Тема 3. Эластичность спроса и предложения

3.1. Ценовая эластичность спроса: измерение и свойства

Эластичность спроса по цене – показатель интенсивности реакции величины спроса в ответ на изменение цены, исчисляемый через отношение процентного изменения величины спроса к процентному изменению цены:

$$E_p^d = \frac{(Q_2 - Q_1)}{Q_1} \Big/ \frac{(P_2 - P_1)}{P_1} = \frac{\Delta Q}{Q} \Big/ \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}.$$

Это коэффициент точечной эластичности спроса по цене в форме конечных приращений. При бесконечно малом приращении цены данный коэффициент можно записать в дифференциальной форме:

$$E_p^d = \lim_{\Delta P \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{Q} \Big/ \frac{\Delta P}{P} \right) = \lim_{\Delta P \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta P} \frac{P}{Q} \right) = \frac{dQ}{dP} \frac{P}{Q}.$$

Для того чтобы снять неопределенность относительно базы, с которой сопоставляется приращение объема спроса и цены при произвольном направлении изменений, может рассчитываться коэффициент дуговой эластичности спроса по цене, в котором в качестве базы используется среднее из значений объема продаж и цены:

$$E_p^d = \frac{(Q_2 - Q_1)}{(Q_2 + Q_1)/2} \Big/ \frac{(P_2 - P_1)}{(P_2 + P_1)/2} = \frac{(Q_2 - Q_1)}{(Q_2 + Q_1)} \Big/ \frac{(P_2 - P_1)}{(P_2 + P_1)}.$$

Показатель эластичности отличается от углового коэффициента функции спроса. Например, несмотря то, что на рис. 3.1 у графика спроса D_a угловой коэффициент по абсолютной величине в два раза больше, чем у D_b, в силу того, что для функции спроса D_a $\frac{dQ}{dP} = tg\alpha$, а для функции спроса D_b $\frac{dQ}{dP} = tg\beta$ при цене P^* эластичность спроса по цене будет одинакова для обеих функций спроса:

$$E_p^{D_b} = tg\beta \cdot \frac{P^*}{Q_b} = \frac{2k}{n} \cdot \frac{P^*}{Q_b} = 2tg\alpha \cdot \frac{P^*}{2Q_a} = tg\alpha \cdot \frac{P^*}{Q_a} = E_p^{D_a}.$$

И наоборот, эластичность спроса может быть разной при в случае одинаковых угловых коэффициентов линейных функций спроса. Это демонстрирует рис. 3.2. Здесь, поскольку при одной и той же цене P^* величины спроса для функций D_a и D_b, графики которых параллельны, связаны между собой соотношением $Q_b = 2Q_a$, постольку в соответствующих точках эластичность функции D_a будет в два раза превышать эластичность D_b:

$$E_p^{D_b} = tg\beta \cdot \frac{P^*}{Q_b} = tg\alpha \cdot \frac{P^*}{2Q_a} = \frac{E_p^{D_a}}{2}.$$

Рисунок 3.1.
Одинаковая эластичность при разных угловых коэффициентах спроса

Рисунок 3.2.
Разная эластичность при одинаковых угловых коэффициентах спроса

Перечислим некоторые свойства показателя эластичности[1].

1. Эластичность $E_x^y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$ – безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены переменные y и x:

$$E_x^y = \frac{d(by)}{d(ax)} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{bdy}{adx} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = E_x^y.$$

2. Эластичности взаимно обратных функций – взаимно обратные величины:

$$E_x^y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y^x}.$$

3. Эластичность произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x, равна сумме эластичностей:

$$E_x^{uv} = \frac{d}{dx}\big(u(x)v(x)\big) \cdot \frac{x}{u(x)v(x)} = \left(v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}\right)\frac{x}{uv} = \frac{du}{dx}\frac{x}{u} + \frac{dv}{dx}\frac{x}{v}$$
$$= E_x^u + E_x^v.$$

4. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x, равна разности эластичностей:

$$E_x^{u/v} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \frac{x}{u/v} = \frac{\left(\frac{du}{dx}v - \frac{dv}{dx}u\right)}{v^2} \cdot \frac{xv}{u} = \frac{du}{dx}\frac{x}{u} - \frac{dv}{dx}\frac{x}{v} = E_x^u - E_x^v.$$

---

[1] Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – 3-е изд. – М.: Дело и Сервис, 2001.

5. Эластичность суммы двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x, может быть найдена по следующей формуле:

$$E_x^{(u+v)} = \frac{d}{dx}\big(u(x) + v(x)\big) \cdot \frac{x}{(u+v)} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)\frac{x}{(u+v)} = \frac{uE_x^u + vE_x^v}{u+v}.$$

6. Эластичность степенной функции $y = x^a$ постоянна и равна показателю степени a:

$$E_x^y = \frac{d}{dx}(x^a) \cdot \frac{x}{x^a} = ax^{a-1}\left(\frac{x}{x^a}\right) = a.$$

7. Эластичность показательной функции $y = a^x$ пропорциональна x:

$$E_x^y = \frac{d}{dx}(a^x) \cdot \frac{x}{a^x} = a^x \cdot \ln a \cdot \left(\frac{x}{a^x}\right) = x\ln a.$$

8. Эластичность линейной функции $y = ax + b$, может быть найдена по следующей формуле:

$$E_x^y = \frac{d}{dx}(ax + b) \cdot \frac{x}{(ax+b)} = \frac{ax}{ax+b}.$$

9. Эластичность спроса по цене может быть посчитана как отношение дифференциала логарифма объема спроса $\left(d\ln Q = \frac{dQ}{Q}\right)$ к дифференциалу логарифма цены $\left(d\ln P = \frac{dP}{P}\right)$:

$$E_p^d = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{d\ln Q}{d\ln P}.$$

Если выполняется закон спроса, то ценовая эластичность функции спроса равна отношению отрезков касательной к графику функции, проведенной в точке равновесия, от точки равновесия до оси ординат и от точки равновесия до оси абсцисс, взятому со знаком минус (рис. 3.3). Действительно, поскольку $Ax^* = \frac{Cx^*}{tg\alpha}$ и $tg\alpha = -f'(x)$, постольку $Ax^* = \frac{f(x)}{-f'(x)}$. В силу подобия треугольников $\Delta CBy^* \sim \Delta CAx^*$ получаем следующую цепочку равенств: $\frac{CB}{CA} = \frac{Cy^*}{Ax^*} = \frac{0x^*}{Ax^*} = -\frac{f'(x)x}{f(x)} = -E_x$, т.е. $E_x = -\frac{CB}{CA}$, что и требовалось доказать.

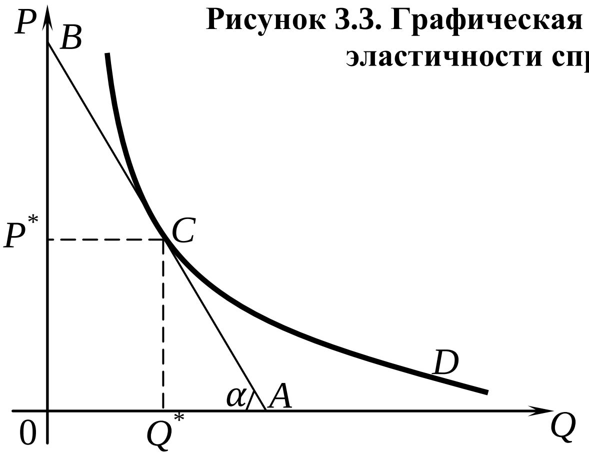


Рисунок 3.3. Графическая иллюстрация эластичности спроса

По коэффициенту эластичности спроса по цене, зная объемы потребления и цену товара, можно восстановить функцию спроса при предположении, что она является линейной. Например, если при цене товара 6 (руб.) величина спроса составляет 60 (шт.), а эластичность спроса по цене равна –3, а значит, $E_p^d = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{6}{60} = -3$; то $\frac{\Delta Q}{\Delta P} = -30$, Q=a–30P; 60=a–30·6; a=240. Таким образом, функция спроса будет выглядеть так: $Q_d = 240 - 30P$.

3.2. Эластичность спроса и выручка продавцов

Выручка продавцов как функция объема производства следующим образом связана с эластичностью рыночного спроса:

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = \frac{d}{dQ}(p(Q)Q) = p(Q) + \frac{dp(Q)}{dQ}Q$$

$$= p(Q)\left(1 + \frac{dp(Q)}{dQ} \cdot \frac{Q}{p(Q)}\right) = p(Q)\left(1 + E_q^d\right)$$

$$= p\left(1 + \frac{1}{\frac{dQ(p)}{dp} \cdot \frac{p}{Q(p)}}\right) = p\left(1 + \frac{1}{E_p^d}\right),$$

где $MR = \frac{dTR}{dQ}$ – предельная выручка, $E_p^d = \frac{dQ(p)}{dp} \cdot \frac{p}{Q(p)}$ – эластичность спроса по цене, $E_q^d = \frac{dp(Q)}{dQ} \cdot \frac{Q}{p(Q)}$ – эластичность спроса по объему продаж. При расчетах был использован тот факт, что эластичности взаимно обратных функций – это взаимно обратные величины.

Зависимость между выручкой продавцов как функцией рыночной цены и эластичностью спроса выглядит так:

$$\frac{dTR}{dp} = \frac{d}{dp}(Q(p)p) = Q(p) + \frac{dQ(p)}{dp}p = Q(p)\left(1 + \frac{dQ(p)}{dp} \cdot \frac{p}{Q(p)}\right)$$

$$= Q(p)\left(1 + E_p^d\right) = Q(p)\left(1 + \frac{1}{\frac{dp(Q)}{dQ} \cdot \frac{Q}{p(Q)}}\right)$$

$$= p\left(1 + \frac{1}{E_q^d}\right).$$

Характерная связь между выручкой продавца (продавцов) и эластичностью рыночного линейной функции спроса *P*=*a*–*bQ* показана на рис. 3.4.

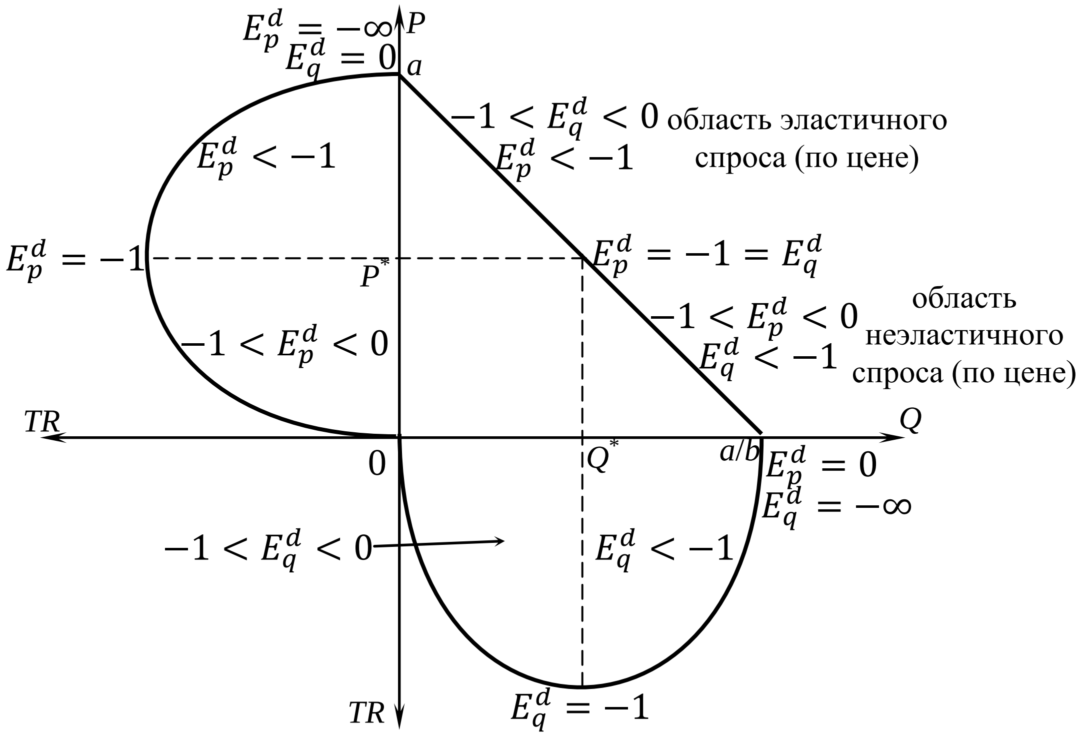


Рисунок 3.4. Эластичность линейного спроса и выручка продавцов

Эластичность линейной функции спроса рассчитывается по следующей формуле: $E_q^d = -\frac{bQ}{a-bQ}$. Эластичности взаимно обратных функций – это взаимно обратные величины. Поэтому эластичность обратной функции спроса $Q = \frac{a}{b} - \frac{P}{b}$ рассчитывается по следующей формуле: $E_p^d = -\frac{P}{b\left(\frac{a}{b} - \frac{P}{b}\right)} = -\frac{a-bQ}{bQ}$. Очевидно, что если $E_q^d(Q^*) = -1$, то и $E_p^d(Q^*) = -1$. Диапазону продаж $0 < Q < Q^*$ соответствует эластичному сегменту спроса (по цене), а диапазон $0 < Q < \frac{a}{b}$ – неэластичному сегменту спроса.

3.3. Перекрестная эластичность спроса по цене. Эластичность спроса по доходу

Перекрестная эластичность спроса по цене – показатель интенсивности реакции величины спроса на один товар в ответ на изменение цены другого, исчисляемый через отношение процентного изменения величины спроса на данный товар к процентному изменению цены на другое благо:

$$E_{p_y}^{d_x} = \frac{(Q_{x2} - Q_{x1})}{Q_{x1}} \Big/ \frac{\left(P_{y2} - P_{y1}\right)}{P_{y1}} = \frac{\Delta Q_x}{Q_x} \Big/ \frac{\Delta P_y}{P_y} = \frac{\Delta Q_x}{\Delta P_y} \cdot \frac{P_y}{Q_x}.$$

Это коэффициент точечной перекрестной эластичности спроса по цене в форме конечных приращений. При бесконечно малом приращении цены товара y данный коэффициент можно записать в дифференциальной форме:

$$E_{p_y}^{d_x} = \lim_{\Delta P_y \to 0} \left(\frac{\Delta Q_x}{Q_x} \Big/ \frac{\Delta P_y}{P_y} \right) = \lim_{\Delta P_y \to 0} \left(\frac{\Delta Q_x}{\Delta P_y} \frac{P_y}{Q_x} \right) = \frac{dQ_x}{dP_y} \frac{P_y}{Q_x}.$$

По определению, товары являются взаимозаменяемыми, если объемы их потребления изменяются в противоположном направлении: с ростом покупок одного товара объемы другого сокращаются и, наоборот, при снижении потребления данного товара другое благо замещает его в потребительских корзинах, и объемы покупок второго товара возрастают. Под действием закона спроса с ростом цены, например, товара x объем его потребления снижается. Поскольку товар y является для x товаром-субститутом, постольку в результате сдвига графика спроса на y вправо-вверх объем его покупок и рыночная цена возрастают (рис. 3.5).

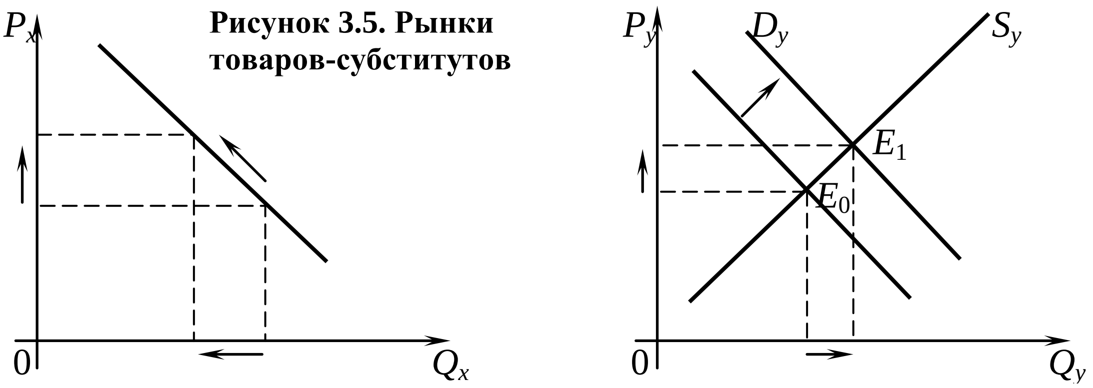


Рисунок 3.5. Рынки товаров-субститутов

Таким образом, для взаимозаменяемых товаров рост цены одного из них, как правило[2], приводит к росту цены другого. Поэтому для взаимозаменяемых товаров показатель перекрестной эластичности спроса по цене, как правило, будет положительным.

По определению, товары являются взаимодополняющими, если объемы их потребления изменяются сонаправлено: при увеличении покупок данного товара потребители начинают предъявлять спрос на дополнительное количество комплементарного блага, объемы потребления которого так же возрастают; и, наоборот, при снижении потребления одного товара спрос на другое благо сокращается. Под действием закона спроса с ростом цены, например, товара x объем его потребления снижается. Поскольку товар y является для x комплементарным благом, постольку в результате сдвига графика спроса на y влево-вниз объем его покупок и рыночная цена снижаются (рис. 3.6). Поэтому для взаимозаменяемых товаров показатель перекрестной эластичности спроса по цене, как правило, будет положительным.

Таким образом, для взаимодополняющих товаров рост цены одного из них, как правило[3], приводит к падению цены другого. Поэтому для взаимодополняющих товаров показатель перекрестной эластичности спроса по цене будет отрицательным.

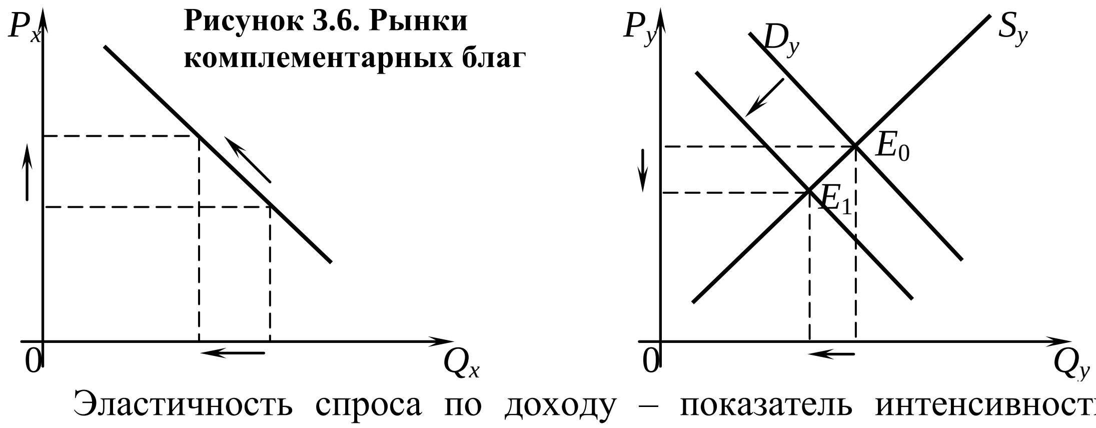


Рисунок 3.6. Рынки комплементарных благ

Эластичность спроса по доходу – показатель интенсивности реакции величины спроса в ответ на изменение дохода покупателей, исчисляемый через отношение процентного изменения величины спроса к процентному изменению дохода:

---

[2] За исключением товаров Гиффена, для которых не выполняется закон спроса (см. параграф 4.4).

[3] Исключением здесь так же, как и в случае субститутов, являются товары Гиффена.

$$E_I^d = \frac{(Q_2 - Q_1)}{Q_1} \Big/ \frac{(I_2 - I_1)}{I_1} = \frac{\Delta Q}{Q} \Big/ \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta I} \cdot \frac{I}{Q}.$$

Это коэффициент точечной эластичности спроса по доходу в форме конечных приращений. При бесконечно малом приращении цены данный коэффициент можно записать в дифференциальной форме:

$$E_I^d = \lim_{\Delta I \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{Q} \Big/ \frac{\Delta I}{I} \right) = \lim_{\Delta I \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta I} \frac{I}{Q} \right) = \frac{dQ}{dI} \frac{I}{Q}.$$

Товар называется нормальным, если спрос на него растет с увеличением доходов покупателей. Товар называется инфериорным, или худшим, если спрос на него снижается с ростом доходов потребителей. Для нормальных благ эластичность спроса по доходу является величиной положительной, а для инфериорных – отрицательной.

Приведем пример расчетов с использованием эластичности спроса по доходу. Допустим, что функция спроса выражена уравнением $Q_d = 4 - 2P + \frac{I}{100}$, где P – цена товара, а I – доход. Пусть эластичность спроса по доходу равна ⅓, а доход равен 100. Тогда $E_I^d = \frac{dQ}{dI} \cdot \frac{I}{Q} = 0.01 \cdot \frac{100}{Q} = ⅓$, а значит, объем потребления товара составляет $Q = 3$ при цене $P = 1$.

3.4. Ценовая эластичность предложения

Эластичность предложения по цене – показатель интенсивности реакции величины предложения в ответ на изменение цены, исчисляемый через отношение процентного изменения величины предложения к процентному изменению цены. Эластичность предложения рассчитывается по тем же формулам, что и функции спроса. Если выполняется закон спроса, то производная функции предложения по цене будет положительной, так же как и цена, и количество товаров, а значит, эластичность предложения будет больше нуля.

График линейной функции предложения обладает интересными свойствами с точки зрения показателя эластичности. Если график линейной функции предложения пересекает ось цен при P>0, то эластичность предложения больше единицы, или предложение эластично. Действительно, поскольку $\frac{dP}{dQ_s} = tg\beta$, $\frac{P}{Q_s} = tg\alpha$ и ∠α>∠β (рис.3.7), постольку $\frac{P}{Q_s} > \frac{dP}{dQ_s}$. Используя определение точечной эластичности предложения $E_p^s = \frac{dQ_s}{dP}\frac{P}{Q_s} = \frac{P/Q_s}{dP/dQ_s}$, получаем, что $E_p^s > 1$.

Если график линейной функции предложения пересекает ось количества товаров при Q>0, то эластичность меньше единицы, или предложение неэластично: $\frac{dP}{dQ_s} = tg\beta$, $\frac{P}{Q_s} = tg\alpha$ и ∠α<∠β (рис.3.8), значит, $0 < \frac{P}{Q_s} < \frac{dP}{dQ_s}$, т.е. $0 < E_p^s < 1$.

Если график линейной функции предложения проходит через начало координат, то предложение характеризуется единичной эластичностью. Действительно, поскольку $\frac{dP}{dQ_s} = tg\beta$, $\frac{P}{Q_s} = tg\alpha$ и ∠α=∠β (рис. 3.9), постольку $\frac{P}{Q_s} = \frac{dP}{dQ_s}$, а значит, $E_p^s = 1$.

Рисунок 3.7. Эластичное предложение

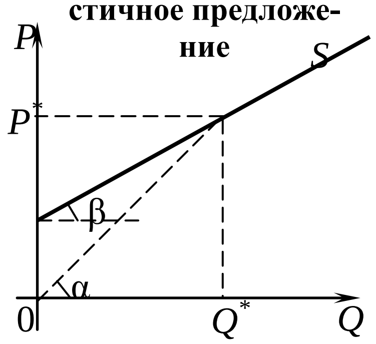


Рисунок 3.8. Неэластичное предложение

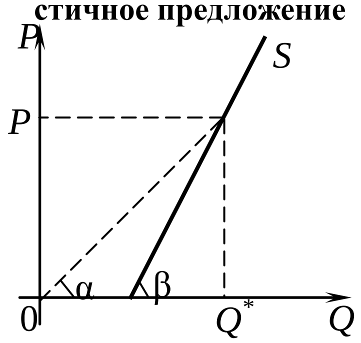
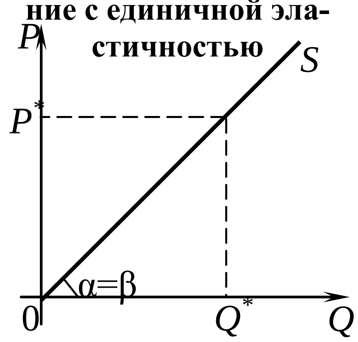


Рисунок 3.9. Предложение с единичной эластичностью



Эластичность возрастающей функции, например, функции предложения, равна отношению отрезков касательной к графику функции, проведенной в точке равновесия, от точки равновесия до оси ординат и от точки равновесия до оси абсцисс (рис. 3.10).

Действительно, $tg\alpha = \frac{Cx^*}{Ax^*} = f'(x)$; $Ax^* = \frac{Cx^*}{f'(x)} = \frac{f(x)}{f'(x)}$; $\Delta CBy^* \sim \Delta ACx^*$, а значит, $\frac{CB}{CA} = \frac{Cy^*}{Ax^*} = \frac{f'(x)x}{f(x)} = E_x$.

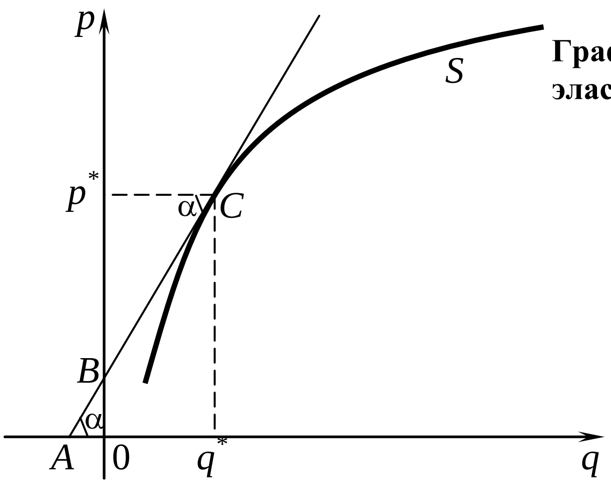


Рисунок 3.10. Графическая иллюстрация эластичности предложения

3.5. Эластичность спроса и предложения и распределение налогового бремени

Проанализируем распределение налогового бремени между продавцами и покупателями: $T = tQ_t^* = T_c + T_p$, $T_c = Q_t^*(P_t^* - P_0^*)$, $T_p = Q_t^*(P_0^* - P_t^* + t)$. Очевидно, что T_c и T_p в сумме дают T. Используя формулы точечной эластичности спроса и предложения по цене для дискретных приращений переменных, рассчитаем отношение коэффициентов эластичности предложения и спроса:

$$\frac{T_c}{T_p} = \frac{Q_t^*(P_t^* - P_0^*)}{Q_t^*(P_0^* - P_t^* + t)} = -\frac{\frac{(Q_t^* - Q_0^*)/Q_0^*}{(P_t^* - t - P_0^*)/P_0^*}}{\frac{(Q_t^* - Q_0^*)/Q_0^*}{(P_t^* - P_0^*)/P_0^*}} = -\frac{E_p^s}{E_p^d}.$$

Таким образом, величины налогового бремени, которые несут потребители и производители, соотносятся так же как эластичности предложения и спроса с поправкой на знак: $\frac{T_c}{T_p} = -\frac{E_p^s}{E_p^d}$. Чем более эластичен спрос и чем менее эластично предложение, тем больше доля налогового бремени производителей по отношению к потребителям (рис. 3.11-3.12).

Рисунок 3.11. Эластичность спроса и предложения и распределение налогового бремени: относительно неэластичный спрос и эластичное предложение

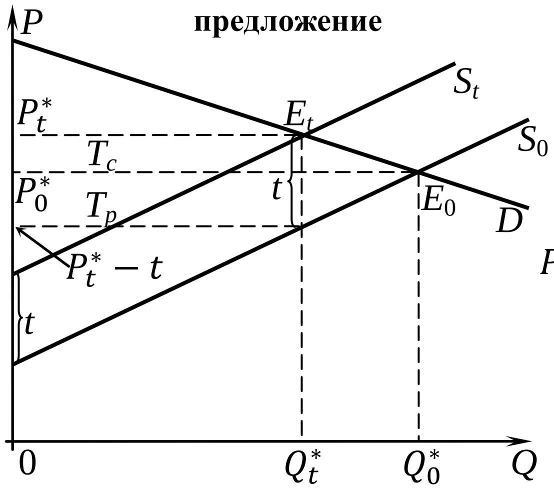
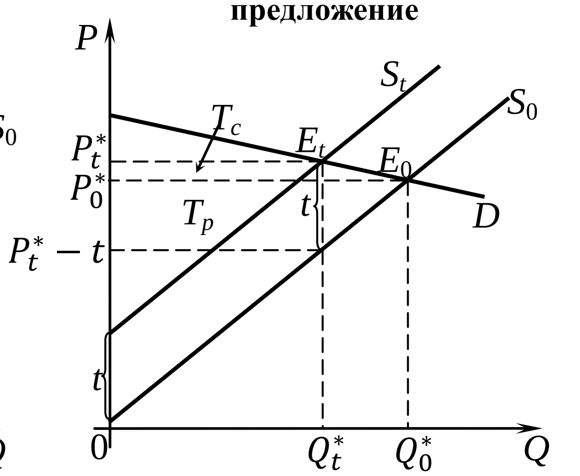


Рисунок 3.12. Эластичность спроса и предложения и распределение налогового бремени: относительно эластичный спрос и неэластичное предложение



В частности, в условиях примера из раздела 2.3, если функции рыночного спроса и предложения выражены, соответственно уравнениями: $Q_d = 107 - 3P$; $Q_s = 2P - 13$, то при введении поштучного налога со ставкой 15, который уплачивают производители, налоговые поступления в госбюджет составят 255. Поскольку $P_t^* - t = 15$, на потребителей ляжет 40% налогового бремени: $T_c = (30 - 24) \cdot 17 = 102$; а на производителей – 60%: $T_p = (24 - 15) \cdot 17 = 157$ (рис.2.15).