

## Программа курса «Дифференциальные уравнения и их приложения»

**Лектор:** Кострикин И.А.

### Тема 1. Элементы теории метрических пространств

Метрика и расстояние, метрическое пространство. Нормированные пространства. Понятие шара и  $\varepsilon$ -окрестности. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве. Понятие фундаментальной последовательности. Понятие полного метрического пространства. Критерий Коши.

Равномерная сходимость последовательности функций, теоремы о равномерно сходящихся последовательностях. Полнота пространства  $C[a, b]$ .

Внутренняя, предельная и граничная точки множества в метрическом пространстве. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Полнота замкнутого подмножества полного метрического пространства. Теорема о дополнении в метрическом пространстве. Отображения метрических пространств. Непрерывные отображения. Условие Липшица для функции и для отображения. Сжимающее и квазисжимающее отображения и их непрерывность. Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения. Применения этой теоремы. Простейшая модель рынка труда, паутинообразная модель и др.

#### Литература:

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Глава II, §§ 1 – 4.

### Тема 2. Теоремы о неподвижной точке

Теорема Брауэра о неподвижной точке (формулировка). Теорема Какутани о неподвижной точке (определения и формулировка). Примеры применения теорем о неподвижной точке в экономико-математической теории и теории игр.

#### Литература:

Тодд М.Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. – М.: Наука, 1983.

### Тема 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Примеры моделей, описываемых дифференциальными уравнениями: модель Мальтуса и её модификации, модель Лотки – Вольтерра и другие.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие решения (частного и общего). Начальное условие. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Лемма об эквивалентности задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка и интегрального уравнения. Теорема Пикара. Понятие о численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним уравнения. Линейные уравнения, уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.

#### Литература:

Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. §§ 1, 2, 5.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. §§ 2 – 6.

### Тема 4. Уравнения высших порядков и системы уравнений первого порядка.

#### Линейные уравнения и системы

Постановка задачи. Вектор начальных значений. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка. Формулировка теоремы Пикара для систем дифференциальных уравнений первого порядка. Задача Коши для дифференциального уравнения порядка  $n$ . Связь между дифференциальным уравнением порядка  $n$  и системой дифференциальных уравнений первого порядка. Формулировка теоремы Пикара для дифференциального уравнения порядка  $n$ .

Понятие линейной зависимости и линейной независимости набора функций в промежутке. Теорема о структуре общего решения однородного и неоднородного линейного дифференциального уравнения порядка  $n$ . Фундаментальный набор решений. Теоремы об определителе Вронского для набора решений однородного линейного дифференциального уравнения порядка  $n$ . Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частных решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений порядка  $n$ . Фундаментальный набор решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, теорема о структуре общего решения однородной и неоднородной системы. Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частных решений неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка.

**Литература:**

Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. §§ 4, 5.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. §§ 2 – 6.

**Тема 5. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами**

Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов.

Структура общего решения линейной однородной системы уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Фазовый портрет, основные типы неподвижных точек. Нахождение частного решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов.

**Литература:**

Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. §§ 9, 12, 14.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. §§ 11, 14.

**Тема 6. Устойчивость решений систем. Экономические приложения**

Фазовые траектории. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Сведение к исследованию положения равновесия. Теоремы Ляпунова. Устойчивость решений линейных систем. Формулировка теорем об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Доказательство для случая простых вещественных характеристических корней. Понятие о структурной устойчивости. Применение функции Ляпунова для анализа структурной устойчивости. Анализ модели Лотки – Вольтерра «хищник – жертва». Устойчивость положений равновесия в моделях Солоу и Рамсея.

**Литература:**

Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. §§ 17 – 21.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. §§ 15 – 17.

**Тема 7. Обыкновенные разностные уравнения**

Разностные уравнения, две формы записи. Задача Коши. Формулировка теоремы о структуре общего решения линейного разностного уравнения порядка  $n$ . Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Исследование устойчивости неподвижных точек.

**Литература:**

А.Ю Коврижных, О.О. Коврижных. Дифференциальные и разностные уравнения. Глава 2.

**Тема 8. Элементы вариационного исчисления, понятие об оптимальном управлении.**

Простейшая задача вариационного исчисления. Основные понятия. Уравнение Эйлера. Изопериметрическая задача вариационного исчисления. Формулировка необходимого условия. Задача с подвижными концами, условие трансверсальности.

Постановка простейших задач оптимального управления. Задача о расширенном воспроизводстве при налогообложении.

**Литература:**

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.  
Глава 6, §§ 1 – 4, Глава 9, § 3.

**Литература:**

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2019.
2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: УРСС, 2014.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: УРСС, 2013.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – УРСС, 2000.
5. А.Ю Коврижных, О.О. Коврижных. Дифференциальные и разностные уравнения. Издательство Уральского университета, 2014.
6. Тодд М.Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. – М.: Наука, 1983.