

# ПРОЕКТ

## макета учебной дисциплины

«Математический анализ-3»

«Mathematical Analysis-3»

**Кафедра** Математических методов анализа экономики. Ауд. 354-360, тел. 939-38-02

Сайт: <http://www.econ.msu.ru/departments/mmae/>.

e-mail: [mmae@econ.msu.ru](mailto:mmae@econ.msu.ru)

**Статус дисциплины:** по выбору, читается на программе бакалавров по направлению «Экономика»

### Авторы проекта:

1. Кострикин Игорь Алексеевич, e-mail: [iakostrikin@mail.ru](mailto:iakostrikin@mail.ru)
2. Кочергин Андрей Васильевич, e-mail: [avk@econ.msu.ru](mailto:avk@econ.msu.ru)
3. Черемных Юрий Николаевич, e-mail: [ioucher@yandex.ru](mailto:ioucher@yandex.ru)

### 1. Перечень планируемых результатов обучения

Изучение данной дисциплины способствует в дальнейшем освоению фундаментальных знаний, прикладных экономических навыков и получению следующих

Общекультурных компетенций (ОК):

- способность использовать фундаментальные экономические знания в различных сферах деятельности (ОК-3);
- способность к самоорганизации и активному самообразованию (ОК-7).

Общепрофессиональных компетенций (ОПК):

- способностью выбирать и комбинировать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы (ОПК-3);

Профессиональных компетенций (ПК):

- способность на основе описания экономических, исторических, политических, экологических, демографических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты и делать прогнозы (ПК-4);
- способность использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические и программные средства и информационные технологии (ПК-8);
- способность использовать в преподавании экономических дисциплин в образовательных организациях различного уровня существующие программы и учебно-методические материалы (ПК-12).

#### 1.1 В результате освоения дисциплины студент должен:

##### **Знать:**

1. основы логического мышления: понятия необходимости, достаточности, следствия, эквивалентности и т.д.;
2. теорему о неявной функции для системы уравнений;
3. понятие отображения многомерных пространств, его свойства;
4. понятие условного экстремума и методы его нахождения;
5. экономические приложения теоремы о неявной функции и условного экстремума;
6. основные свойства выпуклых множеств и выпуклых функций;
7. теорию числовых рядов;

8. понятие равномерно сходящихся функциональных рядов и последовательностей и методы их исследования;
9. понятие степенного ряда и методы его исследования;
10. теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании функциональных и степенных рядов;
11. понятие неподвижной точки отображения;
12. теорему Брауэра о неподвижной точке;
13. теорему Какутани о неподвижной точке.

***Уметь:***

1. делать выводы из проведенного исследования;
2. формулировать и обосновывать утверждения;
3. проводить вычисления с неявными функциями;
4. находить условные экстремумы;
5. исследовать функции на однородность и гомотетичность;
6. применять теоремы о маргинальных значениях и об огибающей;
7. обосновывать выпуклость функции;
8. исследовать числовые ряды на сходимость;
9. исследовать функциональные последовательности на равномерную сходимость;
10. исследовать функциональные ряды на равномерную сходимость;
11. исследовать степенные ряды;
12. использовать теоремы о неподвижных точках при исследовании вопросов существования равновесий у экономических систем.

***Владеть:***

1. методологией математического анализа;
2. навыками логических построений в области теории неявных функций;
3. навыками логических построений в области теории числовых и функциональных рядов;
4. навыками работы с функциями, описывающими экономические явления;
5. основными методами исследования функций на экстремумы;
6. методами исследования числовых, функциональных и степенных рядов.

**2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП) подготовки бакалавра.**

«Математический анализ – 3» является естественным развитием курса «математический анализ – 2» и служит основой для углубленного изучения таких дисциплин, как теория вероятностей и математическая статистика, методы оптимальных решений, теория игр и ряда экономико-математических дисциплин.

Для успешного овладения курсом студентам необходима подготовка по следующим дисциплинам: математический анализ-1, математический анализ-2, линейная алгебра-1 и линейная алгебра-2.

**Желательный семестр** для чтения дисциплины: третий семестр.

3. **Желательный объем дисциплины:** 5 зачетных единиц (180 академических часов, в том числе: лекции 54 часа, семинары 36 часов, контактные часы 16 часов, самостоятельная работа 74 часа)

## 4. Структура и содержание дисциплины

### Тема 1. Теорема о неявной функции

Отображение, дифференциал отображения, матричная запись дифференциала. Свойства дифференциала. Дифференциал сложного отображения. Геометрическая интерпретация дифференциала отображения.

Теорема о неявной функции для случая одного уравнения с  $n$  переменными. Линеаризация уравнения, приближенное решение нелинейного уравнения. Вычисление дифференциала неявной функции.

Теорема о неявной функции для системы уравнений в скалярной и матричной формах. Достаточное условие локальной разрешимости системы уравнений и его связь с условием разрешимости системы линейных уравнений. Вычисление дифференциала векторной функции, заданной неявной.

### Тема 2. Применение теории неявной функции и условного экстремума

Задача условной оптимизации с несколькими ограничениями. Необходимое условие условного экстремума. Достаточные условия условного экстремума. Нахождение глобального максимума и минимума функции.

Теорема о маргинальных значениях. Теоремы об огибающей. Однородные и гомотетичные функции. Теорема Эйлера для однородных функций. Свойства изоквант и множеств точек условного экстремума в задачах с гомотетичными функциями. Экономические приложения.

### Тема 3. Выпуклые функции

Понятие выпуклой и вогнутой функций двух и нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия выпуклости для непрерывных, дифференцируемых функций и дважды дифференцируемых функций. Теорема о непрерывности выпуклой функции, определенной на выпуклом открытом множестве. Экстремум выпуклой функции.

Теоремы об отделимости выпуклых множеств. Применение в экономической теории.

### Тема 4. Числовые ряды

Понятие числового ряда, его общего члена и частичной суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши для рядов. Интегральный признак Коши сходимости и расходимости. Признаки сходимости для знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признаки Даламбера, Коши. Понятие абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Теорема Римана об условно сходящихся рядах. Теорема Коши об абсолютно сходящихся рядах. Признак Дирихле-Абеля.

### Тема 5. Функциональные последовательности и ряды

Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. Понятие области сходимости и суммы функционального ряда. Понятие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Критерий  $\lim-sup$  равномерной сходимости функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Теорема о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся последовательности и суммы функционального ряда. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании.

### Тема 6. Степенные ряды

Понятие степенного ряда. Первая теорема Абеля. Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании

степенных рядов. Второй теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена. Суммирование степенных рядов. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.

### **Тема 7. Теоремы о неподвижной точке**

Теорема Брауэра о неподвижной точке. Теорема Какутани о неподвижной точке. Применение теорем о неподвижной точке в экономико-математической теории.

## **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы**

### **Литература**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1, 2. М.: Физматлит, 2005.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ: Астрель, 2010.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу (числовые и функциональные ряды). М.: Факториал, 1996.
5. Тодд М.Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. М.: Наука, 1983.

## **6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации по дисциплине**

В начале каждого семестра студенты получают список теоретических вопросов и обширный набор образцов практических и теоретических заданий, пополняемый в течение семестра Эти материалы служат основой для самостоятельной работы и подготовки к практическим и теоретическим письменным работам.

### ***а) перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе обучения***

Компетенции ОК-3, ОК-7, ОПК-3, ПК-4, ПК-8, ПК-12 формируются в процессе обучения всем темам курса.

### ***б) типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций***

1. Пусть функция  $z = f(x, y)$  задается уравнением  $z + xz + e^{yz} = 1$ . Найдите градиент этой функции в точке  $(1, 0)$  и напишите уравнение касательной к графику функции  $z = f(x)$  в этой точке. Что можно сказать о функции  $z = f(x)$  и касательной к ее линии уровня в точке  $(-1, 1)$ ?  $(-1, 0)$ ?
2. Найдите экстремумы функции  $y = y(x, z)$ , заданной неявно уравнением  $x^3 - xy - y^2 - 2xz - z^2 = 0$ .
3. а) Дана система уравнений  $x = \ln(u + v)$ ,  $y = u^2 - 2v$ ,  $z = 2u - v^2$  и две точки:  $A(u = 2; v = 1/2)$  и  $B(u = 1/2; v = 1)$ . Про какую из двух данных точек можно утверждать, что в некоторой ее окрестности система задает гладкую поверхность в пространстве  $(x; y; z)$ , описываемую гладкой функцией  $x = x(y, z)$ ?  
б) В точке, выбранной в предыдущей задаче, вычислить  $x'_y$ ,  $x'_z$  и  $x''_{zz}$ .

- в) Напишите уравнение касательной плоскости к графику функции  $x = x(y, z)$  в соответствующей точке.
4. Объем производства, описываемый функцией  $y = x_1^\alpha x_2^\beta$ , увеличился в  $k$  раз. Во сколько раз увеличится потребность в ресурсах в точке рыночного равновесия, если  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = J$ ? Ответ дайте, не решая задачу отыскания условного экстремума.
5. Обоснуйте выпуклость множества  

$$M = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 - 2xy + 2y^2 - 4 \leq z \leq \min(x + y, z - y)\}$$
6. Исследуйте числовой ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^4 + n + 1}$
7. Исследуйте функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccctg} \frac{x}{n^2}$  на поточечную и равномерную сходимость на множестве а)  $(0; 10)$ ; б)  $(10; +\infty)$ .
8. Исследуйте степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  на поточечную и равномерную сходимость на множестве а)  $(-1; 1)$ ; б)  $(-1/2; 1/2)$ .

### 7. Форма проведения самостоятельной работы и текущего контроля успеваемости

- По каждой теме: изучение материалов учебника и лекций, решение задач. Суммарная трудоемкость 36 часов.
- Письменные контрольные работы. Трудоемкость подготовки 4 часов.
- Микроконтрольная по теоретическим вопросам. Трудоемкость подготовки 2 часа.
- Экзамен. Трудоемкость подготовки 32 часа.

Итоговая сумма баллов для каждого студента складывается из результатов по следующим видам работ:

- две письменные контрольные работы;
- письменные теоретические микро-контрольные работы;
- письменный экзамен.

### 8. Образовательные технологии.

Интерактивные лекции, семинарские занятия, устный разбор результатов контрольных работ, консультации по теоретическому материалу.

### 9. Балльная система оценки знаний.

Итоговая оценка в баллах выставляется в соответствии с принятой на факультете балльно-рейтинговой системой, исходя из 250 баллов.

Критерии оценок:

- отлично — не менее 85%;
- хорошо — не менее 65%, но менее 85%;
- удовлетворительно — не менее 40%, но менее 65%.

### 10. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля).

Для лекций необходимы:

- аудитория с меловой доской, проектором и качественным микрофоном;
- доступ студентов и преподавателей курса к образовательному portalу экономического факультета МГУ;
- наличие обязательной литературы в достаточном количестве в библиотеке экономического факультета МГУ.