

ПРОГРАММА КУРСА

«Линейная алгебра - 2»

Тема 1. Комплексные числа и многочлены

Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Действия над комплексными числами. Возведение в степень и извлечение корня. Многочлены. Теорема Безу. Теорема Виета. Основная теорема высшей алгебры. Разложение многочлена на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

Тема 2. Переход к новому базису

Матрица перехода к новому базису в конечномерном линейном пространстве. Изменение координат вектора при переходе к новому базису.

Тема 3. Билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах

Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Матрица симметрической билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису. Квадратичная форма. Канонический вид квадратичной формы. Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа выделения полных квадратов. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм. Критерий главных миноров.

Тема 4. Линейные операторы, собственные векторы и инвариантные подпространства

Понятие линейного оператора. Примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Ядро и образ линейного оператора. Оператор симметрии. Оператор проектирования. Инвариантные подпространства; их свойства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора и его свойства. Алгебраическая и геометрическая кратность корней характеристического многочлена. Свойства собственных векторов. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду невырожденным линейным преобразованием. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства. Функции от линейного оператора. Функции от матриц.

Тема 5. Жорданова нормальная форма матрицы

Корневой вектор, корневое подпространство. Нильпотентный оператор. Циклическое подпространство. Жорданов базис. Жорданова клетка. Примеры применения.

Тема 6. Матрицы с неотрицательными элементами

Свойства матриц с неотрицательными элементами. Теорема Перрона-Фробениуса и её применение в экономике. Стохастические матрицы. Понятие о цепи Маркова.

Тема 7. Евклидовы пространства

Скалярное произведение; способы его задания. Примеры. Матрица Грама; её преобразование при переходе к новому базису. Процесс ортогонализации. Определитель Грама и его свойства. Объём n -мерного параллелепипеда. Расстояние между множествами в евклидовом пространстве. Ортогональные системы функций.

Тема 8. Некоторые специальные виды линейных операторов в евклидовых пространствах

Сопряженный оператор и его свойства. Симметрические (самосопряжённые) линейные операторы и их свойства. Ортогональные линейные операторы и их свойства. Разложение пространства в прямую сумму одномерных и двумерных инвариантных подпространств относительно ортогонального оператора. Приведение матрицы симметрического линейного оператора к диагональному виду ортогональным преобразованием. Понятие неотрицательного оператора. Извлечение корня произвольной степени из неотрицательного оператора. Полярное разложение линейного оператора.

Тема 9. Приведение квадратичной формы к главным осям

Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием (приведение к главным осям). Приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.

Тема 10. Элементы линейного программирования

Постановка задачи линейного программирования. Примеры задач линейного программирования. Геометрическое решение задачи линейного программирования в случае двух переменных. Понятие выпуклого множества. Понятие многогранного множества. Структура допустимого множества задачи линейного программирования. Структура оптимального множества задачи линейного программирования. Двойственность в линейном программировании. Теоремы двойственности. Экономическая и геометрическая интерпретация двойственных переменных.

Литература

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Изд-во МЦНМО, 2013.
2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2010.
3. Кострикин И.А., Сенченко Д.В., Слепак Б.Э., Черемных Ю.Н. Линейная алгебра. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
4. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. СПб.: Лань, 2011.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 2: Линейная алгебра. – М.: МЦНМО, 2009.