

## ПРОГРАММА КУРСА

### «Линейная алгебра - 2»

#### **Тема 1. Комплексные числа и многочлены**

Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Действия над комплексными числами. Возведение в степень и извлечение корня. Многочлены. Теорема Безу. Теорема Виета. Основная теорема высшей алгебры. Разложение многочлена на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

#### **Тема 2. Переход к новому базису**

Матрица перехода к новому базису в конечномерном линейном пространстве. Изменение координат вектора при переходе к новому базису.

#### **Тема 3. Билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах**

Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Матрица симметрической билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису. Квадратичная форма. Канонический вид квадратичной формы. Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа выделения полных квадратов. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм. Критерий главных миноров.

#### **Тема 4. Линейные операторы, собственные векторы и инвариантные подпространства**

Понятие линейного оператора. Примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Ядро и образ линейного оператора. Оператор симметрии. Оператор проектирования. Инвариантные подпространства; их свойства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора и его свойства. Алгебраическая и геометрическая кратность корней характеристического многочлена. Свойства собственных векторов. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду невырожденным линейным преобразованием. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства. Функции от линейного оператора. Функции от матриц.

#### **Тема 5. Жорданова нормальная форма матрицы**

Корневой вектор, корневое подпространство. Нильпотентный оператор. Циклическое подпространство. Жорданов базис. Жорданова клетка. Примеры применения.

#### **Тема 6. Матрицы с неотрицательными элементами**

Свойства матриц с неотрицательными элементами. Теорема Перрона-Фробениуса и её применение в экономике. Стохастические матрицы. Понятие о цепи Маркова.

#### **Тема 7. Евклидовы пространства**

Скалярное произведение; способы его задания. Примеры. Матрица Грама; её преобразование при переходе к новому базису. Процесс ортогонализации. Определитель Грама и его свойства. Объём  $n$ -мерного параллелепипеда. Расстояние между множествами в евклидовом пространстве. Ортогональные системы функций.

**Тема 8. Некоторые специальные виды линейных операторов в евклидовых пространствах**

Сопряженный оператор и его свойства. Симметрические (самосопряжённые) линейные операторы и их свойства. Ортогональные линейные операторы и их свойства. Разложение пространства в прямую сумму одномерных и двумерных инвариантных подпространств относительно ортогонального оператора. Приведение матрицы симметрического линейного оператора к диагональному виду ортогональным преобразованием. Понятие неотрицательного оператора. Извлечение корня произвольной степени из неотрицательного оператора. Полярное разложение линейного оператора.

**Тема 9. Приведение квадратичной формы к главным осям**

Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием (приведение к главным осям). Приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.

**Тема 10. Элементы линейного программирования**

Постановка задачи линейного программирования. Примеры задач линейного программирования. Геометрическое решение задачи линейного программирования в случае двух переменных. Понятие выпуклого множества. Понятие многогранного множества. Структура допустимого множества задачи линейного программирования. Структура оптимального множества задачи линейного программирования. Двойственность в линейном программировании. Теоремы двойственности. Экономическая и геометрическая интерпретация двойственных переменных.

**Литература**

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Изд-во МЦНМО, 2013.
2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2010.
3. Кострикин И.А., Сенченко Д.В., Слепак Б.Э., Черемных Ю.Н. Линейная алгебра. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
4. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. СПб.: Лань, 2011.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 2: Линейная алгебра. – М.: МЦНМО, 2009.