некоторой точке $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Пусть при $x_1 > \tilde{x}_1$ первая кривая безразличия лежит ниже второй. Зафиксируем наборы $A$ и $B$ соответственно на первой и второй кривых безразличия таким образом, чтобы они содержали одинаковое количество первого товара: $\hat{x}_1 > \tilde{x}_1$. Из предположения о ненасыщении следует, что $U(B) > U(A)$. С другой стороны, наборы $\tilde{x}$ и $A$ лежат на первой кривой безразличия, значит, $U(\tilde{x}) = U(A)$. Аналогично $U(\tilde{x}) = U(B)$. Следовательно, в силу транзитивности предпочтений (2.2) $U(A) = U(B)$. Возникшее противоречие с полученным выше неравенством ($U(B) > U(A)$) завершает доказательство.

### Пример 1.4. Недифференцируемая функция полезности

Если функция полезности не является дважды непрерывно дифференцируемой, а принадлежит лишь классу непрерывных функций ($U \in C^0$), то ее графиком может служить, например, трехмерный угол, образованный двумя плоскостями (рис. 1.3). Аналитический вид подобной, леонтьевской функции полезности, описывающей потребление совершенно комплементарных товаров, которые не могут быть использованы порознь и дополняют друг друга с точки зрения данного потребителя, таков:

$$U = \min\left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right) = \begin{cases} \frac{x_1}{\alpha}, \text{если } \frac{x_1}{\alpha} \leqslant \frac{x_2}{\beta}; \\ \frac{x_2}{\beta}, \text{если } \frac{x_2}{\beta} < \frac{x_1}{\alpha}; \end{cases} \quad (\text{П}1.4)$$

где $\alpha$, $\beta$ – произвольные вещественные константы. Линии безразличия, соответствующие такой функции полезности, будут выглядеть в виде уголков (рис. 1.3).

### Пример 1.5. Функция полезности с постоянной предельной полезностью товаров

Для некоторых функций полезности могут не выполняться и другие предпосылки из перечисленных выше. В частности, в случае линейной функции полезности:

$$U = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad (\text{П}1.5)$$

где $\alpha, \beta$ – произвольные вещественные константы (рис. 1.4), не действует первый закон Госсена (1.7).

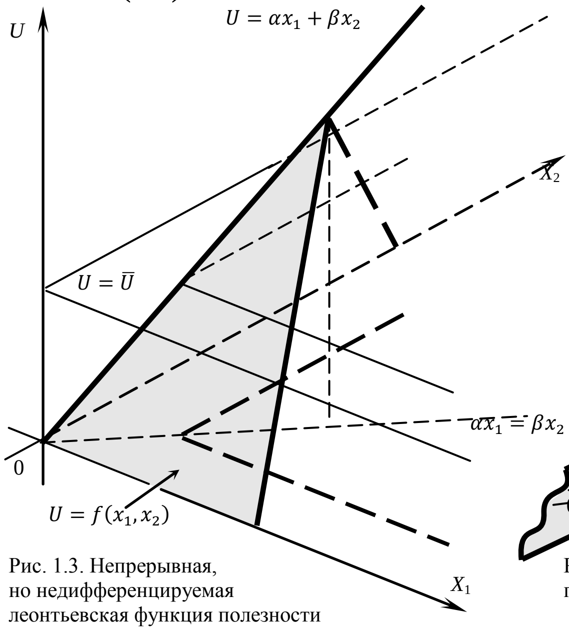


Рис. 1.3. Непрерывная, но недифференцируемая леонтьевская функция полезности

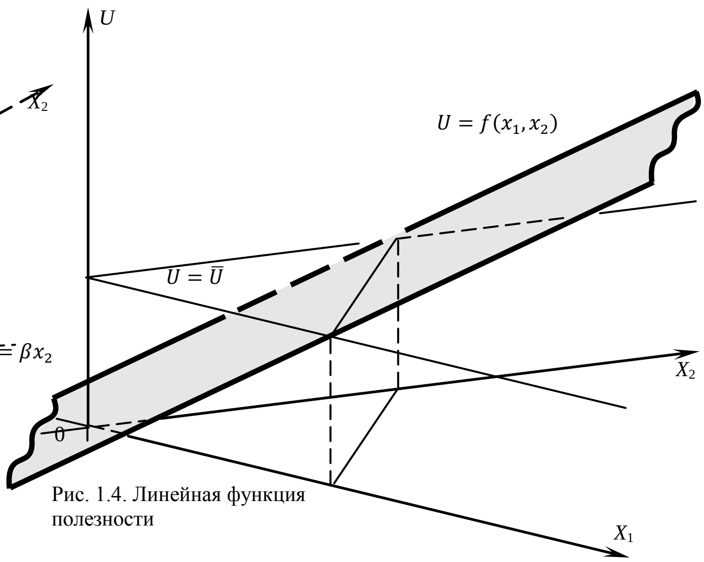


Рис. 1.4. Линейная функция полезности