## 1.1. Отношения предпочтения

Сделаем несколько замечаний о понятии «благо». Под благами будем понимать продукты, доступные индивидууму и обладающие для него полезностью, т.е. совокупностью свойств, позволяющих удовлетворять материальные и культурные потребности человека[1]. Продукты, находящиеся в разных географических точках, будем считать различными благами. Такая предпосылка анализа является разумной, поскольку для перемещения идентичных по качеству благ в различные места необходимо затратить определенное количество ресурсов подобно тому, как это требуется при непосредственном процессе производства товаров и услуг.

Аналогично будем различать товары и услуги, пусть даже качественно однородные, но произведенные не одновременно. Такое различие также оправданно, поскольку потребители и производители существуют в изменяющейся природной и экономической среде и, кроме того, меняются сами. Поэтому блага, произведенные в разное время, будут отличаться по тому, как они удовлетворяют потребности экономических субъектов, и, следовательно, будут качественно различными.

Таким образом, блага отличаются друг от друга не только качественными характеристиками, но и пространственным, а также временным расположением.

Проведем классификацию благ, которая будет важна для дальнейшего исследования общего экономического равновесия. Прежде всего, важным является выделение таких групп товаров и услуг, как свободные и экономические. Свободное благо – это предмет, имеющийся в природе в неограниченном количестве, достаточном для насыщения данной потребности, причем это благо доступно для потребления без каких бы то ни было издержек. Цена на такой товар равна нулю. В отличие от свободных экономические блага являются ограниченными по отношению к существующим потребностям. Количество такого блага недостаточно для насыщения данной потребности, и поэтому за его потребление взимается положительная цена. И уже экономические блага, в свою очередь, делятся на частные, общественные и смешанные, которые мы сейчас рассмотрим.

Исключаемым благом назовем то, которое можно исключить из потребления всех индивидуумов, кроме одного, заплатившего за него установленную цену. Если за счет ценового механизма нельзя целиком закрепить права на данный товар или услугу за одним лицом, поскольку издержки исключения из потребления остальных экономических агентов запретительно высоки, и в случае потребления этого блага одним из них другие лица также получают возможность воспользоваться этой вещью, то такое благо будет неисключаемым.

Конкурентным благом будем считать продукт или услугу, которые физически не могут быть потреблены одновременно несколькими потребителями. Конкурентные блага – это товары и услуги, потребляемые одним потребителем и ликвидируемые в процессе потребления, т.е. не существующие после того, как они были использованы данным экономическим агентом. Они не допускают совместное пользование группой потребителей. Если же потребление блага одним экономическим агентом не будет означать невозможность его использования другим, причем такое использование не будет сопряжено с дополнительными затратами, то это благо будет неконкурентным.

Теперь можно точно определить понятия частных и общественных благ. Частное благо – это конкурентное исключаемое благо, а общественное – наоборот – неконкурентное и неисключаемое. Помимо крайних случаев частных и общественных благ на-

[1] В дальнейшем круг анализируемых благ будет расширен за счет включения в него досуга, использование которого так же, как и потребление товаров, приносит индивидууму полезность.

блюдаются и промежуточные ситуации так называемых смешанных товаров и услуг. Смешанное благо – это либо одновременно конкурентное и неисключаемое, либо одновременно исключаемое и неконкурентное благо.

В дальнейшем анализе будем опираться на важные информационные предпосылки. Мы полагаем наличие полноты информации хотя бы у одного хозяйствующего субъекта или у всех экономических агентов в совокупности. Другими словами, не допускается ситуация, когда массивы или элементы информации не доступны ни одному из субъектов в экономике. В данном исследовании будет использоваться еще более сильное предположение о полной рациональности всех экономических агентов. Тем самым исключается ограниченная рациональность. Под ограниченной рациональностью понимается отсутствие информации у субъекта о полном наборе возможных вариантов собственных поступков, а также действий остальных контрагентов и внешних сил или же его незаинтересованность в использовании имеющейся информации в планировании своего поведения.

В качестве потребителей могут выступать отдельные индивидуумы и семьи, или домашние хозяйства. Кроме того, потребителями могут быть более крупные социальные общности, выделяемые по различным принципам, такие, как, например, роды, племена, общины, коммуны, общественные организации, а также коллективы иного рода, в том числе даже столь широкие, как народности и нации. В нашем дальнейшем анализе будем предполагать, что потребители тождественны индивидуумам, всегда, однако, имея в виду и возможное более широкое толкование понятия «потребитель». Это упрощение позволит избежать рассмотрения распределения потребления благ и расходов на их приобретение внутри названных выше коллективов; т.е. вопросов, связанных с потреблением общественных благ, которые в отличие от частных относятся к сфере не индивидуального, а коллективного потребления.

Пусть в экономике существуют $l$ продуктов. Присвоим каждому из товаров индекс $h$, $h = 1, \dots, l$. Набор из $l$ потребительских благ обозначим через $x$. Потребительский набор товаров, или потребительская корзина, $x$ – это произвольный вектор, состоящий из неотрицательных действительных чисел. Множество потребляемых продуктов, или потребительское множество $X$, – это совокупность всех $x$. Оно представляет собой весь неотрицательный вещественный ортант[2] $\mathbb{R}^l_+$.

Пусть, $x_1$, $x_2$, $x_3$ – это варианты организации хозяйственной деятельности, а $\succsim_i$ – упорядочение этих альтернатив некоторым индивидуумом, которого мы обозначим индексом $i$. Выражение $x_1 \succsim_i x_2$ означает, что альтернатива $x_1$ является для него предпочтительной или безразличной по отношению к $x_2$. Присвоим значение 1 выбранной альтернативе, а 0 – отвергнутой. Тогда отношение $x_1 \succsim_i x_2$ можно представить как булеву функцию, заданную таблично:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \succsim_i x_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, независимые переменные которой определены на множестве $E^2 = \{0, 1\}$ ($x_i = \alpha_i$, где $\alpha_i \in E^2, i = 1, \dots, n$), называют булевой функцией, или функцией алгебры логики, если она принимает значения $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \delta_i, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, так же на множестве $E^2$.

[2] Здесь и далее будем обозначать через $\mathbb{R}^l_+$ неотрицательный ортант $l$-мерного пространства действительных чисел: $\mathbb{R}^l_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^l, x \geqslant 0\}$.

Очевидно, что множество булевых значений $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ конечно и саму функцию можно задать, расположив наборы переменных в лексикографическом порядке, т.е. по возрастанию, и указав ее значения на каждом наборе коэффициентов[3].

Табличное представление булевой функции

| $x_1$ | $x_2$ | … | $x_{n-1}$ | $x_n$ | $f(x_1, \dots, x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | … | 0 | 0 | $\delta_0$ |
| 0 | 0 | … | 0 | 1 | $\delta_1$ |
| 0 | 0 | … | 1 | 0 | $\delta_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | … | $\alpha_{n-1}$ | $\alpha_n$ | … |
| … | … | … | … | … | … |
| 1 | 1 | … | 1 | 1 | $\delta_{2^n-1}$ |

Приведем примеры булевых функций одной и двух переменных.

Булевы функции одной переменной

| $x$ | 0 (тождественный нуль) | 1 (тождественная единица)[4] | $x$ (тождественная функция) | $\bar{x}$ (отрицание, или инверсия) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Константы 0 и 1 – это две особенные функции, которые не имеют существенных переменных. Некоторая, $i$-я булева переменная является существенной, если найдется такой набор значений остальных переменных $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, что изменение $i$–й переменной при неизменных остальных переменных приводит к изменению значения функции[5]: $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$.

Элементарные булевы функции двух переменных

| $x_1$ | $x_2$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Функция логического умножения, или конъюнкция, $f_1(x_1, x_2) = x_1 \& x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$ отвечает на вопрос, является ли истинным утверждение, состоящие из двух положений и совпадающее как с одним из них, так и с другим. Очевидно, что если хотя бы одно из утверждений, составляющих данное, является ложными, то и итоговое утверждение будет ложным. Итоговое утверждение будет истинным, только если оба из его составляющих будут верными.

Функция логического сложения, или дизъюнкция, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ отвечает на

[3] См.: Редькин Н.П. Дискретная математика. 2-е изд. – СПб.: Лань, 2006. В силу того, что каждая переменная $x_i$ может принимать два значения $\{0,1\}$, количество возможных значений аргумента, состоящего из $n$ переменных, равно $2^n$. Поскольку каждому значению независимой переменной соответствуют два возможных значения независимой ($\delta_i = \{0,1\}$), постольку число булевых функций $n$ переменных $f(x_1, \dots, x_n) = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2^n-1})$ равно $\delta_0 \times \delta_1 \times \dots \times \delta_{2^n-1} = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{2^n} = 2^{2^n}$.

[4] Булевская тождественная единица известна как один из аристотелевских законов формальной логики – «закон тождества», который утверждает, что всякая мысль обязана иметь строго определенный смысл (См.: Нуреев Р.М. Курс микроэкономики. – М.: Норма, 2008).

[5] В противном случае переменная называется несущественной, или фиктивной.

вопрос, является ли истинным утверждение, состоящие из двух положений и совпадающее хотя бы с одним из них. Очевидно, что если оба из утверждений, составляющих данное, являются ложными, то и итоговое утверждение будет ложным. Если хотя бы одно из утверждений, составляющих данное, верно, то и итоговое утверждение будет истинным.

Логическая функция суммы по модулю два[6] $f_3(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ определяется по аналогии с тем же алгебраическим понятием – как остаток от деления $(x_1 + x_2)$ на 2. Эквивалентность $f_4(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2 = x_1 \equiv x_2$ подразумевает истинное утверждение, только если значения переменных совпадают. При определении импликации[7] $f_5(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ учитывается, что, поскольку ложное утверждение не несет в себе никакой позитивной информации, из неверного утверждения может следовать как ложь, так и истина. Последние булевы функции двух переменных – это штрих Шеффера $f_6(x_1, x_2) = x_1 / x_2$ и стрелка Пирса $f_7(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$, которые представляют собой соответственно отрицание конъюнкции $f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1 \& x_2}$ и дизъюнкции $f_7(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$.

Свойства элементарных булевых функций позволяют сформулировать следующие законы формальной логики.

| Название закона | Формулировка закона |
|---|---|
| Ассоциативности: а) конъюнкции;<br>б) дизъюнкции;<br>в) суммы по модулю два | а) $x_1 \& (x_2 \& x_3) = (x_1 \& x_2) \& x_3$;<br>б) $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$;<br>в) $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$ |
| Коммутативности: а) конъюнкции;<br>б) дизъюнкции;<br>в) суммы по модулю два | а) $x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$;<br>б) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$;<br>в) $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ |
| Дистрибутивности –<br>а) конъюнкции относительно дизъюнкции;<br>б) дизъюнкции относительно конъюнкции | а) $(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3)$;<br>б)$(x_1 \& x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \& (x_2 \vee x_3)$ |
| Двойного отрицания | $\bar{\bar{x}} = x$ |
| Де Моргана | $\overline{x_1 \& x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$; $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2$ |
| Поглощения | $x_1 \vee (x_1 \& x_2) = x_1$; $x_1 \& (x_1 \vee x_2) = x_1$ |
| Противоречия[8] | $x \& \bar{x} = 0$ |
| Исключенного третьего | $x \vee \bar{x} = 1$ |
| Идемпотентности | $x \& x = x$; $x \vee x = x$ |
| Операций с константой:<br>а) умножения на константу;<br>б) сложения с константой | а) $x \& 1 = x$, $x \& 0 = 0$;<br>б) $x \vee 1 = 1$, $x \vee 0 = x$ |

[6] Остаток от деления 0 (суммы двух нулей) и 2 (суммы двух единиц) на два равен нулю; а остаток от деления на два единицы (суммы нуля и единицы) составит единицу.

[7] С данной функцией непосредственно связан логический закон достаточного основания (Лейбница), который требует, чтобы каждое верное утверждение обосновывалось другими, справедливость которых была уже прежде установлена (Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. – М.: Едиториал УРСС, 2003).

[8] Закон противоречия, известный еще со времен Аристотеля, гласит, что два противоположных суждения о едином предмете не могут быть справедливыми одновременно. На данном законе основан, в частности, принцип доказательства утверждения от противного $((\bar{x}_1 \rightarrow x_2) \vee (\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2)) \rightarrow x_1$: если отрицание $x_1$ ведет к противоречию, то $x_1$ – истинно (Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982).

Доказательство данных законов осуществляется путем обоснования эквивалентности соответствующих формул[9], т.е. равенства реализуемых ими булевых функций[10].

**Пример 1.1. Закон исключенного третьего**[11]: $x \vee \bar{x} = 1$

| $x$ | $\bar{x}$ | $x \vee \bar{x}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

Итак, формула $x \vee \bar{x}$ эквивалентна тождественной единице.

**Пример 1.2. Закон де Моргана**: $\overline{x_1 \& x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \& x_2$ | $\overline{x_1 \& x_2}$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_2$ | $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Итак, $\overline{x_1 \& x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$, поскольку левая и правая формулы реализуют эквивалентные булевы функции. Остальные свойства элементарных булевых функций доказываются аналогично[12].

---

[9] Формулой над некоторым множеством булевых функций $M$ называется такая функция алгебры логики, аргументом которой является либо булева переменная, либо значение некоторой логической функции из данного множества $M$.

[10] Булевы функции равны, когда каждая из них представляет собой другую с точностью до изъятия и/или добавления фиктивной переменной.

[11] В соответствии с аристотелевым законом исключенного третьего из двух одновременных противоположных суждений о едином предмете одно – обязательно будет справедливым (Нуреев Р.М. Указ. соч.).

[12] Любая булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть реализована в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы $f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} \left(x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}\right)$, если $f(x_1, \dots, x_n)$ не равна тождественно нулю; и в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы $f(x_1, \dots, x_n) = \&_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} \left(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee\right.$ *xnσn*, если *ƒx1,...,xn* не равна тождественной единице. Здесь *σi=(0,1), xiσi=xi при σi=1,xi при σi=0,*, $i$=1,...,$n$; то есть $x_i^{\sigma_i} = 1$ и $x_i^{\sigma_i} = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma_i$. Таким образом, любая булева функция может быть реализована в виде формулы через инверсию, дизъюнкцию и конъюнкцию и даже только через отрицание и конъюнкцию, поскольку $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \& \bar{x}_2}$; либо только через инверсию и дизъюнкцию в силу тождества $x_1 \& x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$. Кроме того, любая булева функция может быть представлена своим полиномом Жегалкина $f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$, где $a_{i_k} = (0,1)$, а значит, реализована формулой над системой булевых функций, состоящей из 0, 1, конъюнкции и суммы по модулю два. Системы булевых функций, задающие произвольную булеву функцию, называются функционально полными.

Например, совершенная конъюнктивная и дизъюнктивная нормальная формы для функции, реализованной формулой $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus x_2) \to (x_2 \& x_3)$, таковы: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$. В качестве еще одного примера выпишем полином Жегалкина для одной из элементарных булевых функций двух переменных – “штриха Шеффера” $(f_6)$: $f(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 x_2$. В справедливости этих утверждений можно убедиться, рассмотрев табличное представление соответствующих формул.

Отметим, что помимо функций алгебры логики существуют функции $k$-значной логики, которые, как и их переменные, принимают значения из множества $E^k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ (Редькин Н.П. Дискретная математика. 2-е изд. – СПб.: Лань, 2006).

Итак, упорядочение $x_1 \gtrsim_i x_2$ – это отношение следования, или импликации, $x_1 \to x_2$. Действительно, в отношении упорядоченности $x_1$ «следует за» $x_2$.

Обычно от ординалистской, или порядковой, функции предпочтений экономического субъекта требуют, чтобы она представляла собой (отличное от константы) отношение полного предпорядка[13], т.е. удовлетворяла следующим свойствам рационального выбора.

Первое свойство – это сравнимость любых возможных вариантов организации хозяйственной деятельности, или полнота данного множества. Для любых вариантов $x_1$ и $x_2$ верно $(x_1 \gtrsim_i x_2) \vee (x_2 \gtrsim_i x_1)$, т.е.:

$$(x_1 \gtrsim_i x_2) \vee (x_2 \gtrsim_i x_1) = 1. \quad (1.1)$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \gtrsim_i x_2$ | $x_2 \gtrsim_i x_1$ | $(x_1 \gtrsim_i x_2) \vee (x_2 \gtrsim_i x_1)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

В частности, для $x_1 = x_2$ имеем $x_1 \gtrsim_i x_1 = 1$ – свойство рефлексивности.

| $x_1$ | $x_2 = x_1$ | $x_1 \gtrsim_i x_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Второе свойство – это транзитивность отношения упорядоченности. Формула $(x_1 \gtrsim_i x_2)\&(x_2 \gtrsim_i x_3) \to (x_1 \gtrsim_i x_3)$ верна для любых наборов $x_1$, $x_2$, $x_3$; т.е.:

$$(x_1 \gtrsim_i x_2)\&(x_2 \gtrsim_i x_3) \to (x_1 \gtrsim_i x_3) = 1. \quad (1.2)$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1 \gtrsim_i x_2$ | $x_2 \gtrsim_i x_3$ | $(x_1 \gtrsim_i x_2)\&(x_2 \gtrsim_i x_3)$ | $(x_1 \gtrsim_i x_3)$ | $(x_1 \gtrsim_i x_2)\&(x_2 \gtrsim_i x_3) \to (x_1 \gtrsim_i x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Свойства (1.1) – (1.2) выполняются только для трех булевых функций двух переменных – тождественной единицы и импликаций $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$. Поэтому, если переменные не являются фиктивными, т.е. отношение предпочтения отлично от константы, то свойства (1.1) – (1.2) можно использовать в качестве аксиом рационального упорядочения хозяйственных альтернатив.

Обозначим через $\succ_i$ отношение строгого предпочтения. Оно означает, что должны одновременно выполняться соотношения $x_1 \gtrsim_i x_2$ и $\overline{x_2 \gtrsim_i x_1}$, или в формальной записи, $x_1 \succ_i x_2 = (x_1 \gtrsim_i x_2)\&\left(\overline{x_2 \gtrsim_i x_1}\right)$.

[13] Иногда такое отношение называют слабым упорядочением (Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004; Debreu G. Theory of value. – N.Y.: Willey; L.: Chapman & Hall, 1959).

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \succ_i x_2$ | $x_1 \succsim_i x$ | $x_2 \succsim_i x_1$ | $\overline{x_2 \succsim_i x_1}$ | $(x_1 \succsim_i x_2)\&(\overline{x_2 \succsim_i x_1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Очевидно, что, если $x_1$ хуже, чем $x_2$, то $x_2$ лучше, чем $x_1$:

$$\left(\overline{x_1 \succsim_i x_2}\right) \to (x_2 \succ_i x_1) = 1. \qquad (1.3)$$

Кроме того, аналогично нестрогому отношению предпочтения (1.2), легко доказать, что строгое предпочтение транзитивно:

$$(x_1 \succ_i x_2)\&(x_2 \succ_i x_3) \to (x_1 \succ_i x_3) = 1. \qquad (1.4)$$

Обозначим через $\sim_i$ отношение безразличия. Оно означает, что одновременно должны выполняться соотношения $x_1 \succsim_i x_2$ и $x_2 \succsim_i x_1$, т.е. $x_1 \sim_i x_2 = (x_1 \succsim_i x_2)\&(x_2 \succsim_i x_1)$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \sim_i x_2$ | $x_1 \succsim_i x_2$ | $x_2 \succsim_i x_1$ | $(x_1 \succsim_i x_2)\&(x_2 \succsim_i x_1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Обозначим через $S$ множество допустимых альтернатив и назовем его предъявлением. Пусть $C(S)$ – множество таких альтернатив $x_1$ в $S$, что для каждого $x_2$ в $S$ $x_1 \succsim_i x_2$. Несложно проверить, что:

$$x_1 \succ_i x_2 \Leftrightarrow x_1 \text{ – единственный элемент в } C(\{x_1, x_2\}). \qquad (1.5)$$

Очевидно, $\left(\overline{x_1 \succsim_i x_2}\right)\&\left(\overline{x_2 \succsim_i x_1}\right) \to (x_1 \succ_i x_2)$, а значит, $C(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2\}$. Итак, знание $C(S)$, где $S = \{x_1, x_2\}$ – множество, состоящее из двух альтернатив, полностью определяет отношения $\succ_i$ и $\sim_i$, а значит, и $\succsim_i$. Но, по определению, знание $\succsim_i$ полностью определяет функцию выбора $C(S)$ для всех возможных наборов альтернатив $S$. Итак, выбор в произвольном множестве определяется выбором во всевозможных соответствующих ему двухэлементных подмножествах[14].

[14] Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004.