Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль 2015 года*

# ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

**Задача 1.**

Найдите $f(2)$, если $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{10}$.

**Ответ:** 2

Найдите $f(3)$, если $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{12}$.

**Ответ:** 3

Найдите $f(5)$, если $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{15}$.

**Ответ:** 2

Найдите $f(3)$, если $f(x) = \dfrac{x}{7} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{21}$.

**Ответ:** 1

**Задача 2.**

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

**Ответ:** 39

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 9x - 2 = 0$.

**Ответ:** 85

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 8x - 3 = 0$.

**Ответ:** 70

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 10x + 4 = 0$.

**Ответ:** 92

**Задача 3.**

Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

**Ответ:** $x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2n\pi, \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Решите неравенство $\sin x + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos 2x + \cos x \leqslant 0$.

**Ответ:** $x \in \left[-\frac{13\pi}{12} + 2n\pi, -\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Решите неравенство $\cos x - \sqrt{2}\cos 2x + \sin x \leqslant 0$.

**Ответ:** $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{17\pi}{12} + 2n\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\pi}{12} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Решите неравенство $\cos x - \sqrt{\frac{2}{3}}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

**Ответ:** $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\pi}{12} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{12} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

**Задача 4.**

Решите уравнение $\log_x |2x^2-3| = 4\log_{|2x^2-3|} x$.

**Ответ:** $x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$

Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |4x-1| = 4\log_{|4x-1|} \sqrt{x+1}$.

**Ответ:** $x = -\frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Решите уравнение $\log_x |3x^2-4| = 4\log_{|3x^2-4|} x$.

**Ответ:** $x = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{2},\ \sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}$

Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |5x-1| = 4\log_{|5x-1|} \sqrt{x+1}$.

**Ответ:** $x = -\frac{4}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{-2+\sqrt{14}}{5}$

**Задача 5.**

Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны $BC$ треугольника $ABC$ и пересекает сторону $AB$ в точках $D$ и $E$, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться $AC$, если $\angle BAC = 30°$?

**Ответ:** $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

Окружность радиуса 2 касается середины стороны $AC$ треугольника $ABC$ и пересекает сторону $BC$ в точках $K$ и $L$, так что $BK = KL = LC$. Чему может равняться $AB$, если $\angle ABC = 45°$?

**Ответ:** $3 \pm \sqrt{7}$

Окружность касается середины стороны $BC$ треугольника $ABC$ и пересекает сторону $AB$ в точках $D$ и $E$, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle BAC = 30°$ и $AC = 2/3$?

**Ответ:** $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

Окружность касается середины стороны $AC$ треугольника $ABC$ и пересекает сторону $BC$ в точках $K$ и $L$, так что $BK = KL = LC$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle ABC = 45°$ и $AB = 1$?

**Ответ:** $3 \pm \sqrt{7}$

**Задача 6.**

Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

**Ответ:** 1 км

Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав две трети пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий и, проехав 800 метров, встретил Григория. Найдите длину трассы, если известно, что Василий закончил спуск ровно тогда, когда Григорий добрался до вершины горы. Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

**Ответ:** 2 км

Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав четверть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий и, проехав 4 км, встретил Василия. Найдите расстояние между пунктами А и Б, если известно, что Василий добрался до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б. Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

**Ответ:** 20 км

Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав три четверти пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий. На каком расстоянии от вершины он встретит Григория, если длина трассы равна 2100 метров, а Василий закончит спуск ровно тогда, когда Григорий доберётся до вершины горы? Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

**Ответ:** 900 м

**Задача 7.**

В правильную треугольную призму с основаниями $ABC$, $A'B'C'$ и рёбрами $AA'$, $BB'$, $CC'$ вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми $AE$ и $BD$ равно $\sqrt{13}$, где $E$ и $D$ — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

**Ответ:** 13/6

В правильную треугольную призму с основаниями $ABC$, $A'B'C'$ и рёбрами $AA'$, $BB'$, $CC'$ вписана сфера радиуса $\sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$, где $K$ и $L$ — точки, лежащие на $AB$ и $BC$ соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.

**Ответ:** 15/2

В правильную треугольную призму с основаниями $ABC$, $A'B'C'$ и рёбрами $AA'$, $BB'$, $CC'$ вписана сфера радиуса $\sqrt{13}$. Найдите расстояние между прямыми $AE$ и $BD$, где $E$ и $D$ — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

**Ответ:** 6

В правильную треугольную призму с основаниями $ABC$, $A'B'C'$ и рёбрами $AA'$, $BB'$, $CC'$ вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$ равно $\sqrt{21}$, где $K$ и $L$ — точки, лежащие на $AB$ и $BC$ соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.

**Ответ:** 14/5

**Задача 8.**

Найдите все пары $(\alpha, \beta)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3\sin\alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3\sin\alpha}.$$

**Ответ:** $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, $\beta = 0$

Найдите все пары $(x, y)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2 - \cos x}{2 - \cos 2x} + \frac{2 - \cos 2x}{(y^2 + 1)^2} + \frac{(y^2 + 1)^2}{|y| + 1} + \frac{|y| + 1}{2 - \cos x}.$$

**Ответ:** $x = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, $y = 0$

Найдите все пары $(\alpha, \beta)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\cos\alpha}{2-\cos 2\alpha}+\frac{2-\cos 2\alpha}{2\beta^4+\beta^2+1}+\frac{2\beta^4+\beta^2+1}{|\beta|+1}+\frac{|\beta|+1}{4-3\cos\alpha}\,.$$

**Ответ:** $\alpha = 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}),\ \beta = 0$

Найдите все пары $(x, y)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2-\sin x}{2+\cos 2x}+\frac{2+\cos 2x}{(y+1)^2}+\frac{(y+1)^2}{2\sqrt{y}+1}+\frac{2\sqrt{y}+1}{2-\sin x}\,.$$

**Ответ:** $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}),\ y = 0$